

**Jorge A. Sáenz**

# **CALCULO DIFERENCIAL**

**CON**

**FUNCIONES TRASCENDENTES TEMPRANAS**

**Tercera Edición**

**HIPOTENUSA**

**CALCULO**  
**DIFERENCIAL**  
CON  
FUNCIONES TRASCENDENTES TEMPRANAS  
PARA  
**CIENCIAS E INGENIERIA**  
TERCERA EDICION

**Jorge Sáenz**

**HIPOTENUSA**

Barquisimeto  
2014

# **CALCULO DIFERENCIAL PARA CIENCIAS E INGENIERIA**

**Jorge Sáenz**

**Depósito Legal N° If0512014510837**

**ISBN: 978-980-12-7203-8**

## **Editado y distribuido por:**

Editorial Hipotenusa, C. A.

J-40036219-9

Telef: (0251)2402273

e-mail: editorialhipotenusa@gmail.com

Barquisimeto–Edo Lara, Venezuela

**[www.hipotenusaonline.com](http://www.hipotenusaonline.com)**

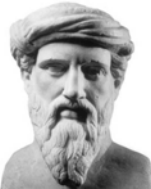


Edición Internacional 2015

Tercera Edición, 2014

Derechos reservados

La presente edición y sus características gráficas, son propiedad exclusiva de Editorial Hipotenusa, C. A., quedando prohibida su reproducción parcial o total sin autorización de la empresa.

# CONTENIDO

	<b>PROLOGO</b>	vii
<b>Capítulo 1. PRELIMINARES</b>		<b>1</b>
	<i>PITAGORAS DE SAMOS</i>	2
	1.1 Un poquito de Lógica y de Conjuntos	3
	1.2 El Sistema de los Números Reales. Axiomas de Campo	10
	1.3 Radicales y Exponentes Racionales	28
	1.4 Algo de Algebra	35
	1.5 Ecuaciones Polinómicas	50
	1.6 Axiomas de Orden. Inecuaciones	68
	1.7 Valor Absoluto	82
<hr/>		
<b>Capítulo 2. EL PLANO CARTESIANO Y LA RECTA</b>		<b>91</b>
	<i>RENÉ DESCARTES</i>	92
	2.1 El Plano Cartesiano	93
	2.2 Gráficas de Ecuaciones de dos Variables Criterios de Simetría y Traslación	99
	2.3 La Recta y la Ecuación de Primer Grado	109
<hr/>		
<b>Capítulo 3. LAS CONICAS</b>		<b>125</b>
	<i>APOLONIO DE PERGA</i>	126
	3.1 Introducción	127
	3.2 La Parábola	127
	3.3 La Elipse	140
	3.4 La Hipérbola	153
	3.5 La Ecuación General de Segundo Grado. Rotación de Ejes	166
<hr/>		

## Capítulo 4. FUNCIONES REALES 175

### *ARQUÍMIDES* 176



4.1 Funciones Reales y sus Gráficas	177
4.2 Funciones Trigonómicas	191
4.3 Nuevas funciones de funciones conocidas	205
4.4 Funciones Inversas	216
4.5 Funciones Trigonómicas Inversas	220
4.6 Funciones exponenciales	226
4.7 Funciones logarítmicas	232
4.8 Aplicaciones de las funciones exponenciales y Logarítmicas.	238
<i>Breve historia de la familia Bernoulli</i>	248

---

## Capítulo 5. LÍMITES Y CONTINUIDAD 249

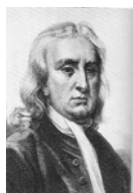
### *Leonardo Euler* 250



5.1 Introducción Intuitiva a los Límites	251
5.2 Tratamiento Riguroso de los Límites	267
5.3 Límites Trigonómicos	287
5.4 Continuidad	293
5.5 Límites Infinitos y Asíntotas Verticales	306
5.6 Límites en el Infinitos y Asíntotas Horizontales	318
5.7 Los Límites y el Número $e$	334
5.8 Asíntotas Oblicuas	336
<i>Breve historia de <math>\pi</math></i>	344

---

## Capítulo 6. DIFERENCIACION 345



### *ISAAC NEWTON* 346

6.1 La Derivada	347
6.2 Técnicas Básicas de Derivación	360
6.3 Derivadas de las Funciones Trigonómicas	371

6.4	Derivadas de las Funciones Exponenciales y Logarítmicas	374
6.5	La Regla de la Cadena	377

---

## Capítulo 7. OTRAS TECNICAS DE DERIVACION 389



	<i>GOTTFRIED WILHELD LEIBNIZ</i>	<b>390</b>
7.1	Derivación Implícita y Teorema de la Función Inversa	391
7.2	Derivación Logarítmica	404
7.3	Derivadas de las Funciones de las Funciones Trigonométricas Inversas	408
7.4	Derivadas de Orden Superior, Velocidad y Aceleración	411
7.5	Funciones Hiperbólicas y sus Inversas	423
7.6	Razón de cambio	434
7.7	Aproximaciones Lineales y Diferenciales	450

	<i>Nicolás Bourbaki</i>	
	<i>LA misteriosa historia de un brillante matemático que nunca existió</i>	461

---

## Capítulo 8. APLICACIONES DE LA DERIVADA 463



	<i>GUILLAUME F. A. M. DE L'HOSPITAL</i>	464
8.1	Máximos y Mínimos Absolutos	465
8.2	Teorema del Valor Medio	471
8.3	Monótonas, Concavidad y Criterios para extremos locales	484
8.4	Formas Indeterminadas. Regla de L'Hospital	500
8.5	Trazado cuidadoso del grafico de una función	517
8.6	Problemas de Optimización	530
8.7	Método de Newton–Raphson	559

---

<b>TABLAS</b>	<b>569</b>
Algebra	570
Geometría	571
Trigonometría	572
Funciones Trigonómicas de ángulos notables	573
Exponenciales y Logaritmos	574
Identidades Hiperbólicas	574
Alfabeto Griego	574
Fórmulas de Derivación	575
<hr/>	
<b>RESPUESTAS</b>	<b>577</b>
<b>INDICE ALFABETICO</b>	<b>607</b>
<hr/>	

## PROLOGO

En esta nueva edición de **Calculo Diferencial con Funciones Trascendentes Tempranas** buscamos ayudar a los estudiantes de recién ingreso a la universidad a afrontar con éxito los temas propios del Cálculo. Para cumplir con este objetivo, el material de precálculo, que aparece en los apéndices de la edición anterior, ha sido ampliado y es presentado en los tres primeros capítulos de esta edición. El tercer capítulo está dedicado enteramente al estudio de las cónicas, el cual lo desarrollamos a plenitud.

El material contenido en los capítulos del 1 al 5 de la edición previa se ha mantenido sin cambios, salvo correcciones y pequeños agregados.

Los tres nuevos capítulos que se han incluido son desarrollados siguiendo el mismo esquema de nuestros textos: Equilibramos la teoría y la práctica. La teoría es acompañada por números ejemplos. Una buena parte de cada sección es dedicada a presentar, con todo detalle, problemas resueltos. La gran mayoría de teoremas son presentados con sus respectivas demostraciones. Cuando la demostración es compleja, ésta es presentada como un problema resuelto.

He recibido ayuda de muchos colegas y estudiantes. En forma especial, debo mencionar al Prof. Juan Carlos La Cruz, quien se dio la tarea de resolver un buen número de los problemas propuestos y de chequear las respuestas.

Jorge Sáenz Camacho

Julio 2014

# 1

---

## PRELIMINARES

---

*PITAGORAS DE SAMOS*  
(569–475 A. C.)

**1.1 UN POQUITO DE LOGICA Y DE CONJUNTOS**

**1.2 EL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES.  
AXIOMAS DE CUERPO**

**1.3 RADICALES Y EXPONENTES RACIONALES**

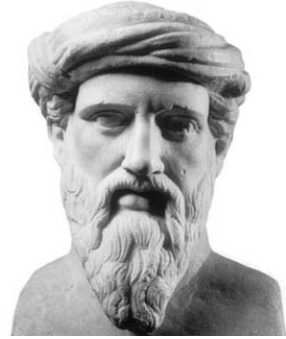
**1.4 ALGO DE ALGEBRA**

**1.5 ECUACIONES POLINOMICAS**

**1.6 AXIOMAS DE ORDEN. INECUACIONES**

**1.7 VALOR ABSOLUTO**

## **Pitágoras de Samos** (569–475 A. C.)



**PITAGORAS DE SAMOS** nació en la isla griega de Samos alrededor del año 569 A. C. Su padre fue un mercader de Tiro. Cuando joven, acompañó a su padre en sus viajes de negocios a Caldea, Siria, Italia y otras regiones. Cuando tenía 29 años, visitó al matemático **Thales** y a **Anaximander** (discípulo de Thales), en la ciudad de **Mileto**. Allí recibió lecciones de Geometría y Astronomía, de parte de Anaximander.

En el año 535 A. C. los persas invadieron Egipto derrotándolos en la batalla de Pelusium en el delta del Nilo. Tomaron algunos prisioneros, entre los que se encontraba Pitágoras. Fueron llevados a Babilonia. Pitágoras permaneció allí algún tiempo, aprendiendo algunos principios religiosos propios de esta cultura. El año 520 A. C. regresó a Samos. Alrededor del 518 A.C., supuestamente huyendo de una tiranía en Samos, se mudó a **Crotona**, una colonia griega al sur de Italia. Allí fundó un movimiento con propósitos científicos, filosóficos, religiosos, llamado el **Pitagorismo**. Esta escuela adoptó ciertos principios y misterios, propios de los cultos de la antigua Grecia. Los pitagóricos eran vegetarianos, no poseían propiedades personales, practicaban la obediencia y el silencio. Sostenían que todas las relaciones que aparecen en la matemática, la música, la Astronomía, etc., se pueden reducir a relaciones entre números. Para ellos, en un inicio, número quería decir, número racional. Cuando uno de ellos (Hipaso de Metaponto) descubrió los números irracionales, su filosofía tambaleó. Decidieron guardar silencio sobre este hallazgo, quitándole la vida al descubridor.

Actualmente, Pitágoras es conocido por el teorema que lleva su nombre. Se dice que este teorema fue conocido por los babilonios, 1000 años antes. Sin embargo, él (o alguno de los pitagóricos) fue el primero en demostrarlo.

En el año 508, los pitagóricos fueron perseguidos. Pitágoras huyó a Metapontum, otra colonia griega en Italia al norte de Crotona, donde, según algunos historiadores, muere el año 500 A. C. Otros historiadores sostienen que regresó a Crotona y que siguió dirigiendo su sociedad hasta su muerte en el año 475 A. C.

### **ACONTECIMIENTOS PARALELOS IMPORTANTES**

Durante la vida de Pitágoras, en América sucedieron los siguientes hechos notables: En América Central, la civilización Maya estaba viviendo los últimos años de su periodo preclásico (2000 A. C. 100 D. C.). Comienza la construcción de las pirámides. En el Perú se desarrollaba la cultura Chavín de Huantar (2000 A. C. 600 D. C.). Las culturas inca y azteca aparecen mucho más tarde, siglos XII y XIV de nuestra era, respectivamente.

**SECCION 1.1**

**UN POQUITO DE LOGICA Y DE CONJUNTOS**

Dedicamos esta primera sección a presentar rápidamente algunos conceptos básicos de Lógica y de la Teoría de Conjuntos. El lector que desea más información sobre estos puntos lo encontrará en nuestro texto **Fundamentos de la Matemática**.

**LOGICA**

Una **proposición** es un enunciado del cual tiene sentido decir que es **verdadero (V)** o que es **falso (F)**, pero no ambas cosas a la vez. No es necesario saber de antemano que el juicio sea verdadero o sea falso; lo único que requerimos es que sea lo uno o lo otro, aunque no se conozca cual de los dos casos es.

A las proposiciones las denotaremos con letras minúsculas:  $p, q, r, t$ , etc.

Si una proposición  $p$  es verdadera diremos que su **valor lógico es V** y escribiremos  $VL(p) = V$ . En cambio, si la proposición es falsa, diremos que su **valor lógico es F** y escribiremos  $VL(p) = F$

<b>EJEMPLO 1.</b>	<b>Proposición</b>	<b>Valor Lógico</b>
1.	$p$ : 7 es número primo.	V
2.	$q$ : 4 es un número impar.	F
3.	$r$ : Existe un número $x$ tal que $5 + x = 8$ .	V
4.	$t$ : Todo triángulo es rectángulo	F

Las proposiciones se pueden combinar para formar nuevas proposiciones más complejas. Así, si  $p$ : 7 es número primo y  $q$ : 4 es un número impar, entonces podemos formar las siguientes nuevas proposiciones:

- a. 7 **no** es número primo, que es la **negación** de la proposición  $p$ .
- b. 7 es un número primo **o** 4 es un número impar, que es la **disyunción** de las proposiciones  $p$  y  $q$ .
- c. 7 es un número primo **y** 4 es un número impar, que la es la **conjunción** de las proposiciones  $p$  y  $q$ .
- d. Si 7 es un número primo, entonces 4 es un número impar, que es la proposición **condicional** de  $p$  y  $q$ .
- e. 7 es un número primo si y sólo si 4 es un número impar, que es la proposición **bicondicional** de  $p$  y  $q$ .

Estos términos que enlazan proposiciones para formar otras proposiciones compuestas son denominados **conectivos lógicos** o, simplemente, **conectivos**. Los conectivos más usuales son los siguientes:

CONECTIVO	SIMBOLO	Ejemplo de uso	Se lee
Negación	$\sim$	$\sim p$	no $p$
Disyunción	$\vee$	$p \vee q$	$p$ ó $q$
Conjunción	$\wedge$	$p \wedge q$	$p$ y $q$
Condicional	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$	Si $p$ , entonces $q$
Bicondicional	$\leftrightarrow$	$p \leftrightarrow q$	$p$ si y sólo si $q$

Veamos esto en términos más precisos. Sean  $p$  y  $q$  dos proposiciones.

1. La **negación** de  $p$  es  $\sim p$  que se lee **no  $p$** .

$\sim p$  es verdadera si  $p$  es falsa y  $\sim p$  es falsa si  $p$  es falsa.

2. La **disyunción** de  $p$  y  $q$  es  $p \vee q$  que se lee  **$p$  ó  $q$** .

$p \vee q$  es verdadera cuando al menos una de las proposiciones o bien  $p$  o bien  $q$  es verdadera, y es falsa cuando ambas son falsas.

Así, la proposición “7 es un número primo o 4 es un número impar” es la disyunción de una proposición verdadera con una falsa. Como una de ellas es verdadera, la disyunción es verdadera.

3. La **conjunción** de  $p$  y  $q$  es  $p \wedge q$  que se lee  **$p$  y  $q$** ,

$p \wedge q$  es verdadera cuando tanto  $p$  como  $q$  son verdaderas y es falsa en los demás casos.

Así, la proposición “7 es un número primo y 4 es un número impar” es la conjunción de una proposición verdadera con una falsa. Como las dos no son verdaderas, su conjunción es falsa.

4. El **condicional** de  $p$  y  $q$  es  $p \rightarrow q$  que se lee **si  $p$ , entonces  $q$**

$p \rightarrow q$  es falsa solamente cuando  $p$  es verdadera y  $q$  es falsa. En cualquiera de las otras tres posibilidades,  $p \rightarrow q$  es verdadera. La tabla adjunta nos ilustra esta definición.

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Así, la proposición

Si  $2 + 1 = 3$ , entonces  $5 > 6$  es falsa. En cambio las tres condicionales siguientes, son verdaderas.

Si  $2 + 1 = 3$ , entonces  $5 < 6$ .      Si  $2 + 1 = 4$ , entonces  $5 < 6$ .

Si  $2 + 1 = 4$ , entonces  $5 > 6$ .

Dado el condicional,  $p \rightarrow q$  su **recíproco** es el condicional  $q \rightarrow p$  y su **contrarrecíproco** es el condicional  $\sim q \rightarrow \sim p$

5. El bicondicional de  $p$  y  $q$  es  $p \leftrightarrow q$  que se lee  $p$  si y sólo si  $q$

$p \leftrightarrow q$  es verdadera cuando los valores lógicos  $p$  y  $q$  son iguales, y es falsa cuando estos valores lógicos son diferentes. La tabla adjunta nos ilustra esta definición.

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Así, la proposiciones

Si  $2+1 = 3$  si y sólo si  $5 < 6$ . Si  $2+1 = 4$  si y sólo si  $5 > 6$

son verdaderas. En cambio, las dos siguientes son falsas.

Si  $2 + 1 = 3$ , entonces  $5 > 6$ . Si  $2 + 1 = 4$ , entonces  $5 < 6$ .

### EQUIVALENCIA LOGICA

Llamaremos **proposición compuesta o forma proposicional** a toda proposición que se obtiene de otros usando conectivos lógicos. Para representar formas proposicionales usaremos letras mayúscula, como  $A, B, C$ , etc.

Una **tautología** es una forma proposicional que es **verdadera** para cualquier valor lógico que se asigne a sus variables proposicionales. Una **contradicción** es una forma proposicional que es **falsa** para cualquier valor lógico que se asigne a sus variables proposicionales. Es claro que la negación de una tautología es una contradicción.

**EJEMPLO 2.**  $p \vee \sim p$  es una tautología y  $p \wedge \sim p$  es una contradicción. En efecto

$p$	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
V	F	V

$p$	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
V	F	F

A las tautologías también se les llama **leyes de las lógicas**. Ellas juegan un papel fundamental en el cálculo proposicional. A la tautología del ejemplo 2 se la conoce con el nombre de la **ley del tercio excluido**.

**DEFINICION.** Sea  $A$  y  $B$  dos formas proposicionales. Diremos que  $A$  es **lógicamente equivalente a  $B$** , y escribiremos

$$A \leftrightarrow B \text{ ó } A \equiv B$$

si la forma bicondicional  $A \leftrightarrow B$  es una tautología.

### ALGUNAS EQUIVALENCIAS NOTABLE

- 1. Ley del condicional:  $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
- 2. Ley del contrarrecíproco:  $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$
- 3. Ley del bicondicional:  $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

## IMPLICACION LOGICA

**DEFINICION.** Sean  $A$  y  $B$  dos formas proposicionales. Diremos que  $A$  **implica lógicamente a  $B$**  o, simplemente que  $A$  **implica  $B$** , y escribiremos

$$A \Rightarrow B,$$

si el condicional  $A \rightarrow B$  es una tautología. En otros términos,  $A$  **implica  $B$**  si cada asignación de valores lógicos que hacen a  $A$  verdadera, hacen también a  $B$  verdadera.

Toda rama deductiva de la Matemática está conformada por dos tipos de proposiciones: Los **axiomas y los teoremas**. Un **axioma** es una proposición que, por convención, se admite como **verdadero**. En cambio, un **teorema** es una proposición que para ser admitido como verdadero, requiere de una **demonstración o prueba**. Existen dos tipos de teoremas. La gran mayoría de teoremas tiene la forma del condicional

**Si  $H$ , entonces  $T$ ,**

donde  $H$  es la **hipótesis** y  $T$  es la **tesis**. Este condicional es una implicación. Esto es, la hipótesis  $H$  implica lógicamente a la tesis  $T$ . simbólicamente,

$$H \Rightarrow T$$

Una demostración de un teorema es una secuencia de proposiciones que termina con la tesis, donde cada paso es una consecuencia lógica de la hipótesis, un axioma o un teorema previamente demostrado.

De acuerdo a la **ley del condicional** y a **ley del contrarrecíproco**, tenemos que

$$H \Rightarrow T \equiv \sim T \vee H \quad \text{y} \quad H \Rightarrow T \equiv \sim T \rightarrow \sim H$$

El otro tipo de teoremas tiene la forma del **bicondicional**:

**$A$  si y sólo si  $B$** , que se simboliza así:  $A \Leftrightarrow B$

De acuerdo a la ley del bicondicional, tenemos que:

El teorema  $A \Leftrightarrow B$  es **equivalente** a la conjunción los teoremas  $A \Rightarrow B$  y  $B \Rightarrow A$

Para probar  $A \Leftrightarrow B$ , debemos aportar dos demostraciones, la de  $A \Rightarrow B$  y la de  $B \Rightarrow A$ .

El teorema  $B \Rightarrow A$  es el **teorema recíproco** del teorema  $A \Rightarrow B$

## CUANTIFICADORES

Con frecuencia, con el ánimo de simplificar la escritura, usaremos los siguientes símbolos, que se llaman **cuantificadores**.

1.  $\forall$ , que significa: **para todo**.
2.  $\exists$ , que significa: **existe**.
3.  $\exists!$ , que significa: **existe y es único**

## CONJUNTOS

Un **conjunto** es una colección de objetos. Los objetos son los elementos del conjunto. Se usan letras mayúsculas,  $A, B, C, X, Y$ , etc. para denotar conjuntos y se usan letras minúsculas,  $a, b, c, x, y$ , etc., para denotar elementos.

Si  $x$  es un elemento del conjunto  $A$ , diremos que  $x$  **pertenece a  $A$**  y escribiremos:

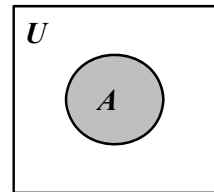
$$x \in A.$$

En cambio, si  $x$  no es un elemento de  $A$  diremos que  $x$  **no pertenece a  $A$**  y escribiremos

$$x \notin A.$$

Se llama **conjunto universal, conjunto referencial o universo del discurso**, al conjunto formado por todos los elementos que están en discusión. A éste, generalmente se lo denota con la letra  $U$ . El conjunto universal no es único. Este cambia de acuerdo al tema que tratamos. Así, si hablamos de geometría, el conjunto universal es el conjunto formado por todos los puntos. Si hablamos de letras, el conjunto universal es el conjunto formado por todas las letras del alfabeto.

Gráficamente, al conjunto universal se lo representa mediante un rectángulo. Cualquier otro conjunto  $A$  es representado por una región dentro del rectángulo.



A este tipo de gráficos, que nos ayudan a visualizar conjuntos, se los conoce con el nombre de **diagramas de Venn**, en honor del lógico inglés **John Ven** (1834-1921).

El **conjunto vacío** es el conjunto que carece de elementos y se representa por el símbolo  $\emptyset$ .

Un conjunto puede determinarse de dos manera, por **extensión** o por **comprensión**.

**1. Por extensión.** Se escriben entre llaves a los elementos del conjunto. Así, los siguientes conjuntos están determinados por extensión:

$$A = \{a, e, i, o, u\}, \quad B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

$A$  es el conjunto de las vocales.  $B$  es el conjunto de los números naturales impares. Aquí, los tres puntos suspensivos los escribimos para indicar que los elementos continúan.

**2. Por comprensión.** Se tiene un conjunto universal  $U$  y una propiedad  $P$ . El conjunto formado por los elementos de  $U$  que satisfacen la propiedad  $P$  se escribe así:

$$\{x \in U / P(x)\}$$

Cuando el conjunto universal  $U$  está sobreentendido, la expresión anterior la escribiremos simplemente así:  $\{x/ P(x)\}$

Así, si  $\mathbb{Z}$  es el conjunto de números enteros, entonces  $\{x \in \mathbb{Z} / x^2 = 4\}$  es el conjunto de números enteros que son soluciones de la ecuación  $x^2 = 4$ . Estas soluciones son  $-2$  y  $2$ . Luego,  $\{x \in \mathbb{Z} / x^2 = 4\} = \{-2, 2\}$ .

El conjunto  $A$  es un **subconjunto** del conjunto  $B$  o que  $A$  está **contenido en**  $B$ , si todo elemento de  $A$  es un elemento de  $B$ . Este resultado lo abreviamos así:

$$A \subset B.$$

Se prueba que el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto. Esto es,

$$\emptyset \subset A, \text{ para todo conjunto } A.$$

El conjunto  $A$  es igual al conjunto  $B$ , y escribiremos  $A = B$ , si y solo si  $A \subset B$  y  $B \subset A$ . En otros términos,  $A = B$  si y sólo si  $A$  y  $B$  tienen los mismos elementos.

## INTERSECCION, UNION Y DIFERENCIA DE CONJUNTOS

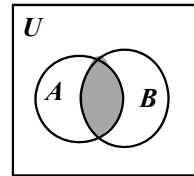
**DEFINICION.** Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos.

1. La **intersección de  $A$  y  $B$**  es el conjunto

$$A \cap B$$

formado por los elementos de  $A$  y de  $B$ .  
Simbólicamente,

$$A \cap B = \{x/ x \in A \wedge x \in B\}$$

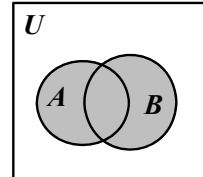


2. La **unión de  $A$  y  $B$**  es el conjunto

$$A \cup B$$

formado por los elementos de  $A$  o de  $B$ .  
Simbólicamente,

$$A \cup B = \{x/ x \in A \vee x \in B\}$$

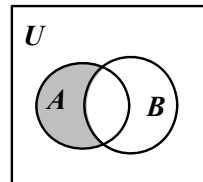


3. La **diferencia de  $A$  y  $B$**  es el conjunto

$$A - B$$

formado por los elementos de  $A$  que no están en  $B$ .  
Simbólicamente,

$$A - B = \{x/ x \in A \wedge x \notin B\}$$

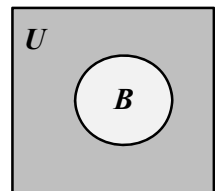


4. El **complemento de  $B$**  es el conjunto

$$\complement B = U - B$$

formado por los elementos de conjunto universal  $U$  que no están en  $B$ .  
Simbólicamente,

$$\complement B = \{x \in U \wedge x \notin B\}$$



**EJEMPLO 1.** Si  $A = \{a, b, c, d\}$  y  $B = \{c, d, e, f\}$ , entonces  
 $A \cap B = \{c, d\}$  y  $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$

**EJEMPLO 2.** Si  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ ,  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y  $B = \{2, 4, 6\}$ ,  
 entonces  
 $A - B = \{1, 3, 5\}$  y  $\complement B = \{1, 3, 5, 8\}$ ,

## PRODUCTO CARTESIANO

Tomemos dos elementos,  $a$  y  $b$ . Con estos elementos formamos el conjunto  $\{a, b\}$ , el cual es igual conjunto  $\{b, a\}$ , ya en los conjuntos no interesa el orden en que aparecen los elementos. Si queremos que el **orden** sea relevante, formamos el **par ordenado**  $(a, b)$  conformado por  $a$  como primer y por  $b$  es segundo elemento. En el par ordenado  $(b, a)$ ,  $b$  es el primer elemento y  $a$  es segundo elemento. O sea,  $(a, b) \neq (b, a)$ , a menos que  $a = b$ . Luego, establecemos la igualdad de pares ordenados del modo siguiente:

$$(a, b) = (c, d) \text{ si y sólo si } a = b \wedge c = d$$

**DEFINICION.** El **producto cartesiano de los conjuntos**  $A$  y  $B$  es el conjunto

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$$

Escribiremos  $A^2$  para denotar a  $A \times A$ . Esto es,

$$A^2 = A \times A.$$

**EJEMPLO 3.** Si  $A = \{a, b, c\}$  y  $B = \{1, 2\}$ , entonces

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\},$$

## ALGUNAS LEYES DEL ALGEBRA DE CONJUNTOS

### Leyes Distributivas

$$1a. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad 1b. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

### Leyes de Complementación

$$2a. A \cup \complement A = U \qquad 2b. A \cap \complement A = \emptyset$$

$$2c. \complement(\complement A) = A \qquad 2d. \complement U = \emptyset, \complement \emptyset = U$$

### Leyes de De Morgan

$$3a. \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B \qquad 3b. \complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 1.1

1. Si  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $A = \{x \in U / x \text{ es par}\}$ ,  $B = \{x \in U / x \text{ es primo}\}$  y  $D = \{x \in U / x \text{ no es divisor de } 9\}$ , hallar:
- a.  $\complement(A \cup B)$     b.  $A - \complement D$     c.  $B - \complement D$     d.  $(A - B) \cup (B - A)$
2. Si  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , hallar conjuntos  $A$  y  $B$  tales que:
- a.  $A - B = \{7, 9\}$     b.  $\complement A \cap \complement B = \{6\}$     c.  $A \cap B = \{0, 5, 8\}$
3. Si  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , hallar conjuntos  $A$  y  $B$  tales que:
- a.  $(A - B) \cup (B - A) = \{0, 1, 5, 8\}$     b.  $\complement A \cup \complement B = \{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8\}$
- c.  $A \cap \complement B = \{0, 8\}$
4. Hallar los conjuntos  $A, B, C$  y  $U$ , el conjunto universal, sabiendo que:
- a.  $\complement A = \{1, 4, 7, 8, 9\}$     b.  $\complement B = \{2, 4, 5, 7\}$
- c.  $\complement C = \{2, 4, 7, 8\}$     d.  $A \cap B \cap C = \{0, 3, 6\}$

### SECCION 1.2

## EL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES

### EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES Y LA RECTA NUMERICA

El primer conjunto de números que aparece en el desarrollo de la civilización es el conjunto de números naturales:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Años más tarde, gracias al trabajo de los babilonios, aproximadamente hace 4000 años, aparece el conjunto de los **números enteros**:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

La escogencia de la letra  $\mathbb{Z}$  utilizada para designar este conjunto está inspirada en la palabra alemana “Zahlen” que significa números.

Un subconjunto notable de  $\mathbb{Z}$  es el conjunto  $\mathbb{N}$ .

Otra clase importante de números son los **números racionales**, a los que se les conoce comúnmente con el nombre de **números fraccionarios**. Un número racional es un cociente de dos números enteros, donde el denominador es distinto de 0. Así, son números racionales los siguientes:

$$\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{5}{-2}, \text{ etc.}$$

Todo número entero es un número racional de denominador 1. Así,

$$2 = \frac{2}{1}, \quad -5 = \frac{-5}{1}.$$

Al conjunto de los números racionales se lo denota con la letra  $\mathbb{Q}$ . Esto es

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

Todos sabemos expresar un número mediante su expresión decimal. Así

$$\text{a. } \frac{1}{2} = 0.500 \dots \quad \text{b. } \frac{1}{3} = 0.333 \dots \quad \text{c. } \frac{11}{6} = 1.8333 \dots$$

Observen la periodicidad de estas expresiones decimales.

El siguiente resultado caracteriza a los números racionales:

**Un número es racional si, y sólo si su expresión decimal es periódica.**

Los números naturales, enteros y racionales aparecieron de una manera natural en el desarrollo de las civilizaciones antiguas. El siguiente paso, el descubrimiento de los números irracionales, fue dado en la Grecia Antigua a mediados del siglo V antes de Cristo, por los pitagóricos. Este descubrimiento fue un acontecimiento trascendental. Se cuenta que este descubrimiento también tuvo sabor a tragedia. La leyenda dice que a su descubridor, **Hipaso de Metaponto**, le costó la vida.

Un **número irracional** es un número que tiene una expresión decimal no periódica. Como ejemplos de números irracionales tenemos a:

$\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt[3]{2}$ , el famoso número  $\pi$  y el no menos famoso número  $e$ , base de los logaritmos naturales. Algunas cifras de sus expresiones decimales son:

$$\sqrt{2} = 1.41415 \dots \quad \pi = 3.14159 \dots \quad e = 2.7182818284 \dots$$

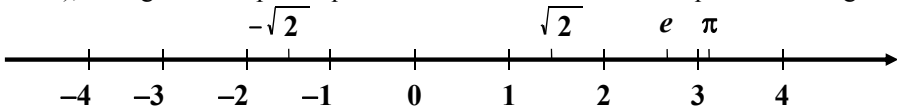
Denotaremos con  $\mathbb{I}$  al conjunto de los números irracionales.

El conjunto  $\mathbb{R}$  de los números reales es la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales. Esto es,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Una representación geométrica de los números reales se obtiene identificando a cada uno de éstos con un punto de una recta fija, la cual orientamos eligiendo una dirección positiva (a la derecha), que indicamos mediante una flecha. Fijamos un punto de la recta al que le damos el nombre de **origen**, y le asignamos el entero  $0$ . Elegimos una unidad de longitud y, mediante ésta, localizamos el punto que está a la

derecha del origen a una distancia igual a la unidad escogida. A este punto le asignamos el entero 1. El punto que está a la izquierda del origen a una distancia igual a la unidad, le asignamos el entero  $-1$ . Si  $x$  es un real positivo, le asignamos el punto que está a una distancia  $x$  a la derecha del origen. Si  $x$  es negativo ( $-x$  es positivo), le asignamos el punto que está a una distancia  $-x$  a la izquierda del origen.



Postulamos, ahora, la siguiente afirmación fundamental:

**La correspondencia establecida entre los números reales y los puntos de la recta es una correspondencia biunívoca. Es decir, a cada número real le corresponde un único punto y a cada punto le corresponde un único número real.**

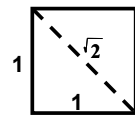
A la recta, provista de esta correspondencia, la llamaremos **recta real** o **recta numérica**. Se llama **coordenada** de un punto al número real que le asigna esta correspondencia. Por razones de comodidad, muchas veces identificaremos a cada punto de la recta numérica con su coordenada. Así, por ejemplo, diremos "el punto 2" para indicar al punto que le corresponde el número 2.

En la recta numérica,  $a < b$  si  $a$  está a la **izquierda** de  $b$  y  $b > a$  si  $b$  está a la **derecha** de  $a$ .

### ¿SABIAS QUE . . .

**HIPASO DE METAPONTO** fue uno de los primeros discípulos de Pitágoras en Crotona (sur de Italia). Vivió alrededor de año 500 A. C. Hipaso fue quien descubrió la existencia de los números irracionales. Descubrió que la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 es  $\sqrt{2}$ , el cual no es un número racional. ¡Sorpresa!. Los pitagóricos pregonaban que los números naturales y sus cocientes, los números racionales positivos, eran la esencia del universo. La existencia de  $\sqrt{2}$  contradice esta creencia.

Hipaso divulgó su descubrimiento, ignorando el juramento de silencio instituida por la escuela pitagórica. Se cuenta que los pitagóricos estaban navegando en alta mar cuando se enteraron de este hecho. Reaccionaron con furia. Se sintieron traicionados. Para castigar la supuesta traición, ahogaron a Hipaso lanzándolo al mar.



## EL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES

En los párrafos anteriores hemos tratado de ver como el conjunto de los números reales se pueden obtener a partir de los números naturales, enteros y racionales. Podríamos continuar con esta estrategia y definir las operaciones de adición y multiplicación de números reales a partir de las correspondientes operaciones definidas para los números racionales. Este sería un camino largo y alejado de nuestro propósito. Cambiamos de táctica, adoptando el **método axiomático**. Para esto, decidimos olvidar todo lo que conocemos sobre los reales y establecemos un número pequeño de proposiciones, las cuales convenimos en aceptarlas como verdaderas, sin el requisito de una **demostración**. Estas proposiciones se llaman **axiomas o postulados**. A partir de estos axiomas reconstruiremos el sistema de los números reales.

Consideramos un conjunto  $\mathbb{R}$ , a cuyos elementos los llamamos números reales. Suponemos que este conjunto está provisto de dos operaciones, **adición (+)** y **multiplicación ( $\cdot$ )** y de una relación de orden, denotada por “ $<$ ” que se lee “**es menor que**”. Los axiomas que caracterizan la estructura de los números reales son trece y los divididos en tres grupos. **Axiomas de cuerpo o campo**, **axiomas de orden** y el **axioma del supremo** o **axioma de completitud**. A cada uno de estos tres grupos los presentaremos separadamente. En este capítulo presentaremos los dos primeros grupos. El axioma del supremo esperará hasta el siguiente curso.

El **sistema de números reales** es el conjunto  $\mathbb{R}$  provisto de la operación adición, la operación multiplicación y la relación de orden “ $<$ ”, las cuales satisfacen los trece axiomas que especificaremos. Para enfatizar que el sistema de números reales esta conformado por el conjunto  $\mathbb{R}$ , las operaciones  $+$ ,  $\cdot$  y la relación  $<$ , se lo denota así:  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ .

### AXIOMAS DE CUERPO O CAMPO

Los axiomas de cuerpo o campo establecen las propiedades de la adición y de la multiplicación. Estos son nueve, cuatro de la adición, cuatro de la multiplicación y el axioma distributivo, que relaciona las dos operaciones.

#### AXIOMAS DE LA ADICION

**A<sub>1</sub>. Ley conmutativa de la adición.**

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$$

**A<sub>2</sub>. Ley asociativa de la adición.**

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a + (b + c) = (a + b) + c$$

**A<sub>3</sub>. Existencia y unicidad del elemento neutro de la adición.**

Existe un único elemento de  $\mathbb{R}$ , al que llamaremos **cero** y denotaremos con **0**, tal que, para todo  $a$  en  $\mathbb{R}$ ,

$$a + 0 = a = 0 + a.$$

Simbólicamente:

$$\exists! 0 \in \mathbb{R}, \text{ tal que } \forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = a = 0 + a.$$

**A<sub>4</sub>. Existencia y unicidad del Inverso Aditivo.**

Para cada  $a$  en  $\mathbb{R}$ , existe un único elemento de  $\mathbb{R}$ , al que denotaremos con  $-a$ , tal que

$$a + (-a) = 0 = -a + a$$

Simbólicamente:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists! -a \in \mathbb{R} \text{ tal que } a + (-a) = 0 = -a + a$$

El número  $-a$  es denominado **el inverso aditivo de  $a$** .

**SUSTRACCION O RESTA DE NUMEROS REALES****DEFINICION.** **Diferencia.**

Dados dos números reales  $a$  y  $b$ , se llama **diferencia** de  $a$  y  $b$  al número real que es la suma de  $a$  con el inverso aditivo de  $b$ . Esto es,

$$a - b = a + (-b)$$

**La sustracción o resta** es la operación que hace corresponder a cada par de números reales  $(a, b)$  su diferencia  $a - b$ .

**AXIOMAS DE LA MULTIPLICACION****M<sub>1</sub>. Ley conmutativa de la multiplicación.**

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad ab = ba$$

**M<sub>2</sub>. Ley asociativa de la multiplicación.**

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a(bc) = (ab)c$$

**M<sub>3</sub>. Existencia y unicidad del elemento neutro de la multiplicación**

Existe un único elemento de  $\mathbb{R}$ , distinto de 0, al que llamaremos **uno** y lo denotaremos con **1**, tal que, para todo  $a$  en  $\mathbb{R}$ ,

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

Simbólicamente:

$$\exists! 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0, \text{ tal que } \forall a \in \mathbb{R}, \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

**M<sub>4</sub>. Existencia y unicidad del Inverso Multiplicativo.**

Para cada  $a$  en  $\mathbb{R}$  distinto de 0, existe un único elemento de  $\mathbb{R}$ , al que denotaremos con  $a^{-1}$ , tal que

$$a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$$

Simbólicamente:

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, \exists a^{-1} \in \mathbb{R} \text{ tal que } a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$$

El número  $a^{-1}$  es denominado **el inverso multiplicativo de  $a$  o recíproco de  $a$**  y también se lo denota por  $\frac{1}{a}$ . Esto es,  $a^{-1} = \frac{1}{a}$ .

### DIVISION DE NUMEROS REALES

**DEFINICION.** **Cociente.**

Dados dos números reales  $a$  y  $b$ , siendo  $b \neq 0$ , se llama **cociente de  $a$  entre  $b$**  al número real que es el producto de  $a$  con el inverso multiplicativo de  $b$ . Esto es,

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} = a \cdot \frac{1}{b}$$

**La división** es la operación que hace corresponder a cada par de números reales  $(a, b)$ , donde  $b \neq 0$ , su cociente  $\frac{a}{b}$ .

Al cociente  $\frac{a}{b}$  lo llamaremos también **la fracción de  $a$  sobre  $b$** . El número  $a$  es el **numerador** y  $b$  es el **denominador** de la fracción.

### AXIOMA DISTRIBUTIVO

**D. Ley distributiva.**

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a(b + c) = ab + ac, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

**OBSERVACION.** En el Algebra Moderna, un **cuerpo** o **campo** es un conjunto provisto de dos operaciones las cuales satisfacen los nueve axiomas establecidos anteriormente para los números reales. Existen abundantes cuerpos. Los más conocidos son  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$ . El último, con sus operaciones de adición y multiplicación correspondientes. es el campo de los números complejos.

A continuación presentamos algunos teoremas, que son implicados por los nueve axiomas de cuerpo.

**TEOREMA 1.1.**  $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0, \forall a \in \mathbb{R}.$

**Demostración**

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && (A_3) \\ &= a \cdot 0 + (a + (-a)) && (A_4) \\ &= (a \cdot 0 + a) + (-a) && (A_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) && (M_3) \\
 &= a(0 + 1) + (-a) && (D) \\
 &= a \cdot 1 + (-a) && (A_3) \\
 &= a + (-a) && (M_3) \\
 &= 0 && (A_4)
 \end{aligned}$$

Por otro lado, por  $M_1$ ,  $0 \cdot a = a \cdot 0$  y como  $a \cdot 0 = 0$ , entonces también  $0 \cdot a = 0$

---

**TEOREMA 1.2.**  $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

### Demostración

Como tenemos un bicondicional, debemos hacer dos demostraciones:

1.  $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ , la que simbolizaremos por  $(\Rightarrow)$

2.  $a = 0 \vee b = 0 \Rightarrow ab = 0$ , la que simbolizaremos por  $(\Leftarrow)$

Bien,

$(\Rightarrow)$ : Supongamos que  $a \neq 0$ . En es caso, por  $M_4$ , existe  $a^{-1}$ . Ahora, multiplicado  $ab = 0$  por  $a^{-1}$ , tenemos:

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}0 \Rightarrow (a^{-1}a)b = 0 \quad (M_2 \text{ y Teor. 1.1})$$

$$\Rightarrow (1)b = 0 \quad (M_4)$$

$$\Rightarrow b = 0 \quad (M_3)$$

$(\Leftarrow)$ . Sigue del teorema 1.1.

---

**EJEMPLO 1.** Resolver la ecuación  $(x - 2)(x + 3) = 0$

### Solución

Aplicando el teorema anterior, tenemos:

$$(x - 2)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \vee x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3$$


---

**TEOREMA 1.3.** **Propiedades del Inverso Aditivo.**

Para todo  $a$  y  $b$  en  $\mathbb{R}$  se cumple que:

- |                            |                        |
|----------------------------|------------------------|
| 1. $-(-a) = a$             | 2. $(-1)a = -a$        |
| 3. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ | 4. $(-a)(-b) = ab$     |
| 5. $-(a + b) = -a - b$     | 6. $-(a - b) = -a + b$ |

### Demostración

1. Por el axioma  $A_4$  tenemos que:

$$-(-a) + (-a) = 0 \quad \wedge \quad a + (-a) = 0$$

Estos resultados nos dicen que tanto  $-(-a)$  y como  $a$  son inversos aditivos de  $-a$ . Pero,  $A_4$  dice que el inverso aditivo es único. Luego,  $-(-a) = a$ .

2. Veamos que  $(-1)a$  es el inverso aditivo de  $a$ :

$$a + (-1)a = 1 \cdot a + (-1)a \quad (M_3)$$

$$= (1 + (-1))a \quad (D)$$

$$= 0 \cdot a \quad (A_4)$$

$$= 0 \quad (\text{Teo. 1.1})$$

Pero,  $(-a) + a = 0$ . Luego, por unicidad del inverso aditivo,  $(-1)a = -a$ .

3.  $(-a)b = ((-1)a)b$  (parte 2 anterior)

$$= (-1)(ab) \quad (M_2)$$

$$= -(ab) \quad (\text{parte 2 anterior})$$

En forma similar se prueba que  $a(-b) = -(ab)$ .

4. Aplicando dos veces la parte 3 y luego la parte 1, tenemos:

$$(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab$$

5.  $-(a + b)$  es el inverso aditivo de  $(a + b)$

Pero,  $-a - b$  también es el inverso aditivo de  $(a + b)$ . En efecto:

$$(a + b) + (-a - b) = (a + b) + (-a + (-b)) \quad (\text{Def. de diferencia})$$

$$= (a + (-a)) + (b + (-b)) \quad (A_2 \text{ y } A_1)$$

$$= 0 + 0 = 0 \quad (A_4 \text{ y } A_3)$$

Luego, por unicidad del inverso aditivo de  $(a + b)$ , tenemos  $-(a + b) = -a - b$ .

6.  $-(a - b) = -a + b$ . Similar a 5.

**EJEMPLO 2.** Haciendo uso del teorema anterior, simplificar:

1.  $(-2)(-3)(-6)$     2.  $-(a + b - 3)$     3.  $(-5)[3x + (-2)]$

**Solución**

1.  $(-2)(-3)(-6) = (-2)[(-3)(-6)]$  (ley asociativa)

$$= (-2)[3 \cdot 6] = (-2)[18] \quad (\text{por 4})$$

$$= -[2 \cdot 18] \quad (\text{por 3})$$

$$= -36$$

2.  $-(a + b - 3) = -a - b - (-3)$  (por 5)  
 $= -a - b + 3$  (por 1)
3.  $(-5)[3x + (-2)] = (-5)(3x) + (-5)(-2)$  (ley distributiva)  
 $= -(5(3x)) + 5 \cdot 2$  (por 3 y 4)  
 $= -((5 \cdot 3)x) + 10$  (ley asociativa)  
 $= -15x + 10$
- 

**TEOREMA 1.4.** Propiedades del Inverso Multiplicativo.

Para todo  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$  en  $\mathbb{R}$  se cumple que:

$$1. (a^{-1})^{-1} = a \qquad 2. (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

**Demostración**

1. Por el axioma  $M_4$  tenemos que:

$$(a^{-1})(a^{-1})^{-1} = 1 \quad \text{y} \quad (a^{-1})a = 1.$$

Estos dos resultados nos dicen que  $(a^{-1})^{-1}$  y  $a$  son inversos multiplicativos de  $a^{-1}$ . Pero,  $M_4$  dice que el inverso multiplicativo es único. Luego,  $(a^{-1})^{-1} = a$ .

2. Por el axioma  $M_4$  tenemos que:

$$(ab)(ab)^{-1} = 1$$

Por otro lado,

$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = a(ba^{-1})b^{-1} \qquad (M_2)$$

$$= a(a^{-1}b)b^{-1} \qquad (M_1)$$

$$= (aa^{-1})(bb^{-1}) \qquad (M_2)$$

$$= (1)(1) \qquad (M_4)$$

$$= 1 \qquad (M_3)$$

En consecuencia, por la unicidad del inverso multiplicativo,  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ .

---

**TEOREMA 1.5.** Propiedades de las Fracciones.

Sean  $a, b, c,$  y  $d$  números reales cualesquiera y tales que  $b \neq 0$  y  $d \neq 0$ , entonces

1.  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$  Para multiplicar fracciones, multiplicar numeradores y denominadores
2.  $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$  Para dividir fracciones, invierta el divisor y multiplique.
3.  $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$  Para sumar fracciones que tienen el mismo denominador, sumar los numeradores.
4.  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ . Para sumar fracciones que tienen distintos denominadores, hallar un denominador común y sumar los numeradores
5.  $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ ,  $c \neq 0$  Simplificación.
6.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$  Si dos fracciones son iguales, los productos cruzados son iguales.
7.  $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$  En una fracción se puede cambiar 2 de los tres signos sin alterar la fracción

**Demostración**

La demostraciones de 1, 2, 3, y 4 las presentamos en el problema resuelto 2. Las demostraciones de las otras propiedades las dejamos a cargo del lector (problema propuesto 53).

**EJEMPLO 3.** Teniendo en cuenta el teorema anterior, efectuar las operaciones indicadas y simplificar

$$1. \frac{6}{5} \cdot \frac{-35}{36}$$

$$2. \frac{-9}{10} \div \frac{-3}{5}$$

**Solución**

$$\begin{aligned}
 1. \frac{6}{5} \cdot \frac{-35}{36} &= \frac{6(-35)}{5 \times 36} = \frac{-6(35)}{5 \times 36} && \text{(por 1)} \\
 &= \frac{-2 \times 3 \times 5 \times 7}{5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3} && \text{(factorizando)} \\
 &= \frac{-7}{2 \times 3} = \frac{-7}{6} = -\frac{7}{6} && \text{(cancelando y aplicando 7)}
 \end{aligned}$$

$$2. \frac{-9}{10} \div \frac{-3}{5} = \frac{-9}{10} \cdot \frac{-5}{3} = \frac{(-9)(-5)}{10 \times 3} = \frac{(9)(5)}{10 \times 3} \quad \text{(por 2 y por 1)}$$

$$= \frac{3 \times 3 \times 5}{2 \times 5 \times 3} = \frac{3}{2} \quad (\text{factorizando y cancelando})$$


---

## EXPONENTES ENTEROS

### **DEFINICION.** Exponente entero positivo.

Si  $a$  es un número real y  $n$  un entero positivo, se llama **potencia de grado  $n$  de  $a$**  al número:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El número  $a$  es la **base** y el número  $n$  es el **exponente**.

### **EJEMPLO 4.**

$$\begin{aligned} 1. \quad 3^1 &= 3 & 2. \quad 5^4 &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625 \\ 3. \quad (-2)^2 &= (-2)(-2) = 4 & 4. \quad (-4)^3 &= (-4)(-4)(-4) = -64 \\ 5. \quad \left(-\frac{2}{5}\right)^3 &= \left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{(-2)(-2)(-2)}{5 \times 5 \times 5} = \frac{-8}{125} = -\frac{8}{125} \end{aligned}$$


---

### **DEFINICION.** Exponente cero y exponente negativo.

Si  $a \neq 0$  es un número real y  $n$  un entero positivo, entonces

$$a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Observar que hemos evitado establecer que  $0^0 = 1$ . De haberlo hecho, habiéremos incurrido en una inconsistencia. Ver el problema resuelto 4.

### **EJEMPLO 5.**

$$\begin{aligned} 1. \quad 3^0 &= 1 & 2. \quad \left(-\frac{2}{5}\right)^0 &= 1 \\ 3. \quad 5^{-3} &= \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} & 3. \quad (-5)^{-3} &= \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125} \\ 4. \quad 3x^{-2} &= 3\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{x^2} \\ 5. \quad (3x)^{-2} &= \frac{1}{(3x)^2} = \frac{1}{(3x)(3x)} = \frac{1}{9x^2} \end{aligned}$$


---

### **TEOREMA 1.6** Leyes de los exponentes.

Si  $a$  y  $b$  son números reales y  $m$  y  $n$  números enteros, entonces

1.  $a^n a^m = a^{n+m}$
2.  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3.  $(a^n)^m = a^{nm}$
4.  $(ab)^n = a^n b^n$
5.  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
6.  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, a \neq 0 \text{ y } b \neq 0$

**Demostración**

Ver el problema resuelto 3, 4 y el problema propuesto 54.

**EJEMPLO 6.**

1.  $(-2)^3(-2)^4 = (-2)^{3+4} = (-2)^7 = -128$  (ley 1)
2.  $\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2 = 9$  (ley 2)
3.  $(4^{-3})^{-1} = 4^{(-3)(-1)} = 4^3 = 64$  (ley 3)
4.  $((-2)x^2)^4 = (-2)^4(x^2)^4 = 16x^{2 \times 4} = 16x^8$  (leyes 4 y 3)
5.  $\left(\frac{2x^3}{y^2z}\right)^4 = \frac{(2x^3)^4}{(y^2z)^4} = \frac{2^4 x^{3 \times 4}}{y^{2 \times 4} z^4} = \frac{16x^{12}}{y^8 z^4}$  (leyes 5, 3 y 4)
6.  $\left(\frac{-2x}{z^2}\right)^{-3} = \left(\frac{z^2}{-2x}\right)^3 = \frac{(z^2)^3}{(-2x)^3} = \frac{z^{2 \times 3}}{(-2)^3 x^3} = \frac{z^6}{-8x^3} = -\frac{z^6}{8x^3}$  (leyes 6, 3 y 4)

**EJEMPLO 7.** Simplificar  $\left(\frac{4}{5b^3}\right)\left(\frac{2}{b}\right)^{-3}$

**Solución**

Aplicando la ley 6, tenemos:

$$\left(\frac{4}{5b^3}\right)\left(\frac{2}{b}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{5b^3}\right)\left(\frac{b}{2}\right)^3 = \left(\frac{4}{5b^3}\right)\left(\frac{b^3}{2^3}\right) = \frac{4b^3}{5(2)^3b^3} = \frac{1}{5(2)} = \frac{1}{10}$$

**EJEMPLO 8.** Expresar con exponentes positivos y simplificar:

$$\frac{12x^4y^{-5}}{-3x^{-2}y^3}$$

**Solución**

$$\frac{12x^4y^{-5}}{-3x^{-2}y^3} = \frac{12x^4x^2}{-3y^3y^5} = \frac{12x^{4+2}}{-3y^{3+5}} = \frac{12x^6}{-3y^8} = -4\frac{x^6}{y^8} \quad (\text{leyes 7 y 1})$$

### NOTACION CIENTIFICA

Con frecuencia, en las diferentes ciencias aparecen números muy grandes o muy pequeños. Para simplificar la escritura de estos números se usan exponentes.

Un número  $x$  está escrito en **notación científica** si  $x$  es expresado del modo siguiente:

$$x = a \times 10^n, \quad \text{donde } 1 \leq a < 10 \text{ y } n \text{ es un entero.}$$

**EJEMPLO 9.** Expresar los siguientes números en notación científica.

a. 534,000,000                      b. 0.0000672

**Solución**

a.  $\underbrace{534,000,000}_{\substack{8 \text{ lugares} \\ \text{a la izquierda}}} = 5.34 \times 10^8$                       b.  $0.\underbrace{00000672}_{\substack{7 \text{ lugares a} \\ \text{la derecha}}} = 6.72 \times 10^{-7}$

Observar que el exponente  $n$  en  $10^n$  indica el número de cifras que hay que correr la coma decimal. Si se corre a la izquierda,  $n$  es positivo. Si se corre a la derecha,  $n$  es negativo.

**EJEMPLO 10.** La estrella más próxima a nuestro sistema es la llamada **alfa del Centauro**. Esta se encuentra a una distancia de 4.22 años-luz. Un años-luz es la distancia que recorre la luz en un año y este es igual a  $5.88 \times 10^{12}$  millas. Hallar la distancia en millas y expresarla en notación científica.

**Solución**

La distancia  $d$  a la estrella en millas es:

$$d = 4.22 \times 5.88 \times 12^{12} = 24.8126 \times 12^{12} \text{ millas} = 2.48126 \times 12^{13} \text{ millas.}$$

### ¿CUAL ES EL NUMERO MAS GRANDE QUE PUEDE IMAGINAR?

*Edgard Kasner, matemático americano graduado de la Universidad de Columbia, estaba interesado en explicar la diferencia entre números inmensamente grandes y el infinito. Corría el año 1938 cuando escribió el número que comienza con 1 y le siguen 100 ceros. En nuestra notación científica,  $10^{100}$ . Luego se preguntó ¿qué nombre le pongo? Por ahí cerca jugaba su sobrino de 9 años, Milton Sirota. ¡Chamoj, le dijo. ¿Qué nombre le pongo a este número?. Milton, inspirado en una comiquita de aquella época, respondió en voz alta:*

**¡GOOGOL!**

Y así quedó bautizado este número.

Pero, ¿que tan grande es un googol?. Invocamos al **Hombre que Calculaba**, para que calcule el número de hojas que tienen todos los árboles del mundo o el número de granitos de arena que hay en todas las playas de la tierra. Estos números son menores que un googol. En efecto, este par de números son muy menores que el número de átomo que existe en el universo. Se calcula que este último número es  $10^{80}$ , que es menor que un googol.

Otros matemáticos, no satisfechos con la inmensidad del googol, crearon el **googolplex**, que es un 1 seguido de googol de ceros, o sea,

$$\text{Un googolplex} = 10^{10^{100}}$$

Si se tratara escribir el googolplex de la manera usual escribiendo 1 y sus correspondientes ceros en hojas de papel, no habría suficiente papel para esta tarea. Aún más, en el supuesto que sí existiera, esta cantidad de papel no cabría en el universo.

Se cuenta que **Larry Page** y **Sergey Brin**, creadores del famoso motor de búsqueda **Google**, mientras eran estudiantes graduados de la Universidad de Stamford, se reunieron en septiembre de 1997, para darle nombre a su buscador de la web, recientemente creado. En primera instancia, decidieron llamarlo **googol**, pero se quedaron con el nombre de google debido a que la persona encargada de tomar notas cometió el error de escribir Google en lugar de Googol.

Pero, ¿qué tan cerca están estos grandes números del infinito? Para sorpresa de muchos, estos están tan apartados del infinito como lo está el 1. Para mayor sorpresa, no sólo existe un infinito, sino que hay infinitos infinitos, siendo unos mayores que otros. El menor de ellos es que corresponde al número (cardinal) de elementos que tiene conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales. El siguiente infinito, inmediatamente mayor que el anterior, es el infinito que corresponde al número de elementos que tiene el conjunto  $\mathbb{R}$  de los números reales. Estas sorprendentes ideas sobre el infinito, fueron creaciones del matemático alemán Georg Cantor (1845–1918).

**PROBLEMAS RESUELTOS 1.2**

**PROBLEMA 1.** Escribir con exponentes positivos y simplificar las expresiones.

a.  $\left(\frac{9^{-1}a^{-2}b^{-8}c^{-12}}{3^{-2}ab^{-5}c^{-10}}\right)^{-3}$     b.  $(a^{-1} - b^{-1})^{-2}$     c.  $\left(\frac{y}{2x^{-3}}\right) \div \left(\frac{3}{x} \div \frac{2}{y^3}\right)$

**Solución**

a.  $\left(\frac{9^{-1}a^{-2}b^{-8}c^{-12}}{3^{-2}ab^{-5}c^{-10}}\right)^{-3} = \left(\frac{3^2b^5c^{10}}{9a^2b^8c^{12}}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{9a^3b^3c^2}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{a^3b^3c^2}\right)^{-3}$

$$= (a^3 b^3 c^2)^3 = a^9 b^9 c^6$$

$$\text{b. } (a^{-1} - b^{-1})^{-2} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{-2} = \left(\frac{b-a}{ab}\right)^{-2} = \left(\frac{ab}{b-a}\right)^2 = \frac{a^2 b^2}{(b-a)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \left(\frac{y}{2x^{-3}}\right) \div \left(\frac{3}{x} \div \frac{2}{y^3}\right) &= \left(\frac{x^3 y}{2}\right) \div \left(\frac{3}{x} \times \frac{y^3}{2}\right) = \left(\frac{x^3 y}{2}\right) \div \left(\frac{3y^3}{2x}\right) \\ &= \left(\frac{x^3 y}{2}\right) \left(\frac{2x}{3y^3}\right) = \frac{2x^4 y}{6y^3} = \frac{x^4}{3y^2} \end{aligned}$$

**PROBLEMA 2.** Probar las propiedades 1, 2, 3, y 4 del teorema 1.5:

Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$  y  $d \neq 0$ . Entonces

$$1. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$2. \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$3. \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$4. \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

**Solución**

$$\begin{aligned} 1. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= (ab^{-1})(cd^{-1}) && \text{(definición de cociente)} \\ &= (ac)(b^{-1}d^{-1}) && \text{(M}_2 \text{ y M}_1\text{)} \\ &= (ac)(bd)^{-1} && \text{(Teor 1.4, parte 2)} \\ &= \frac{ac}{bd} && \text{(definición de cociente)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \div (cd^{-1}) = \frac{a}{b} (cd^{-1})^{-1} && \text{(definición de cociente)} \\ &= \frac{a}{b} (c^{-1} (d^{-1})^{-1}) && \text{(Teor 1.4, parte 2)} \\ &= \frac{a}{b} (dc^{-1}) && \text{(Teor 1.4, parte 1 y M}_1\text{)} \\ &= \frac{a}{b} \left(\frac{d}{c}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} && \text{(definición de cociente)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \frac{a}{b} + \frac{c}{b} &= (ab^{-1}) + (cb^{-1}) = (a+c)b^{-1} && \text{(definición de cociente y D)} \\ &= \frac{a+c}{b} && \text{(definición de cociente)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= (ab^{-1}) + (cd^{-1}) && \text{(definición de cociente)} \\
 &= (ab^{-1})(1) + (cd^{-1})(1) && (M_3) \\
 &= (ab^{-1})(dd^{-1}) + (cd^{-1})(bb^{-1}) && (M_4) \\
 &= (ad)(b^{-1}d^{-1}) + (bc)(b^{-1}d^{-1}) && (M_2 \text{ y } M_1) \\
 &= (ad)(bd)^{-1} + (cb)(bd)^{-1} && \text{(Teor. 1.4 parte 2)} \\
 &= \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd} && \text{(parte 3 anterior)}
 \end{aligned}$$


---

**PROBLEMA 3.** Probar las siguientes leyes de los exponentes.

Si  $a$  y  $b$  son números reales,  $b \neq 0$ , y  $m$  y  $n$  enteros, entonces

$$1. \quad a^n a^m = a^{n+m} \qquad 2. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

**Solución**

**1. Caso 1.**  $n > 0$  y  $m > 0$ :

$$a^n a^m = \underbrace{a \ a \ \dots \ a}_n \underbrace{a \ a \ \dots \ a}_m = \underbrace{a \ a \ \dots \ a}_{n+m} = a^{n+m}$$

**Caso 2.**  $n < 0$  y  $m < 0$ . Sea  $j = -n$  y  $k = -m$ , entonces  $j > 0$  y  $k > 0$ .

$$a^n a^m = a^{-j} a^{-k} = \frac{1}{a^j} \frac{1}{a^k} = \frac{1}{a^j a^k} = \frac{1}{a^{j+k}} = a^{-(j+k)} = a^{-j-k} = a^{n+m}$$

**Caso 3.**  $n = 0$

$$a^n a^m = a^0 a^m = (1)a^m = a^m = a^{0+m} = a^{n+m}$$

En los otros casos, se procede en forma similar.

**2. Caso 1.**  $n > 0$ :

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\underbrace{a \ a \ \dots \ a}_n}{\underbrace{b \ b \ \dots \ b}_n} = \underbrace{\frac{a}{b} \ \frac{a}{b} \ \dots \ \frac{a}{b}}_n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

**Caso 2.**  $n$  es negativo. Si  $k = -n$ , entonces  $k > 0$ .

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^k} = \frac{1}{\frac{a^k}{b^k}} = \frac{b^k}{a^k} = \frac{a^{-k}}{b^{-k}} = \frac{a^n}{b^n}$$

**Caso 3.  $n = 0$ :**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 \quad \text{y} \quad \frac{a^n}{b^n} = \frac{a^0}{b^0} = \frac{1}{1} = 1. \quad \text{Luego,} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$


---

**PROBLEMA 4.** Probar la siguiente ley de los exponentes:

Si  $a$  y  $b$  son números reales,  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$ , y  $n$  un número entero, entonces

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

**Solución**

**Caso 1.  $n > 0$ .** 
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

**Caso 2.  $n < 0$ .** Si  $k = -n$ , entonces  $k > 0$  y  $n = -k$ .

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k} = a^k \frac{1}{b^k} = a^{-(k)} \frac{1}{b^{-(-k)}} = \frac{1}{a^{-k}} b^{-k} = \frac{1}{a^{-k}} b^{-k} = \frac{b^n}{a^n} = \frac{b^n}{a^n}$$

**Caso 3.  $n = 0$ .**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-0} = \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1, \quad \left(\frac{b}{a}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^0 = 1. \quad \text{Luego,} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$


---

**PROBLEMA 5.** Inconsistencia.

Mostrar que si establecemos que  $0^0 = 1$ , entonces  $\left(\frac{1}{0}\right)^0 = 1$ .

**Solución**

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{1^0}{0^0} = \left(\frac{1}{0}\right)^0$$

Este resultado es inconsistente, ya que la división entre cero no está definida.

---

## PROBLEMAS PROPUESTOS 1.2

*En los problemas del 1 al 28, llevar a cabo las operaciones indicadas, dando la respuesta lo más simplificada posible.*

- |                      |                         |                          |
|----------------------|-------------------------|--------------------------|
| 1. $3(x-1) - x(x-5)$ | 2. $a[5(a-3) - 3(a+1)]$ | 3. $a^{-1}(a+3)$         |
| 4. $(2b)^{-1}(2b-8)$ | 5. $(ab)^{-1}(b-a)$     | 6. $(-2ab)^{-1}(4a-10b)$ |

$$7. \left(\frac{8}{15} \times \frac{6}{7}\right) \div \frac{4}{7}$$

$$8. \left(\frac{5a}{12} \times 3b\right) \div \frac{10ab}{4}$$

$$9. 12ab \div \left(\frac{3a}{2} \times \frac{4}{3b}\right)$$

$$10. \left(\frac{8a}{5b} \times \frac{a}{10b}\right) \div \frac{2a}{15b}$$

$$11. \frac{x}{8y} - \frac{x}{3y}$$

$$12. \frac{3}{5x^2} + \frac{1}{2x}$$

$$13. \frac{x}{a} + \frac{x}{ab}$$

$$14. 3\left(\frac{b}{3a} - \frac{2a}{b}\right) - \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

$$15. -\frac{5}{21} + 1 - \frac{3}{7}$$

$$16. 1 - \left(-\frac{3}{8} + \frac{2}{3}\right)$$

$$17. \left(\frac{1}{5} - 2\right) - \left(\frac{1}{7} - 2\right)$$

$$18. \frac{9}{10} \left(-\frac{5}{6}\right)$$

$$19. \left(-\frac{3}{4}\right) \left(-\frac{5}{27}\right) \left(-\frac{2}{25}\right)$$

$$20. (-5) \left(-\frac{1}{5}\right) \left(\frac{-3}{4} + \frac{-2}{-3}\right)$$

$$21. \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right) \div \frac{1}{15}$$

$$22. \left(4 \div \frac{8}{5}\right) - \left(\frac{9}{10} \div \frac{3}{2}\right)$$

$$23. \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{30}\right) \div \frac{23}{30}$$

$$24. \frac{1/2 - 3/4}{1/2 + 3/4}$$

$$25. \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4}\right) \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{-1}$$

$$26. \frac{4a/5 - 2a}{3a/10 - 3a}$$

$$27. \frac{1/(5a) - 1/(6a)}{1/(6b) - 1/(7b)}$$

$$28. \left[\frac{5}{9a} \div \frac{10}{3a} - \frac{1}{4}\right] \div \left[\frac{4y}{5x} - \frac{y}{2x}\right]$$

*En los problemas del 29 al 50 simplificar y expresar la respuesta con exponentes positivos.*

$$29. (2^2 \times 2^3)^2$$

$$30. \left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$$31. \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$$

$$32. 5^{-1} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$33. \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \div 3^{-3}$$

$$34. \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3$$

$$35. \left(\frac{4}{5}\right)^1 + \left(\frac{4}{5}\right)^0$$

$$36. \frac{3^{-2} \times 3^3}{2^{-3}}$$

$$37. \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$$

$$38. \frac{2^3 \times 3^{-4} \times 4^5}{2^5 \times 3^{-5} \times 4^2}$$

$$39. (5^{-2} \times 2^5) \div (2^{-2} \times 5^4)^{-2}$$

$$40. (3^{-3} a^3 b^{-2})(9a^{-4} b^{-5})$$

$$41. (5x^2y)^0(4^2x^{-2}y^{-5})$$

$$42. (4x^0)^2 \div (-2x^{-1}y^4)^{-3}$$

$$43. \left(\frac{3a^{-3}b^2}{9ab^{-1}}\right)^{-2}$$

$$44. \left(\frac{4xy^{-2}}{2x^{-1}y^2}\right)^{-3}$$

$$45. \left(\frac{5^3 m^0 n^{-2}}{4^3 m^3 n^{-5}}\right) \left(\frac{5^3 m^{-1} n}{4^2 m^2 n^{-2}}\right)^{-1}$$

$$46. (a^{-2} - b^{-2})^{-1}$$

$$47. \frac{3}{7x^{-3}} - \frac{2}{21x^{-1}}$$

$$48. \left(\frac{x}{2y}\right)^3 \div \left(\frac{4y}{x} \div \frac{2}{3y^3}\right)^{-1}$$

$$49. \left(\frac{2}{x} + 8x^{-1}\right)^{-1} \div 5^{-1}x \qquad 50. \left(\frac{3}{x^2} - 5x^{-2}\right)^{-1} \div \left(\frac{x^3}{9} + \frac{1}{6x^{-3}}\right)$$

51. Escribir los siguientes números en notación científica.

- Un año luz, la distancia que recorre la luz en un año, es aproximadamente, 9,440,000,000.000 km.
- El diámetro de un electrón: 0.0000000000004 cm.
- La población de la tierra en el año 2002: 6,251,000,000 habitantes.
- La masa de un neutrón: 0.00000000000000000000167 Kg.

52. Escribir los siguientes números en el sistema decimal ordinario.

- La distancia de la tierra a la luna es  $4.624 \times 10^5$  km.
- La longitud de onda de los rayos X:  $4.92 \times 10^{-11}$  m.

5.3. Propiedades de las fracciones. Probar que:

$$1. \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, c \neq 0 \qquad 2. \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \qquad 3. \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

54. Leyes de los exponentes. Si  $a$  y  $b$  son números reales y  $m$  y  $n$  son enteros, probar que:

$$a. \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad b. (a^n)^m = a^{nm} \qquad c. (ab)^n = a^n b^n \qquad d. \frac{a^n}{b^n} = \frac{b^{-n}}{a^{-n}}$$

### SECCION 1.3

## RADICALES Y EXPONENTES RACIONALES

### RADICALES

Si  $b^2 = a$ , decimos que  $b$  es **una raíz cuadrada de  $a$** . Si  $a > 0$ ,  $a$  tiene dos raíces cuadradas, una positiva y otra negativa. A la positiva se la denota por  $\sqrt{a}$  y se la llama **raíz cuadrada principal** de  $a$ . La otra, la negativa, es  $-\sqrt{a}$ . Así, si  $a = 9$ , tenemos que  $3^2 = 9$  y  $(-3)^2 = 9$ . Luego, las dos raíces cuadrada de 9 son  $-3$  y  $3$ . La raíz principal es  $\sqrt{9} = 3$  y la otra es  $-\sqrt{9} = -3$ .

Un número negativo no tiene raíz cuadrada real. En efecto, si  $a < 0$ , como el cuadrado de todo número es no negativo, no existe un número real  $b$  tal que  $b^2 = a$ .

Si se cumple que  $b^3 = a$ , decimos que  $b$  es **una raíz cúbica de  $a$** . Todo número real  $a$  tiene una única raíz cúbica real, a la cual llamaremos **raíz cúbica principal** o, simplemente, **raíz cúbica**, y la denotaremos por  $\sqrt[3]{a}$ . Si  $a > 0$ ,  $\sqrt[3]{a} > 0$  y si  $a < 0$ ,  $\sqrt[3]{a} < 0$ . Así,  $\sqrt[3]{8} = 2$  y  $\sqrt[3]{-8} = -2$

En general tenemos la siguiente definición.

**DEFINICION.** Sea  $a$  un número real y  $n$  un entero positivo tal que  $n > 1$ .

La raíz  $n$ -ésima principal de  $a$  es el número  $\sqrt[n]{a}$  tal que:

1.  $\sqrt[n]{a} = 0$ , si  $a = 0$ . Esto es,  $\sqrt[n]{0} = 0$
2.  $\sqrt[n]{a} = b$ , si  $b^n = a$ ,  $a > 0$  y  $b > 0$
3.  $\sqrt[n]{a} = b$ , si  $b^n = a$ ,  $a < 0$ ,  $b < 0$  y  $n$  impar.

Tener en cuenta que si  $a < 0$  y  $n$  es par,  $\sqrt[n]{a}$  no es número real.

A la expresión  $\sqrt[n]{a}$  se le llama **radical**.  $\sqrt{\phantom{a}}$  es el **signo de radical**,  $n$  es el **índice** y  $a$  es el **radicando ó cantidad subradical**. Cuando se trata de la raíz cuadrada, es costumbre obviar el índice y escribir  $\sqrt{a}$  en lugar de  $\sqrt[2]{a}$ .

- EJEMPLO 1.**
- a.  $\sqrt[6]{64} = 2$ , ya que  $2^6 = 64$
  - b.  $\sqrt[3]{-125} = -5$ , ya que  $(-5)^3 = -125$
  - c.  $\sqrt[4]{-16}$  no es un número real,  $n = 4$  es par y  $a = -16 < 0$ .

**TEOREMA 1.7** Leyes de los radicales.

1.  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$
2.  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ,  $b \neq 0$
3.  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
4.  $(\sqrt[n]{a})^n = a$
5.  $\sqrt[n]{a^n} = a$ , si  $n$  es impar,
6.  $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$ , si  $n$  es par,

**Demostración**

Ver una demostración parcial el problema resuelto 5 y el problema propuesto 28.

**EJEMPLO 2.** Usando las leyes de los radicales simplificar las expresiones:

- |                              |                      |  |
|------------------------------|----------------------|--|
| a. $\sqrt[4]{8} \sqrt[4]{2}$ | b. $\sqrt[3]{-256}$  | c. $\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$ |
| d. $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}$  | e. $\sqrt[5]{-1024}$ | f. $\sqrt[4]{(-8)^4}$                  |

**Solución**

$$\text{a. } \sqrt[4]{8} \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{8 \times 2} = \sqrt[4]{16} = 2 \quad (\text{ley 1})$$

$$\text{b. } \sqrt[3]{-256} = \sqrt[3]{(-64)4} = \sqrt[3]{-64} \sqrt[3]{4} = -4 \sqrt[3]{4} \quad (\text{ley 1})$$

$$\text{c. } \frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{\frac{128}{8}} = \sqrt[4]{16} = 2 \quad (\text{ley 2})$$

$$\text{d. } \sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2 \quad (\text{leyes 3 y 6})$$

$$\text{e. } \sqrt[5]{-1024} = \sqrt[5]{(-4)^5} = -4 \quad (\text{ley 5})$$

$$\text{f. } \sqrt[4]{(-8)^4} = -(-8) = 8 \quad (\text{ley 6})$$

**EJEMPLO 3.** Simplificar: **a.**  $\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{72}$

$$\text{b. } x\sqrt[4]{16x^3} - \sqrt[4]{81x^7}, x > 0 \quad \text{c. } \frac{\sqrt[3]{-54x^7}}{\sqrt[3]{2x^5}}, x \neq 0$$

**Solución**

$$\text{a. } \sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{72} = \sqrt{9 \times 2} - \sqrt{25 \times 2} + \sqrt{36 \times 2} = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } x\sqrt[4]{16x^3} + \sqrt[4]{81x^7} &= x\sqrt[4]{(16)(x^3)} - \sqrt[4]{(81x^4)(x^3)} \\ &= x\sqrt[4]{16} \sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{81x^4} \sqrt[4]{x^3} = 2x\sqrt[4]{x^3} - 3x\sqrt[4]{x^3} = -x\sqrt[4]{x^3} \end{aligned}$$

$$\text{c. } \frac{\sqrt[3]{-54x^7}}{\sqrt[3]{2x^5}} = \sqrt[3]{\frac{-54x^7}{2x^5}} = \sqrt[3]{-27x^2} = \sqrt[3]{-27} \sqrt[3]{x^2} = -3\sqrt[3]{x^2}$$

## RACIONALIZACION

Se llama **racionalización del denominador** al proceso mediante el cual se transforma una fracción que tiene radicales en el denominador en otro equivalente que no los tiene. Para lograr este propósito se multiplican el numerador y el denominador por una expresión adecuada, llamada **expresión racionalizante**. En esta parte veremos dos casos sencillos. Más adelante veremos otros casos.

**Caso 1.** El denominador es una raíz cuadrada  $\sqrt{a}$ . Se multiplica el numerador y denominador por el mismo radical,  $\sqrt{a}$ . Así:

$$\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{a}$$

**Caso 2.** El denominador es un radical de la forma  $\sqrt[n]{a^m}$ , donde  $m < n$  y  $a > 0$ . Se multiplica el numerador y denominador por el radical  $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ . Así:

$$\frac{b}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{b \sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{b \sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}} = \frac{b \sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{b \sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

**EJEMPLO 4.** Racionalizar el denominador de:

a.  $\frac{5}{\sqrt{3}}$       b.  $\frac{8}{\sqrt[3]{4}}$       c.  $\frac{18}{\sqrt[7]{2^3 \times 3^5}}$

**Solución**

a.  $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

b.  $\frac{8}{\sqrt[3]{4}} = \frac{8 \sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4} \sqrt[3]{4^2}} = \frac{8 \sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{8 \sqrt[3]{4^2}}{4} = 2 \sqrt[3]{4^2} = 2 \sqrt[3]{2^4} = 2 \sqrt[3]{2^3 \times 2} = 4 \sqrt[3]{2}$

c.  $\frac{18}{\sqrt[7]{2^3 \times 3^5}} = \frac{18 \sqrt[7]{2^4 \times 3^2}}{\sqrt[7]{2^3 \times 3^5} \sqrt[7]{2^4 \times 3^2}} = \frac{18 \sqrt[7]{2^4 \times 3^2}}{\sqrt[7]{2^7 \times 3^7}} = \frac{18 \sqrt[7]{2^4 \times 3^2}}{2 \times 3} = 3 \sqrt[7]{2^4 \times 3^2}$

En forma análoga, también se puede **racionalizar el numerador** de una fracción.

**EJEMPLO 5.** Racionalizar el numerador de  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

**Solución**

$$\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

### EXPONENTES RACIONALES

Terminamos esta sección unificando los conceptos de exponentes enteros y radicales para definir exponentes racionales.

**DEFINICION.** Sea  $m$  y  $n$  dos enteros,  $n > 1$  y  $a$  un número real tal que existe  $\sqrt[n]{a}$

1.  $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
2.  $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Las leyes de los exponentes enunciadas en los teoremas 1.6 para exponentes enteros, se cumplen también para exponentes racionales.

- EJEMPLO 6.**
1.  $(-27)^{1/3} = \sqrt[3]{-27} = -3$
  2.  $(-64)^{2/3} = (\sqrt[3]{-64})^2 = (-4)^2 = 16$ , ó bien

$$(-64)^{2/3} = \sqrt[3]{(-64)^2} = \sqrt[3]{4096} = 16$$


---

**EJEMPLO 7.** Expresar los siguientes radicales en términos de exponentes fraccionarios.

a.  $\sqrt{x^{-3}}$       b.  $\frac{1}{\sqrt[5]{z^4}}$       c.  $\sqrt[3]{(xy)^6}$

**Solución**

a.  $\sqrt{x^{-3}} = x^{-3/2}$       b.  $\frac{1}{\sqrt[5]{z^4}} = \frac{1}{z^{4/5}} = z^{-4/5}$       c.  $\sqrt[3]{(xy)^6} = (xy)^{6/3} = (xy)^2$

---

**EJEMPLO 8.** Simplificar: a.  $(-216x^6y)^{1/3}$       b.  $\left(\frac{27}{8}\right)^{-2/3} + \left(-\frac{32}{243}\right)^{2/5}$

**Solución**

a.  $(-216x^6y)^{1/3} = (-216)^{1/3}(x^6)^{1/3}y^{1/3} = ((-6)^3)^{1/3}(x^6)^{1/3}y^{1/3}$   
 $= (-6)^{3/3}x^{6/3}y^{1/3} = -6x^2y^{1/3}$

b.  $\left(\frac{27}{8}\right)^{-2/3} + \left(-\frac{32}{243}\right)^{2/5} = \left(\frac{8}{27}\right)^{2/3} + \left(\frac{-32}{243}\right)^{2/5} = \frac{8^{2/3}}{(27)^{2/3}} + \frac{(-32)^{2/5}}{(243)^{2/5}}$   
 $= \frac{(8^{1/3})^2}{((27)^{1/3})^2} + \frac{((-32)^{1/5})^2}{((243)^{1/5})^2} = \frac{(\sqrt[3]{8})^2}{(\sqrt[3]{27})^2} + \frac{(\sqrt[5]{-32})^2}{(\sqrt[5]{343})^2}$   
 $= \frac{2^2}{3^2} + \frac{(-2)^2}{3^2} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$

---

**EJEMPLO 9.** Simplificar  $\sqrt[4]{\frac{a^8}{81b^4c^{-12}}}$

**Solución**

$$\sqrt[4]{\frac{a^8}{81b^4c^{-12}}} = \left(\frac{a^8}{81b^4c^{-12}}\right)^{1/4} = \frac{(a^8)^{1/4}}{(81b^4c^{-12})^{1/4}} = \frac{a^{8/4}}{(81)^{1/4}b^{4/4}c^{-12/4}} = \frac{a^2}{3b^1c^{-3}} = \frac{a^2c^3}{3b}$$


---

## PROBLEMAS RESUELTOS 1.3

---

**PROBLEMA 1.** Simplificar  $\frac{(64)^{n/6} (49)^{-n/2}}{(27)^{-n/3}}$

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{(64)^{n/6} (49)^{-n/2}}{(27)^{-n/3}} &= \frac{(64)^{n/6} (27)^{n/3}}{(49)^{n/2}} = \frac{(2^6)^{n/6} (3^3)^{n/3}}{(7^2)^{n/2}} = \frac{2^{6n/6} 3^{3n/3}}{7^{2n/2}} \\ &= \frac{2^n 3^n}{7^n} = \frac{(2 \times 3)^n}{7^n} = \frac{6^n}{7^n} = \left(\frac{6}{7}\right)^n \end{aligned}$$


---

**PROBLEMA 2.** Simplificar  $\frac{\sqrt{18} - \sqrt{50}}{\sqrt{72} + \sqrt{2}}$

**Solución**

$$\frac{\sqrt{18} - \sqrt{50}}{\sqrt{72} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9 \times 2} - \sqrt{25 \times 2}}{\sqrt{36 \times 2} + \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - 5\sqrt{2}}{6\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = -\frac{2}{7}$$


---

**PROBLEMA 3.** Simplificar  $\frac{18}{\sqrt{27}} - 5\sqrt{3} + \frac{12}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{2}}$

**Solución**

En primer lugar, racionalizamos los denominadores.

$$\frac{18}{\sqrt{27}} = \frac{18}{\sqrt{9 \times 3}} = \frac{18}{3\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3} \sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \quad \text{y} \quad \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Ahora,

$$\frac{6}{\sqrt{27}} - 5\sqrt{3} + \frac{12}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$


---

**PROBLEMA 4.** Halla  $n$  tal que  $5^n = \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}$

**Solución**

Como el término de la izquierda es una potencia de 5, también expresamos los radicales de la derecha como una potencia de 5.

$$5^n = \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3 \times 2]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[6]{5}} = \frac{5^{2/3}}{5^{1/6}} = 5^{(2/3) - (1/6)} = 5^{1/2} \Rightarrow 5^n = 5^{1/2} \Rightarrow n = \frac{1}{2}$$

**PROBLEMA 5.** Probar las siguientes leyes de los radicales.

$$1. \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad 2. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

**Solución**

1. Sea  $\sqrt[n]{a} = c$  y  $\sqrt[n]{b} = d$ . Luego,  $a = c^n$ ,  $b = d^n$  y

$$ab = c^n d^n = (cd)^n. \text{ Por lo tanto, } \sqrt[n]{ab} = cd = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

2. Sea  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = b$ . Luego,  $\sqrt[n]{a} = b^m$  y  $a = (b^m)^n = b^{nm} \Rightarrow \sqrt[mn]{a} = b = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 1.3

*En los problemas del 1 al 9 evaluar las expresiones dadas.*

$$\begin{array}{lll}
 1. \sqrt{(-5)^2} & 2. \sqrt[3]{-0.027} & 3. (0.16)^{-1/2} \\
 4. (32)^{-2/5} & 5. \left(-\frac{8}{27}\right)^{-1/3} & 6. (0.0016)^{-3/4} \\
 7. 5^{2/7} 5^{5/7} & 8. (125)^{-2/3} \div (81)^{1/4} & 9. [(243)^{-4/5} (64)^{2/3}]^{1/4}
 \end{array}$$

*En los problemas del 10 al 14 simplificar las expresiones dadas y de una respuesta sin exponentes negativos.*

$$\begin{array}{lll}
 10. (-2a^{-3}b)^2(3a^2b^{-1})^3 & 11. \left(\frac{3x^2}{y^3}\right)^2 \left(\frac{-2x^2}{3y}\right)^{-2} & 12. \frac{(x^{-3}y^2)^3}{(x^3y^{-2})^2} \\
 13. \frac{(32a^{15}c^{-5})^{1/5}}{(-27a^6c^{-3})^{1/3}} & 14. \left(\frac{x^{-2}y^3}{x^4y^{-3}}\right)^{-1/2} \left(\frac{x^4y^{-4}}{xy^2}\right)^{-1/3} &
 \end{array}$$

*En los problemas del 15 al 25 simplificar las expresiones dadas. Si es necesario, racionalice los denominadores.*

15.  $5\sqrt{20} - 3\sqrt{45} + \frac{\sqrt{80}}{2}$

16.  $\sqrt{243} - \sqrt{63} + \sqrt{175} - 2\sqrt{75}$

17.  $\frac{\sqrt{48} + \sqrt{75}}{-\sqrt{81}}$

18.  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{72} - \sqrt{8} + \sqrt{50}}$

19.  $\sqrt[3]{1080} - \sqrt[3]{625} + \sqrt[3]{40}$

20.  $\sqrt[3]{-375} - 3\sqrt[3]{-24} - 4\sqrt[3]{-81}$

21.  $\frac{56}{\sqrt{7}} - 6\sqrt{28} + \frac{\sqrt{343}}{7}$

22.  $\sqrt{75} - 3\sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{48}$

23.  $\sqrt{\frac{3}{8}} - \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\sqrt{24}}{3}$

24.  $\sqrt{\frac{1}{12}} - \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{3}{4}}$

25.  $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{\frac{1}{32}} - \sqrt[3]{\frac{2}{27}}$

En los problemas del 26 y 27 simplificar las expresiones dadas.

26.  $\frac{2^{n-2} - 2^{n-1} + 2^n}{2^{n+2} - 2^{n+1} + 2^n}$

27.  $\frac{12^n \times 225^{n/2} \times 35^{2n}}{49^n \times 16^{n/4} \times 27^{2n/3}}$

En los problemas del 27 al 30 hallar el valor de  $n$ .

27.  $5\sqrt{5} \sqrt[3]{25} = 5^n$       29.  $\sqrt{\sqrt[3]{3}} = 3^n$       30.  $\sqrt[n]{\sqrt[n]{5}} = 5^{1/9}$

28. Probar las siguientes leyes de los radicales:

1.  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$

2.  $(\sqrt[n]{a})^n = a$

3.  $\sqrt[n]{a^n} = a$ , si  $n$  es impar,

4.  $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$ , si  $n$  es par.

## SECCION 1.4

### ALGO DE ALGEBRA

#### PRODUCTOS NOTABLES

Algunos productos aparecen con mucha frecuencia en los cálculos algebraicos, razón por la cual se los llama **productos notables**. El lector debe memorizarlos. La veracidad de estos productos se comprueba fácilmente, efectuando las multiplicaciones indicadas. Los principales productos notables son los siguientes.

1.  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$       **Producto de la Suma por la Diferencia**
2.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$       **Cuadrado de una Suma**
3.  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$       **Cuadrado de una Diferencia**
4.  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$       **Cubo de una Suma**
5.  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$       **Cubo de una Diferencia**

**EJEMPLO 1.** Aplicando los productos notables, hallar:

$$\text{a. } (2x^3 + \sqrt{5})(2x^3 - \sqrt{5}) \quad \text{b. } \left(4a^2 - \frac{3}{b}\right)^2 \quad \text{c. } (4x^2 - 3y)^3$$

**Solución**

a. Aplicando la fórmula 1:

$$(2x^3 + \sqrt{5})(2x^3 - \sqrt{5}) = (2x^3)^2 - (\sqrt{5})^2 = 4x^6 - 5$$

b. Aplicando la fórmula 3:

$$\left(4a^2 - \frac{3}{b}\right)^2 = (4a^2)^2 - 2(4a^2)\left(\frac{3}{b}\right) + \left(\frac{3}{b}\right)^2 = 16a^4 - \frac{24a^2}{b} + \frac{9}{b^2}$$

c. Aplicando la fórmula 5:

$$\begin{aligned} (4x^2 - 3y)^3 &= (4x^2)^3 - 3(4x^2)^2(3y) + 3(4x^2)(3y)^2 - (3y)^3 \\ &= 64x^6 - 3(16x^4)(3y) + 3(4x^2)(9y^2) - 27y^3 \\ &= 64x^6 - 144x^4y + 108x^2y^2 - 27y^3 \end{aligned}$$

## FACTORIZACION

Si una expresión algebraica es escrita como un producto de otras expresiones algebraicas, entonces cada una de estas expresiones es un **factor**. Se llama **factorización** al proceso de convertir una expresión algebraica en el producto de sus factores.

### FACTORIZACION POR FACTOR COMUN

El caso más simple y común de factorización es sacar el **factor común** a dos o más expresiones algebraicas. Esta técnica se base en la propiedad distributiva, mirándola de izquierda a derecha:

$$ab \pm ac = a(b \pm c)$$

**EJEMPLO 2.** Factorizar:

a.  $12x^3yz + 18x^2y^2$       b.  $10a^5 - 15a^4 + 20a^2$

**Solución**

a. Coeficientes 12 y 18 tienen como factores a 2, 3 y 6. Tomamos el mayor, 6.

En la parte literal, aparecen en dos los términos las variables  $x$  e  $y$ . Tomamos esta dos variables con el menor exponente:  $x^2$  e  $y$ .

El factor común es  $6x^2y$ . Luego,

$$12x^3yz + 18x^2y^2 = (6x^2y)(2xz) + (6x^2y)(3y) = 6x^2y(2xz + 3y)$$

b. El factor común de los tres términos es  $5a^2$ . Luego,

$$\begin{aligned} 10a^5 - 15a^4 + 20a^2 &= (5a^2)(2a^3) - (5a^2)(3a^2) + (5a^2)(4) \\ &= 5a^2(2a^3 - 3a^2 + 4) \end{aligned}$$

**EJEMPLO 3.** Factor común por Agrupación de términos.

Factorizar  $3x^3 - 2xy - 6x^2 + 4y$

**Solución**

Vemos que los cuatro términos no tiene un factor común distinto de 1. Pero, si los agrupamos en parejas de dos términos que tienen factores comunes, tenemos:

$$\begin{aligned} 3x^3 - 2xy - 6x^2 + 4y &= (3x^3 - 6x^2) + (-2xy + 4y) = 3x^2(x - 2) - 2y^2(x - 2) \\ &= (3x^2 - 2y^2)(x - 2) \end{aligned}$$

### FACTORIZACION DEL TRINOMIO $x^2 + bx + c$

Se trata de hallar dos números  $r$  y  $s$  tales que

$$x^2 + bx + c = (x + r)(x + s)$$

Pero,  $(x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs$ . En consecuencia, los números  $r$  y  $s$  que buscamos deben cumplir que

$$rs = c \quad \text{y} \quad r + s = b$$

**EJEMPLO 4.** Factorizar  $x^2 - 2x - 8$

**Solución**

Tenemos que  $c = -8$  y  $b = -2$ . Buscamos dos números  $r$  y  $s$  tales que

$$rs = -8 \quad \text{y} \quad r + s = -2$$

Presentamos los factores de  $-8$  con su respectiva suma algebraica:

$$r = -1 \quad s = 8 \quad r + s = 7$$

$$\begin{array}{lll}
 r = 1 & s = -8 & r + s = -7 \\
 r = -2 & s = 4 & r + s = 2 \\
 r = 2 & s = -4 & r + s = -2
 \end{array}$$

Vemos que los números que satisfacen el requerimiento son  $r = 2$  y  $s = -4$

En consecuencia,  $x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$

---

**EJEMPLO 5.** Factorizar  $x^2 - 7x + 12$

**Solución**

Buscamos dos números,  $r$  y  $s$ , cuyo producto sea 12 y que sumados den  $-7$

Los factores de 12 son:

$$(1)(12), (-1)(-12), (2)(6), (-2)(-6), (3)(4) \text{ y } (-3)(-4)$$

De estas parejas, la que suma  $-7$  es la última. Esto es,  $r = -3$  y  $s = -4$

En consecuencia,  $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$

---

**FACTORIZACION DEL TRINOMIO  $ax^2 + bx + c$**

La factorización del trinomio  $ax^2 + bx + c$  lo reducimos al caso  $x^2 + bx + c$ . Para esto, en primer lugar, multiplicamos y dividimos al polinomio por el coeficiente  $a$  y luego hacemos el cambio de variable  $y = ax$ :

$$\frac{a(ax^2 + bx + c)}{a} = \frac{(ax)^2 + b(ax) + ac}{a} = \frac{y^2 + by + ac}{a}$$

Este último trinomio es del tipo que ya tratamos.

**EJEMPLO 6.** Factorizar  $5x^2 - 7x - 6$

**Solución**

Multiplicamos el trinomio por el coeficiente 5.

$$\begin{aligned}
 \frac{5(5x^2 - 7x - 6)}{5} &= \frac{(5x)^2 - 7(5x) - 30}{5} = \frac{(5x - 10)(5x + 3)}{5} \\
 &= \left(\frac{5x - 10}{5}\right)(5x + 3) = (x - 2)(5x + 3)
 \end{aligned}$$


---

**EJEMPLO 7.** Factorizar  $12x^2 - 5ax - 2a^2$

**Solución**

Multiplicamos el trinomio por el coeficiente 12:

$$\frac{12(12x^2 - 5ax - 2a^2)}{12} = \frac{(12x)^2 - 5a(12x) - 24a^2}{12} \frac{(12x - 8a)(12x + 3a)}{4 \times 3}$$

$$= \left(\frac{12x - 8a}{4}\right)\left(\frac{12x + 3a}{3}\right) = (3x - 2a)(4x + a)$$


---

A continuación presentamos las fórmulas más usuales de factorización.

**FORMULAS DE FACTORIZACION**

- 1.  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  **Diferencia de cuadrados**
- 2.  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$  **Cuadrado perfecto**
- 3.  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$  **Cuadrado perfecto**
- 4.  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$  **Diferencia de cubos**
- 5.  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$  **Suma de cubos**
- 6. **Diferencia de  $n$ -simas potencias**

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Las fórmulas 2, 3 y 4 son los productos notables 1, 2 y 3 escritos de izquierda a derecha. La fórmulas 4, 5 y 6 se prueban efectuando la multiplicación indicada.

**EJEMPLO 8. Diferencia de cuadrados y diferencia de cubos.**

Factorizar: **a.**  $x^2 - 36$       **b.**  $16x^4 - 81y^2$       **c.**  $8x^3 - 27$

**Solución**

**a.** De acuerdo a la fórmula 1:

$$x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x + 6)(x - 6)$$

**b.** De acuerdo a la fórmula 1:

$$16x^4 - 81y^2 = (4x^2)^2 - (9y)^2 = (4x^2 + 9y)(4x^2 - 9y)$$

**c.** De acuerdo a la fórmula 4:

$$8x^3 - 27 = (2x)^3 - 3^3 = (2x - 3)((2x)^2 + (2x)(3) + 3^2) = (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$$


---

**EJEMPLO 9. Cuadrados Perfectos.**

Factorizar: **a.**  $40x^2 + 25x^4 + 16$       **b.**  $9x^2 - 3xy + y^3/4$

**Solución**

Para aplicar las fórmulas 2 o 3, antes debemos verificar que el trinomio dado es un cuadrado perfecto. Para esto, en primer lugar se ordena el trinomio de acuerdo al grado de la variable (o de una de las variables si hay más de una). Ahora:

1. Se verifica que el primer y el tercer términos tienen raíz cuadrada.
2. Se verifica que el segundo término es igual a  $\pm$  el doble del producto de las raíces cuadradas del primer y tercer término.

a. Ordenamos  $40x^2 + 25x^4 + 16$ :  $25x^4 + 40x^2 + 16$

Raíz cuadrada de  $25x^4$  . . . . .  $5x^2$

Raíz cuadrada de  $16$  . . . . .  $4$

Doble producto de las raíces:  $2(5x^2)(4) = 40x^2 =$  segundo término

En consecuencia,  $25x^4 + 40x^2 + 16 = (5x^2 + 4)^2$

b.  $9x^2 - 3xy + \frac{y^2}{4}$  ya está ordenado de acuerdo a la variable  $x$ .

Raíz cuadrada de  $9x^2$  . . . . .  $3x$

Raíz cuadrada de  $\frac{y^2}{4}$  . . . . .  $\frac{y}{2}$

Doble producto de las raíces, con signo negativo:  $-2(3x)(y/2) = -3xy$ .

En consecuencia,  $9x^2 - 3xy + \frac{y^2}{4} = \left(3x - \frac{y}{2}\right)^2$

**EJEMPLO 10. Diferencia de  $n$ -ésimas potencias**

Factorizar:  $2x^5 - 64a^5$

**Solución**

En primer lugar sacamos factor común 2 y luego aplicamos la fórmula 6:

$$2(x^5 - 32a^5) = 2(x^5 - (2a)^5) = 2(x - 2a)(x^4 + x^3(2a) + x^2(2a)^2 + x(2a)^3 + (2a)^4)$$

$$= 2(x - 2a)(x^4 + 2ax^3 + 4a^2x^2 + 8a^3x + 16a^4)$$

**OPERACIONES CON FRACCIONES ALGABRAICAS**

Llamamos **fracción algebraica** a un cociente (o razón) de dos expresiones algebraicas. En particular, una fracción racional es una fracción algebraica que es cociente de dos polinomios. Así, las tres siguientes expresiones son fracciones algebraicas, donde sólo la primer es una fracción racional:

$$1. \frac{2x^3 - 3x^2 + 5}{x^2 - 4x + 3} \quad 2. \frac{3x + 1}{x - \sqrt{2x}} \quad 3. \frac{\sqrt{2x - 3}}{x + 5}$$

Las variables que aparecen en una fracción algebraica representan números reales. En consecuencia, las fracciones algebraicas son gobernadas por las propiedades de las fracciones de números reales, establecidas en teorema 1.5.

### SIMPLIFICACION DE FRACCIONES

La simplificación de fracciones algebraicas se basa en la siguiente propiedad de las fracciones:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, \quad c \neq 0$$

Para simplificar una fracción algebraica se factorizan el numerador y el denominador y se simplifican los factores comunes.

**EJEMPLO 11.** Simplificar:

$$a. \frac{6x^2 - 3xy}{4x^2 - y^2} \quad b. \frac{2x^3 - 54}{4x^2 - 32x + 60}$$

**Solución**

$$a. \frac{6x^2 - 3xy}{4x^2 - y^2} = \frac{3x(2x - y)}{(2x - y)(2x + y)} = \frac{3x}{2x + y}$$

$$b. \frac{2x^3 - 54}{4x^2 - 32x + 60} = \frac{2(x^3 - 27)}{4(x^2 - 8x + 15)} = \frac{2(x^3 - 3^3)}{4(x^2 - 8x + 15)}$$

$$= \frac{2(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{4(x - 3)(x - 5)} = \frac{x^2 + 3x + 9}{2(x - 5)}$$

### MAS SOBRE RACIONALIZACION

Aquí nos interesamos en racionalizar denominadores o numeradores que consisten en un binomio que contiene raíces cuadradas o raíces cúbicas.

**Denominador o numerador de la Forma  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$**

Si el denominador o numerador de una fracción es de la forma  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ , a la fracción se multiplica por su conjugada, que es  $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ . Esta estrategia se basa en la identidad:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

**EJEMPLO 12.** Racionalizar los denominadores de  $\frac{5}{\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}$

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{5}{\sqrt{2}+3\sqrt{3}} &= \frac{5}{\sqrt{2}+3\sqrt{3}} \frac{\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{\sqrt{2}-3\sqrt{3}} = \frac{5(\sqrt{2}-3\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{5(\sqrt{2}-3\sqrt{3})}{2-27} = \frac{5(\sqrt{2}-3\sqrt{3})}{-25} = \frac{\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{-5} = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$$


---

**EJEMPLO 13.** Racionalizar el numerador de  $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \end{aligned}$$


---

### Denominador o numerador de la Forma $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$

Consideremos la identidad

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Si el denominador o numerador es de la forma  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ , se multiplica y divide por

$$\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}$$

En este caso de tiene que:

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}) = (\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{b})^3 = a + b$$

Análogamente, considerando la identidad

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Si el denominador o numerador es de la forma  $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ , se multiplica y divide por

$$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}.$$

En este caso de tiene que:

$$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}) = (\sqrt[3]{a})^3 - (\sqrt[3]{b})^3 = a - b$$


---

**EJEMPLO 14.** Racionalizar el denominador de  $\frac{16}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}}$

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{16}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}} &= \frac{16\left(\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2}\right)} = \frac{16\left(\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{3}\right)^3} \\ &= \frac{16\left(\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2}\right)}{5 + 3} = 2\left(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}\right) \end{aligned}$$


---

**EJEMPLO 15.** Racionalizar el denominador de  $\frac{6}{3 - \sqrt[3]{3}}$

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{6}{3 - \sqrt[3]{3}} &= \frac{6\left(3^2 + 3\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(3 - \sqrt[3]{3}\right)\left(3^2 + 3\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2}\right)} = \frac{6\left(9 + 3\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right)}{3^3 - \left(\sqrt[3]{3}\right)^3} \\ &= \frac{6\left(9 + 3\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}\right)}{27 - 3} = \frac{6\left(3^2 + 3\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2}\right)}{24} = \frac{9 + 3\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}}{4} \end{aligned}$$


---

### ADICION DE FRACCIONES

Para Sumar o restar fracciones que tienen el mismo denominador, simplemente se suman o restan los numeradores y se coloca el mismo denominador.

**EJEMPLO 16.** Hallar  $\frac{5}{x^2 + 1} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x - 3}{x^2 + 1}$

**Solución**

$$\frac{5}{x^2 + 1} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x - 3}{x^2 + 1} = \frac{5 + x - (x - 3)}{x^2 + 1} = \frac{8}{x^2 + 1}$$


---

Para Sumar o restar fracciones que tienen distinto denominador, se transforman estas en otras equivalentes, que tengan como denominador, el mínimo común denominador.

Para hallar el mínimo común denominador (M.C.D.), se factorizan completamente los denominadores. El M.C.D. es igual al producto de los factores comunes y no comunes tomados con el mayor exponente.

El proceso es igual al que usamos cuando sumamos o restamos números racionales.

---

**EJEMPLO 17.** Hallar  $\frac{2}{x-2} + \frac{3x}{x^2-7x+10}$

**Solución**

Tenemos que  $x-2 = x-2$ ,  $x^2-7x+10 = (x-2)(x-5)$

El M.C.D.  $(x-2)(x-5)$ . Luego,

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-2} + \frac{3x}{x^2-7x+10} &= \frac{2(x-5)}{(x-2)(x-5)} + \frac{3x}{(x-2)(x-5)} = \frac{2x-10+3x}{(x-2)(x-5)} \\ &= \frac{5x-10}{(x-2)(x-5)} = \frac{5(x-2)}{(x-2)(x-5)} = \frac{5}{x-5} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 18.** Hallar  $\frac{2x^2+12}{x^2-9} - \frac{x+2}{x-3} - \frac{x-3}{x+3}$

**Solución**

$x^2-9 = (x-3)(x+3)$ . El M.C.D. es  $(x-3)(x+3)$ . Luego,

$$\begin{aligned} \frac{2x^2+12}{x^2-9} - \frac{x+2}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} &= \frac{2x^2+12}{(x-3)(x+3)} - \frac{(x+2)(x+3)}{(x-3)(x+3)} - \frac{(x-3)(x-3)}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{2x^2+12-x^2-5x-6-x^2+6x-9}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x+3} \end{aligned}$$

## MULTIPLICACION Y DIVISION DE FRACCIONES

La multiplicación y división de fracciones se llevan a cabo de acuerdo a las siguientes propiedades de las fracciones del teorema 1.5:

$$1. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad 2. \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

**EJEMPLO 19.** Efectuar  $\frac{2x-2}{3x+6} \cdot \frac{x^2-x-6}{6x^2-6}$

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{2x-2}{3x+6} \cdot \frac{x^2-x-6}{6x^2-6} &= \frac{2(x-1)}{3(x+2)} \cdot \frac{(x+2)(x-3)}{6(x^2-1)} = \frac{2(x-1)}{3(x+2)} \cdot \frac{(x+2)(x-3)}{6(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{2(x-1)(x+2)(x-3)}{(6)(3)(x+2)(x-1)(x+1)} = \frac{(x-3)}{(3)(3)(x+1)} = \frac{x-3}{9(x+1)} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 20.** Efectuar  $\frac{3x+3}{x^2-49} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2-14x+49}$

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{3x+3}{x^2-49} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2-14x+49} &= \frac{3(x+1)}{(x-7)(x+7)} \div \frac{(x+1)(x-4)}{(x-7)^2} \\ &= \frac{3(x+1)}{(x-7)(x+7)} \cdot \frac{(x-7)^2}{(x+1)(x-4)} = \frac{3(x+1)(x-7)^2}{(x-7)(x+7)(x+1)(x-4)} = \frac{3(x-7)}{(x+7)(x-4)} \end{aligned}$$

### FRACCIONES COMPUESTAS

Una **fracción compuesta** es una fracción algebraica en la cual el numerador, el denominador o ambos a la vez son fracciones algebraicas. Podemos decir que una fracción compuesta es una fracción de fracciones. Teniendo en cuenta que una fracción es una división entre el numerador y el denominador. Por lo tanto, para simplificar una fracción compuesta se procede a dividir el numerador entre el denominador.

**EJEMPLO 21.** Simplificar  $\frac{\frac{x-y}{y-x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x-y}{y-x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} &= \left(\frac{x-y}{y-x}\right) \div \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right) \div \left(\frac{y-x}{xy}\right) \\ &= \left(\frac{(x-y)(x+y)}{xy}\right) \left(\frac{xy}{y-x}\right) = x+y \end{aligned}$$

### PROBLEMAS RESUELTOS 1.4

**PROBLEMA 1.** Usando productos notables, efectuar

$$(a+b)^2(a-b)^2$$

**Solución**

$$(a+b)^2(a-b)^2 = [(a+b)(a-b)]^2 = [a^2 - b^2]^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$$

**PROBLEMA 2.** Factorizar: a.  $x^2 - y^2 - 6y - 9$       b.  $x^2 - y^2 + 2x - 2y$

**Solución**

$$\text{a. } x^2 - y^2 - 6y - 9 = x^2 - (y^2 + 6y + 9) = x^2 - (y + 3)^2 = (x + y + 3)(x - y - 3)$$

$$\begin{aligned} \text{b. } x^2 - y^2 + 2x - 2y &= (x^2 - y^2) + (2x - 2y) = (x - y)(x + y) + 2(x - y) \\ &= (x - y)[(x + y) + 2] = (x - y)(x + y + 2) \end{aligned}$$


---

**PROBLEMA 3.** Simplificar  $\left( \frac{x^2 - 9}{2x + 14} \times \frac{x^2 + 10x + 21}{6x - 18} \right) \div \frac{x^2 + 5x + 6}{4x}$

**Solución**

$$\begin{aligned} \left( \frac{x^2 - 9}{2x + 14} \times \frac{x^2 + 10x + 21}{6x - 18} \right) \div \frac{x^2 + 5x + 6}{4x} &= \frac{x^2 - 9}{2x + 14} \times \frac{x^2 + 10x + 21}{6x - 18} \times \frac{4x}{x^2 + 5x + 6} \\ &= \frac{(x - 3)(x + 3)}{2(x + 7)} \times \frac{(x + 7)(x + 3)}{6(x - 3)} \times \frac{4x}{(x + 3)(x + 2)} = \frac{x(x + 3)}{3(x + 2)} \end{aligned}$$


---

**PROBLEMA 4.** Racionalizar los denominadores de:

$$\text{a. } \frac{9 - a}{\sqrt[3]{\sqrt{a} - \sqrt{b}}} \quad \text{b. } \frac{x + y}{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y}}}$$

**Solución**

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{9 - a}{\sqrt[3]{\sqrt{a} - 3}} &= \frac{(9 - a) \sqrt[3]{(\sqrt{a} - 3)^2}}{\left( \sqrt[3]{\sqrt{a} - 3} \right) \left( \sqrt[3]{(\sqrt{a} - 3)^2} \right)} = \frac{(9 - a) \sqrt[3]{(\sqrt{a} - 3)^2}}{\sqrt{a} - 3} \\ &= \frac{(9 - a) \sqrt[3]{(\sqrt{a} - 3)^2} (\sqrt{a} + 3)}{(\sqrt{a} - 3)(\sqrt{a} + 3)} = \frac{(9 - a) \sqrt[3]{(\sqrt{a} - 3)^2} (\sqrt{a} + 3)}{a - 9} \\ &= -(\sqrt{a} + 3) \sqrt[3]{(\sqrt{a} - 3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{x + y}{\sqrt[3]{x^2 - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y}}} &= \frac{(x + y) (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})}{\left( \sqrt[3]{x^2 - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} \right) (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})} = \frac{(x + y) (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})}{(\sqrt[3]{x})^3 + (\sqrt[3]{y})^3} \\ &= \frac{(x + y) (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})}{x + y} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \end{aligned}$$


---

**PROBLEMA 5.** Simplificar  $\frac{x}{1 - \frac{1}{1 + \frac{x}{y}}}$

**Solución**

$$\frac{x}{1 - \frac{1}{1 + \frac{x}{y}}} = \frac{x}{1 - \frac{1}{\frac{y+x}{y}}} = \frac{x}{1 - \frac{y}{y+x}} = \frac{x}{\frac{y+x-y}{y+x}} = \frac{x}{\frac{x}{y+x}} = \frac{x(y+x)}{x} = y+x$$


---

**PROBLEMA 6.** Simplificar  $\frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}$

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}} &= \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) \div \left( \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) \\ &= \left( \frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)} \right) \div \left( \frac{(x+1)(x+1) - (x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} \right) \\ &= \left( \frac{2x}{(x+1)(x-1)} \right) \div \left( \frac{(x^2+2x+1) - (x^2-2x+1)}{(x-1)(x+1)} \right) \\ &= \left( \frac{2x}{(x+1)(x-1)} \right) \div \left( \frac{4x}{(x-1)(x+1)} \right) = \frac{2x}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{4x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$


---

## PROBLEMAS PROPUESTOS 1.4

---

*En los problemas del 1 al 16, efectuar los productos indicados, usando las fórmulas de productos notables.*

- |                                       |   |                        |
|---------------------------------------|---|------------------------|
| 1. $(2x + \sqrt{5})(2x - \sqrt{5})$   | 2. $(2\sqrt{x} + \sqrt{y})(2\sqrt{x} - \sqrt{y})$ |                        |
| 3. $(3x^2 + 4y^3)(3x^2 - 4y^3)$       | 4. $((\sqrt{h+1} + 1)(\sqrt{h+1} - 1))$           |                        |
| 5. $(\sqrt{x} + 1/y)(\sqrt{x} - 1/y)$ | 6. $(a + b + c)(a + b - c)$                       | 7. $(4x + 5)^2$        |
| 8. $(2x - 5y)^2$                      | 9. $(x - x^{-1})^2$                               | 10. $(x^3 - x^{-3})^2$ |

11.  $(4x + y)^3$

12.  $(a^2 + b^2)^3$

13.  $(x^2 - y)^3$

14.  $(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3$

15.  $(x - 5)^2(x + 5)^2$

16.  $(2x - y)(2x + y)(4x^2 + y^2)$

*En los problemas del 17 al 56, factorizar las expresiones dadas*

17.  $7x^3 - 63x^2$

18.  $8x^2y^2z^3 - 24xy^3z^2 - 4x^3y^4z^3$

19.  $x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

20.  $4y^2 + 16y + 12xy + 48x$

21.  $x^2y^2 - y^2 - 4x + 4$

22.  $2a^2x - 5a^2y + 15by - 6bx$

23.  $x^2 + 2x - 48$

24.  $x^2 - 4x - 5$

25.  $y^2 + 28y - 29$

26.  $x^2 + 15x - 216$

27.  $x^4 - 2x^2 - 80$

28.  $a^2b^2 + ab - 12$

29.  $3x^2 + 7x + 4$

30.  $5y^2 + 10y - 75$

31.  $5a^2x^2 + 4ax - 12$

32.  $9x^2 - 15x - 50$

33.  $4x^2y^2 + 11xy^2 + 6y^2$

34.  $25x^4 - 10x^2 + 1$

35.  $25x^2 - 36y^4$

36.  $63x^4 - 7x^2$

37.  $45x^2y^2 - 5x^4$

38.  $x^2/36 - y^2/25$

39.  $16x^{2n} - 1/49$

40.  $(a - b)^2 - 9$

41.  $(a + b)^2 - (a - b)^2$

42.  $(x - 1)^2 - (y - 2)^2$

43.  $x^2 - y^2 - 6y - 9$

44.  $9(a - b)^2 - 4(a + b)^2$

45.  $a^4 - 2a^2 + 1$

46.  $16x^2 - 24xy + 9y^2$

47.  $400x^4 + 40x^2 + 1$

48.  $x^2/9 + 2x/3 + 1$

49.  $4x^2/25 - x/5 + 1/16$

50.  $8x^3 - y^3$

51.  $27a^3 + 64b^3$

52.  $5x^3y^3 + 5$

53.  $x^5 - 125x^2$

54.  $(x + y)^3 - 1$

55.  $(x - y)^3 - 8$

56.  $(x + 1)^3 - (x - 2)^3$

*En los problemas del 57 al 68, simplificar las fracciones dadas*

57.  $\frac{60a^3b^2 - 45a^2b}{15a^2b}$

58.  $\frac{x^2 - 3x}{3 - x}$

59.  $\frac{a^2 - 1}{a + 1}$

60.  $\frac{x^2 - x - 20}{x^2 + 2x - 8}$

61.  $\frac{2x^2 + x - 6}{2x - 3}$

62.  $\frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 6x + 4}$

63.  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

64.  $\frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{x^3 - 8y^3}$

65.  $\frac{(3 - a)^2}{27 - a^3}$

66.  $\frac{x^3 + 1}{x^4 - x^3 + x - 1}$

67.  $\frac{y + 8y^2 + 16y^3}{6y^2 + 25y^3 + 4y^4}$

68.  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 6y - xy + 6x}$

*En los problemas del 69 al 80, racionalizar el denominador.*

69.  $\frac{2}{1 - \sqrt{2}}$

70.  $\frac{h}{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}$

71.  $\frac{2a}{\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}}$

$$72. \frac{3\sqrt{2}}{7\sqrt{2}-6\sqrt{3}}$$

$$73. \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+2\sqrt{a}}$$

$$74. \frac{5}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x-13}}$$

$$75. \frac{3}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}}$$

$$76. \frac{16x-2}{2\sqrt[3]{x}-1}$$

$$77. \frac{70x-16}{2\sqrt[3]{x-1}+3\sqrt[3]{x}}$$

$$78. \frac{3x-9y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3xy}+\sqrt[3]{9y^2}}$$

$$79. \frac{8-x}{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}$$

$$80. \frac{2x-1}{\sqrt{2\sqrt{x}+\sqrt{2}}}$$

*En los problemas del 81 al 83, racionalizar el numerador.*

$$81. \frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

$$82. \frac{\sqrt{a+2}-\sqrt{a}}{2}$$

$$83. \frac{\sqrt{a-1+h}-\sqrt{a-1}}{h}$$

*En los problemas del 84 al 105, efectuar las operaciones indicadas.*

$$84. \frac{3a}{a+1} + \frac{2a}{a-1}$$

$$85. \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}$$

$$86. \frac{12}{x^2-9} - \frac{2}{x-3} + 1$$

$$87. \frac{x-2}{x^2-x-2} - \frac{2}{x^2-1}$$

$$88. \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}$$

$$89. \frac{x+5}{x^2+2x+1} + \frac{x}{x^2-4x-5} + \frac{1}{x-5}$$

$$90. \frac{x}{x^2-x-2} - \frac{6}{x^2+5x-14} - \frac{1}{x^2+8x+7}$$

$$91. \frac{x^2}{y^2-x^2} \times \frac{xy-x^2}{xy}$$

$$92. \frac{x^2+4x}{3x-2} \times \frac{9x^2-4}{x^2-16}$$

$$93. \frac{x^3-8}{a^3-1} \times \frac{a^2+a+1}{x^2+2x+4}$$

$$94. \frac{x^2+xy-2y^2}{x^2-2xy-8y^2} \times \frac{x^2+2xy}{x^2+4xy} \times \frac{x^2-16y^2}{x+2y}$$

$$95. \frac{a^2-ab-6b^2}{b^2+ab} \div \frac{a^2-4b^2}{a^2+ab}$$

$$96. \frac{x^4-x}{x^2+6x+8} \div \frac{2x^2-x-1}{2x^2+9x+4}$$

$$97. \frac{25x^3-x}{25x^2-10x+1} \div \frac{6x^2+13x+6}{15x^2+7x-2}$$

$$98. \left( \frac{x+1}{3x-3} \times \frac{6x-6}{2x+4} \right) \div \frac{x^2+x}{x^2+x-2}$$

$$99. \frac{3x^2+3}{2x-4} \div \left( \frac{3x+6}{2x-6} \times \frac{x^3+x}{3x-6} \right)$$

$$100. \left( 1 - \frac{a^3}{b^3} \right) \left( b + \frac{ab}{b-a} \right)$$

$$101. \left( x + \frac{4x^2+20x}{x^2-25} \right) \left( x+2 - \frac{28}{x-1} \right)$$

$$103. \left( \frac{x^2}{x^2 - y^2} - 1 \right) \left( \frac{x}{y} - 1 \right) \left( \frac{y}{x} + 1 \right)$$

$$104. \left( \frac{x^2}{x+1} - x + 1 \right) \div \left( \frac{2}{x^2 - 1} + 1 \right)$$

$$105. \left( \frac{2a+1}{a^2+2} - a \right) \div \left( \frac{a+1}{a} - a^2 - 1 \right)$$

En los problemas del 106 al 110, simplificar las fracciones compuestas dadas.

$$106. \frac{\frac{1}{x} - x^2}{\frac{1}{1} - 1}$$

$$107. \frac{\frac{a}{b^2} - \frac{b}{a^2}}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}$$

$$108. a - \frac{b}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}$$

$$109. 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

$$110. \frac{1 - \frac{1}{a-2}}{a+3 - \frac{24}{a+1}}$$

## SECCION 1.5

### ECUACIONES POLINOMICAS

Un **polinomio de grado  $n$**  es una expresión de la forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (1)$$

donde  $n$  es un número natural,  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$  y  $a_0$  son reales, siendo  $a_n \neq 0$ .

Los números  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$  y  $a_0$  son los coeficientes del polinomio, siendo  $a_n$  el **coeficiente principal** y  $a_0$  es el **coeficiente constante**.

Se llama **ecuación polinómica de grado  $n$**  a la ecuación de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (2)$$

Un **cero** del polinomio  $p(x)$  es un número  $c$  tal que  $p(c) = 0$ . Esto es,  $c$  es **una raíz** o **una solución** de la **ecuación polinómica (2)**

#### ECUACION LINEAL

La ecuación más simple de este tipo es la **ecuación lineal**, que es la ecuación polinómica de grado 1:  $ax + b = 0$  cuya solución es  $x = a/b$

Nuestro primer ejemplo es el **epitafio** escrito en la tumba del **Diofanto** por uno de sus discípulos.

**EJEMPLO 1.** El Epitafio de Diofanto

*«¡Caminante!*

*Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! , la duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia. Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba. A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril. Pasó, además, un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito. Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra, habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir. Por su parte Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo. Dime, caminante, ¿cuántos años vivió Diofanto hasta que le llegó la muerte?».*

**Solución**

Sea  $x$  el número de años que vivió Diofanto. Matemáticamente el epitafio dice:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Resolvemos la ecuación.

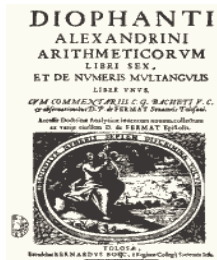
Los denominadores son: 6, 12, 7 y 2. El MCD es 84. Luego, multiplicando cada término de la ecuación por 84:

$$\begin{aligned} 84\left(\frac{x}{6}\right) + 84\left(\frac{x}{12}\right) + 84\left(\frac{x}{7}\right) + 84(5) + 84\left(\frac{x}{2}\right) + 84(4) &= 84x \Leftrightarrow \\ 14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 &= 84x \Leftrightarrow \\ 14x + 7x + 12x + 42x - 84x &= -336 - 420 \Leftrightarrow \\ -9x &= -756 \Leftrightarrow x = -756 / -9 = 84 \end{aligned}$$

***El caminante responde: Diofanto vivió 84 años.***

**¿SABIAS QUE . . .**

**DIOFANTO DE ALEJANDRIA (200–284 D.C.)**, matemático griego de la escuela de Alejandria, es conocido como uno de los **padres del álgebra**. De su vida se sabe poco. Es famoso por su obra, **Aritmética**, que es un tratado de 15 libros, de los cuales sólo se conocen los seis primeros. En ellos se presenta soluciones a ecuaciones algebraicas y los inicios de la teoría de números. Esta obra ejerció una influencia fundamental en la matemática durante varios siglos.



## ECUACION CUADRATICA

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación polinómica de grado 2:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

Presentamos dos métodos para resolver ecuaciones cuadráticas:

**I.** Por factorización.    **II.** Mediante la fórmula cuadrática.

### I. RESOLUCION POR FACTORIZACION

Este método se basa en el teorema 1.2, que dice:

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

**EJEMPLO 2.** Resolver la ecuación  $2x^2 - 11x + 15 = 0$

#### Solución

Factorizamos el trinomio y aplicamos el teorema 1.2:

$$2x^2 - 3x - 20 = 0 \Leftrightarrow (2x - 5)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \vee x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 5 \vee x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \vee x = -4$$

### II. SOLUCION MEDIANTE LA FORMULA CUADRATICA

Se llama **fórmula cuadrática** a la siguiente fórmula, la cual es conocida desde los tiempos babilónicos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3)$$

La expresión subradical  $\Delta = b^2 - 4ac$  es el **discriminante** de la ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Se tiene que:

Si  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ , la ecuación tiene **2 raíces reales distintas**.

Si  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ , la ecuación tiene **2 raíces reales iguales**.

Si  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ , la ecuación **no tiene raíces reales**. (tiene 2 raíces complejas distintas).

**EJEMPLO 3.** Resolver la ecuación  $\frac{x(x+4)}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{3x}{2} - \frac{1}{12}$

#### Solución

El MCD es 12. Luego, multiplicando por 12 cada término de la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{x(x+4)}{2} - \frac{x^2}{4} &= \frac{3x}{2} - \frac{1}{12} \Leftrightarrow 12 \frac{x(x+4)}{2} - 12 \frac{x^2}{4} = 12 \frac{3x}{2} - 12 \frac{1}{12} \\ &\Leftrightarrow 6x(x+4) - 3x^2 = 18x - 1 \\ &\Leftrightarrow 6x(x+4) - 3x^2 - 18x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6x^2 + 24x - 3x^2 - 18x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 1 = 0 \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula cuadrática  $a = 3$ ,  $b = 6$  y  $c = 1$ :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{-6 \pm \sqrt{24}}{6} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{6} = -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Las raíces son:  $x_1 = -1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$  y  $x_2 = -1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$

---

**EJEMPLO 4.** Una ecuación literal.

Resolver la ecuación  $\frac{x^2}{2m} - \frac{3x}{4} = \frac{m}{2}$

**Solución**

El MCD es  $4m$ . Luego, multiplicando cada término de la ecuación por  $4m$ :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2m} - \frac{3x}{4} &= \frac{m}{2} \Leftrightarrow (4m) \left( \frac{x^2}{2m} \right) - (4m) \left( \frac{3x}{4} \right) = (4m) \left( \frac{m}{2} \right) \Leftrightarrow 2x^2 - 3mx = 2m^2 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 3mx - 2m^2 = 0 \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula cuadrática tomando  $a = 2$ ,  $b = -3m$  y  $c = -2m^2$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3m) \pm \sqrt{(-3m)^2 - 4(2)(-2m^2)}}{2(2)} \\ &= \frac{3m \pm \sqrt{9m^2 + 16m^2}}{4} = \frac{3m \pm \sqrt{25m^2}}{4} = \frac{3m \pm 5m}{4} \Rightarrow \end{aligned}$$

Las raíces son:  $x_1 = \frac{3m + 5m}{4} = \frac{8m}{4} = 2m$  y  $x_2 = \frac{3m - 5m}{4} = \frac{-2m}{4} = -\frac{m}{2}$

---

**EJEMPLO 5.** Una ecuación con fracciones algebraicas.

Resolver  $\frac{x+3}{x^2+3x+2} + \frac{4}{x+2} = 2$

**Solución**

Tenemos que  $x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$  y, por tanto,

$$\frac{x+3}{x^2+3x+2} + \frac{4}{x+2} = 2 \Leftrightarrow \frac{x+3}{(x+2)(x+1)} + \frac{4}{x+2} = 2$$

El MCD es  $(x+2)(x+1)$ . Luego, multiplicando por  $(x+2)(x+1)$ :

$$\begin{aligned} (x+3) + 4(x+1) &= 2(x+2)(x+1) \Leftrightarrow x+3+4x+4 = 2x^2+6x+4 \\ &\Leftrightarrow 2x^2+x-3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 5}{4} \end{aligned}$$

Las raíces son:  $x_1 = \frac{-1+5}{4} = 1$  y  $x_2 = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2}$

---

### ECUACIONES QUE SE REDUCEN A CUADRATICAS

Existen ecuaciones que no son cuadráticas, pero mediante un simple cambio de variable la transformamos en cuadrática.

**EJEMPLO 6.** Resolver  $3x^4 - 2x^2(x^2 + 4) + x^2 = -12$

**Solución**

$$\begin{aligned} 3x^4 - 2x^2(x^2 + 4) + x^2 &= -12 \Leftrightarrow 3x^4 - 2x^4 - 8x^2 + x^2 = -12 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \end{aligned}$$

La ecuación  $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$  es de grado 4; pero con cambio de variable  $z = x^2$  la transformamos en una ecuación cuadrática. En efecto:

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0 = z^2 - 7z + 12 = 0$$

Resolvemos la ecuación  $z^2 - 7z + 12 = 0$ :

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(12)}}{2(1)} = \frac{7 \pm 1}{2} \Rightarrow z_1 = 4 \text{ y } z_2 = 3.$$

Ahora, recordando cambio de variable  $z = x^2$ , se tiene:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2. \quad x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3}$$

Luego, la ecuación inicial tiene 4 soluciones:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = \sqrt{3}, \quad x_4 = -\sqrt{3}$$


---

**EJEMPLO 7.** Resolver  $\frac{x^2-12}{x} - \frac{4x}{x^2-12} = 3$

**Solución**

$$\frac{x^2-12}{x} - \frac{4x}{x^2-12} = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2-12}{x} - 4 \frac{x}{x^2-12} = 3$$

Sea  $y = \frac{x^2-12}{x}$ . Entonces

$$\frac{x^2-12}{x} - 4 \frac{x}{x^2-12} = 3 \Leftrightarrow y - \frac{4}{y} = 3 \Leftrightarrow y^2 - 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -1 \text{ ó } y = 4$$

Reemplazando  $y = -1$  en el cambio de variable,

$$-1 = \frac{x^2-12}{x} \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \text{ ó } x = 3$$

Reemplazando  $y = 4$  en el cambio de variable,

$$4 = \frac{x^2-12}{x} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ó } x = 6$$

En conclusión, la ecuación inicial tiene 4 raíces:  $x_1 = -4$ ,  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = 6$ ,

## ECUACIONES RADICALES QUE SE REDUCEN A CUADRATICAS.

### SOLUCIONES EXTRAÑAS

En una ecuación con radicales, se eliminan estos, elevando a los dos miembros de la ecuación a la potencia que indica el índice del radical. Se resuelve la ecuación resultante. Se debe verificar que estas soluciones satisfacen la ecuación inicial. Puede suceder que, al elevar a una potencia los dos miembros de una ecuación se introduzcan soluciones que no satisfacen la ecuación inicial. Estas soluciones son llamadas soluciones extrañas.

**EJEMPLO 8.** Resolver la ecuación  $\sqrt{\sqrt{x} + 2} = \sqrt{2x-4}$

**Solución**

$$\sqrt{\sqrt{x} + 2} = \sqrt{2x-4} \Rightarrow \sqrt{x} + 2 = 2x - 4 \quad (\text{elevando al cuadrado})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2x - 6$$

$$\Rightarrow x = 4x^2 - 24x + 36 \quad (\text{elevando al cuadrado})$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 25x + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(4x-9) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ ó } x = 9/4$$

Se verifica que  $x = 4$  satisface la ecuación inicial, en cambio  $x = 9/4$  no la satisface. Luego,  $x = 9/4$  es una solución extraña y la rechazamos.

En conclusión, la ecuación inicial tiene sólo una solución, que es  $x = 4$ .

## ECUACIONES POLINOMICAS DE GRADO MAYOR QUE DOS

Se conocen fórmulas análogas a la fórmula cuadrática para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado (ver, al final de la sección, Intriga y tragedia en la historia de las ecuaciones de tercer y cuarto grado). Sin embargo éstas fórmulas no son fáciles de manejar, por lo cual aquí no las tocamos. El brillante matemático noruego Neil Abel (1802–1829) probó que no existe fórmula, similar a la fórmula cuadrática, para resolver la ecuación de grado 5.

Nuestra intención en esta parte es mostrar un camino práctico para hallar los raíces de algunas ecuaciones de grados mayores o iguales a 3.

Recordemos el algoritmo de la división.

### ALGORITMO DE LA DIVISION.

Si  $p(x)$  y  $d(x)$  son dos polinomios, y si  $d(x)$  no es polinomio el cero, entonces existen dos únicos polinomios  $q(x)$  y  $r(x)$  tales que

$$p(x) = d(x)q(x) + r(x)$$

donde  $r(x)$  es **cero** o un **polinomio de grado menor** que el de  $d(x)$ .  $p(x)$  es el **dividendo**,  $d(x)$  es el **divisor**,  $q(x)$  es el **cociente** y  $r(x)$  es el **residuo**.

Nuestro interés se concentra en el caso especial en el que  $d(x) = x - c$ . En esta situación, el residuo  $r(x)$ , por ser de grado menor que el grado de  $x - c$ , debe ser una constante, a la denotaremos simplemente con  $r$ . El valor de esta constante lo da el siguiente teorema.

### **TEOREMA 1,8** Teorema del Residuo.

Si el polinomio  $p(x)$  es dividido por  $x - c$ , entonces el valor del residuo es  $p(c)$ . Esto es,

$$p(x) = (x - c)q(x) + p(c)$$

#### **Demostración**

De acuerdo al algoritmo de la división, tenemos:  $p(x) = (x - c)q(x) + r$

Evaluando la igualdad en  $x = c$ :

$$p(c) = (c - c)q(c) + r = (0)q(c) + r \Rightarrow r = p(c)$$

### **EJEMPLO 9.** Hallar el residuo al dividir $p(x) = x^3 - 7x^2 + 3x + 9$ entre $x - 2$

#### **Solución**

Por el teorema anterior:  $r = p(2) = 2^3 - 7(2)^2 + 3(2) + 9 = 8 - 28 + 6 + 9 = -5$

**TEOREMA 1.9** Teorema del factor.

$x - c$  es un factor del polinomio  $p(x) \Leftrightarrow p(c) = 0$

**Demostración**

( $\Rightarrow$ ) Si  $x - c$  es un factor de  $p(x)$ , entonces  $p(x) = (x - c)q(x)$ . Evaluando en  $c$ :

$$p(c) = (c - c)q(c) = (0)q(c) = 0$$

( $\Leftarrow$ ) Sabemos, por el teorema anterior:

$$p(x) = (x - c)q(x) + p(c) = (x - c)q(x) + 0 = (x - c)q(x)$$

Luego,  $x - c$  es un factor de  $p(x)$

**OBSERVACION.** Según el teorema anterior, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1.  $x - c$  es un factor de  $p(x)$
2.  $p(c) = 0$
3.  $c$  es un cero de  $p(x)$
4.  $c$  es una raíz de  $p(x)$
5.  $c$  es una solución de la ecuación  $p(x) = 0$

**EJEMPLO 10.** Factorizar un polinomio mediante el teorema del factor

Sea el polinomio  $p(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ .

- a. Probar que  $-3$  es un cero del polinomio  $p(x)$ .
- b. Usar la parte a. para factorizar el polinomio  $p(x)$ .

**Solución**

a. Tenemos que:

$$p(-3) = (-3)^3 - 4(-3)^2 - 11(-3) + 30 = -27 - 36 + 33 + 30 = 0$$

Luego, por el teorema del factor,  $-3$  es un cero de  $p(x)$ .

b. Dividimos el polinomio  $p(x)$  entre  $x - (-3) = x + 3$ . Para esto, procedemos por el **método abreviado o regla de Ruffini**:

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - 11x + 30 &= (x - (-3))(x^2 - 7x + 10) \\ &= (x + 3)(x^2 - 7x + 10) \end{aligned}$$

Pero,  $x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$ . Luego,

$$x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = (x + 3)(x - 2)(x - 5)$$

	1	-4	-11	30
-3		-3	21	-30
	1	-7	10	0

## TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

¿Toda ecuación polinomial tiene, al menos, una raíz? La respuesta es afirmativa y lo da el llamado **Teorema Fundamental del Álgebra**, que fue demostrado por C. F. Gauss en 1799. Su demostración no es simple y requiera de resultados más avanzado, por lo que la omitimos.

### **TEOREMA 1.10** Teorema Fundamental del Álgebra.

Todo polinomio  $p(x)$  de grado  $n > 0$  tiene al menos una raíz.

Si  $p(x)$  es un polinomio de grado  $n > 0$ , el Teorema Fundamental del Algebra nos dice que existe un  $c_1$ , que es una raíz de  $p(x)$ . Luego, por el teorema del factor,

$$p(x) = (x - c_1)q_1(x),$$

donde el grado de  $q_1(x)$  es  $n - 1$ . Volviendo a aplicar el Teorema Fundamental del Álgebra a  $q_1(x)$ , tenemos que existe  $c_2$ , que es una raíz de  $q_1(x)$ . Luego,

$$p(x) = (x - c_1)(x - c_2)q_2(x),$$

donde el grado de  $q_2(x)$  es  $n - 2$ . Siguiendo el proceso, después de  $n$  pasos tendremos  $n$  ceros de  $p(x)$ ,  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , y un polinomio  $q_n(x)$ , de grado 0 tal que:

$$p(x) = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)q_n(x) \quad (4)$$

El polinomio  $q_n(x)$ , por ser de grado 0, es una constante.

Estos resultados los resumimos en la siguiente proposición:

### **TEOREMA 1.11** Teorema de factorización completa.

Si  $p(x)$  es un polinomio de grado  $n$  con coeficiente principal  $a_n$ , entonces existe  $n$  números complejos,  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , que son ceros de  $p(x)$  y se cumple que:

$$p(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n) \quad (5)$$

#### **Demostración**

Sólo falta probar que, en (4),  $q_n(x) = a_n$ .

Si efectuamos la multiplicación indicada a la derecha de (4) conseguimos un solo término de grado  $n$ , que es  $q_n(x)x^n$ . Similarmente, si efectuamos la multiplicación indicada a la derecha de (5) conseguimos un solo término de grado  $n$ , que es  $a_n x^n$ . En consecuencia,  $q_n(x) = a_n$ .

Las  $n$  raíces  $c_1, c_2, \dots, c_n$  no necesariamente son distintos. Si una raíz se repite  $k$  veces, se dice que esa raíz tiene **multiplicidad  $k$** .

## LOS CEROS RACIONALES DE UN POLINOMIO

Nuestro interés en el este curso de Cálculo se concentra en las funciones reales. En particular, de un polinomio, sólo nos interesan los ceros reales.

El siguiente teorema nos proporciona un camino para hallar los ceros racionales de un polinomio, o sea las raíces reales de una ecuación polinomial.

**TEOREMA 1.12** Los ceros racionales de un polinomio.

Si los coeficientes del siguiente polinomio son enteros

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

y si el racional  $\frac{h}{k}$ , reducido a su mínima expresión, es un cero del polinomio, entonces

1.  $h$  es un divisor del coeficiente constante  $a_0$  y
2.  $k$  es un divisor del coeficiente principal  $a_n$

**Demostración**

Ver el problema resuelto 2.

---

**COROLARIO.** Si el coeficiente principal del polinomio es  $a_n = 1$ , esto es,

$$p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

entonces toda cero racional de  $p(x)$  es un **entero** que divide a  $a_0$

**Demostración**

Si  $\frac{h}{k}$  es un cero de  $p(x)$ , entonces, por el teorema,  $k$  divide a  $a_n = 1$  y, por tanto,  $k = 1$  ó  $k = -1$ . Luego,  $\frac{h}{k} = h$  ó  $\frac{h}{k} = -h$ . Esto es, el cero racional  $h/k$  es el entero  $h$  ó el entero  $-h$ .

---

## ESTRATEGIA PARA HALLAR LOS CEROS RACIONALES

**Paso 1.** Haga un listado de todos los racionales que son candidatos a ceros, de acuerdo al teorema de los ceros racionales de un polinomio. De este listado, identifique cuales son realmente ceros, verificando que  $p(c) = 0$ , donde  $c$  es un candidato.

**Paso 2.** Tome un cero, digamos  $c$ , conseguido en el paso anterior. Divide, (puede ser mediante la regla de Ruffini) el polinomio  $p(x)$  dado en la ecuación entre  $x - c$  y hallar el polinomio cociente  $q(x)$ :

$$p(x) = (x - c)q(x)$$

**Paso 3.** Repetir los pasos 1 y 2 con el cociente  $q(x)$  y conseguir otro cociente. Seguir repitiendo el proceso hasta conseguir un cociente que es cuadrático o un cociente de fácil factorización. Factorice este último cociente, usando la fórmula cuadrática, si es necesario.

**EJEMPLO 11.** Resolver la ecuación siguiente y factorizar el polinomio

$$x^3 - 3x^2 - 5x + 15 = 0$$

**Solución**

**Paso 1.** Las raíces de esta ecuación son los ceros de  $p(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 15$

Como el coeficiente principal es 1, de acuerdo al corolario anterior, los candidatos a ser ceros racionales son los enteros que dividen a 15:

$$1, -1, 3, -3, 5, -5, 15 \text{ y } -15$$

Aplicamos el teorema del factor a estos candidatos.

$$p(1) = 8, \quad p(-1) = 16, \quad p(3) = 0 \quad p(-3) = -24$$

$$p(5) = 40 \quad p(-5) = -150 \quad p(15) = 2,640 \quad p(-15) = 3,960$$

Luego, tenemos sólo un cero racional, que es el entero 3.

**Paso 2.** Dividimos el polinomio

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 15 \text{ entre } x - 3.$$

Luego,

$$x^3 - 3x^2 - 5x + 15 = (x - 3)(x^2 - 5) = 0$$

	1	-3	-5	15
3		3	0	-15
	1	0	-5	0

**Paso 3.** El cociente  $q(x) = x^2 - 5$  es ya un polinomio cuadrático, que se factoriza fácilmente como una diferencia de cuadrados:

$$x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

$$\text{Luego, } x^3 - 3x^2 - 5x + 15 = (x - 3)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$

Las raíces son: 3,  $\sqrt{5}$  y  $-\sqrt{5}$ , una raíz es entera y las otras son irracionales.

**EJEMPLO 12.** Resolver la ecuación siguiente y factorizar el polinomio.

$$2x^4 + x^3 - 9x^2 + 16x - 6 = 0$$

**Solución**

**Paso 1.** Los numeradores posibles son los factores de  $-6$ :  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ .

Los denominadores posibles son los factores de:  $\pm 1, \pm 2$

Racionales candidatos a raíces:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{6}{2}$$

Simplificando y eliminando los candidatos iguales:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$$

Si  $p(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 + 16x - 6$ , se tiene:

$$p(1) = 4 \quad p(-1) = -30 \quad p(2) = 30 \quad p(-2) = -50 \quad p(3) = 150$$

$$p(-3) = 0 \quad p(1/2) = 0 \quad p(-1/2) = -65/4 \quad p(3/2) = 45/4 \quad p(-3/2) = -87/2$$

Vemos que  $p(x)$  tiene sólo dos ceros racionales:  $-3$  y  $1/2$ .

**Pasos 2 y 3.** Dividimos el polinomio  $p(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 + 16x - 6$  entre  $x + 3$  y el cociente entre  $x - 1/2$ :

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 1 & -9 & 16 & -6 \\ -3 & & -6 & 15 & -18 & 6 \\ \hline & 2 & -5 & 6 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 6 & -2 \\ 1/2 & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 2 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x + 3)(2x^3 - 5x^2 + 6x - 2), \quad 2x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = (x - 1/2)(2x^2 - 4x + 4)$$

$$\text{Tenemos: } p(x) = (x + 3)(x - 1/2)(2x^2 - 4x + 4)$$

El polinomio  $2x^2 - 4x + 4$  es de segundo grado, cuyos ceros los hallamos mediante la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(4)}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{4} = \frac{4 \pm 4\sqrt{-1}}{4} = 1 \pm i$$

Luego, por el teorema de factorización completa,

$$2x^2 - 4x + 4 = 2(x - (1 + i))(x - (1 - i)) = 2(x - 1 - i)(x - 1 + i)$$

Finalmente, tenemos que:

$$2x^4 + x^3 - 9x^2 + 16x - 6 = 2(x + 3)(x - 1/2)(x - 1 - i)(x - 1 + i)$$

La ecuación tiene dos raíces racionales,  $-3$ ,  $1/2$ , y dos complejas,  $1 + i$ ,  $1 - i$

**EJEMPLO 13.** Resolver la ecuación siguiente y factorizar el polinomio.

$$4x^3 - 16x^2 + 11x + 10 = 0$$

**Solución**

**Paso 1.** Numeradores posibles (factores de 10):  $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$ .

Denominadores posibles (factores de 4) :  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Racionales candidatos a raíces:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{10}{2}, \pm \frac{4}{5}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{5}{4}, \pm \frac{10}{4}$$

Simplificando y eliminando los candidatos iguales:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{5}{4}$$

Sustituyendo estos candidatos en  $p(x) = 4x^3 - 16x^2 + 11x + 10$ , se tiene:

$$\begin{array}{llll} p(1) = 9 & p(-1) = -21 & p(2) = 0 & p(-2) = -108 \\ p(5) = 165 & p(-5) = -945 & p(10) = 2,520 & p(-10) = -2,500 \\ p(1/2) = 12 & p(-1/2) = 0 & p(1/4) = 189/16 & p(-1/4) = 99/16 \\ p(5/2) = 0 & p(-5/2) = -125 & p(5/4) = 105/16 & p(-5/4) = -805/16 \end{array}$$

La ecuación tiene 3 raíces racionales:  $-1/2$ ,  $2$  y  $5/2$ .

El hecho de que la ecuación dada es de grado 3 y de ella ya conocemos 3 raíces, el teorema de la factorización completa nos ahorra los pasos 2 y 3, ya que, de acuerdo a este teorema:

$$4x^3 - 16x^2 + 11x + 10 = 4(x + 1/2)(x - 2)(x - 5/2) = (2x + 1)(x - 2)(2x - 5)$$

## PROBLEMAS RESULTOS 1.5

**PROBLEMA 1.** Resolver la siguiente ecuación, factorizar el polinomio y señalar la multiplicidad de cada raíz.

$$x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$$

**Solución**

Sea  $p(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$

Como el coeficiente principal es 1, los racionales candidatos a raíces son los enteros divisores del coeficiente constante 1. Estos son: 1 y  $-1$ .

$$p(1) = 1 + 1 - 2 - 2 + 1 + 1 = 0 \qquad p(-1) = -1 + 1 + 2 - 2 - 1 + 1 = 0$$

Tanto 1 y  $-1$  son raíces. Dividimos  $p(x)$  entre  $x-1$  y el cociente  $q_1(x)$  entre  $x+1$ .

$$x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 =$$

$$(x-1)(x+1)(x^3 + x^2 - x - 1)$$

	1	1	-2	-2	1	1
1		1	2	0	-2	-1
	1	2	0	-2	-1	0
-1		-1	-1	1	1	
	1	1	-1	-1	0	

Si 1 es una raíz múltiple esta también debe ser raíz del cociente:

$$q_2(x) = x^3 + x^2 - x - 1$$

Lo mismo afirmamos de la raíz  $-1$ . Veamos:

$$q_2(1) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0 \qquad q_2(-1) = -1 + 1 + 1 - 1 = 0$$

Estos resultados nos dicen que, efectivamente, 1 y  $-1$  son raíces de  $q_2(x)$ .  
 Dividimos este cociente entre  $x - 1$  y nuevo cociente  $q_3(x)$  entre  $x + 1$ .

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)(x + 1)$$

Luego,

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1 \\ = (x - 1)(x + 1)(x - 1)(x + 1)(x + 1) \\ = (x - 1)^2(x + 1)^3 \end{aligned}$$

	1	1	-1	-1
1		1	2	1
	1	2	1	0
-1		-1	-1	
	1	1	0	

La raíces de la ecuación son 1, con multiplicad 2, y  $-1$ , con multiplicidad 3.

**PROBLEMA 2.** Demostrar el teorema de los ceros racionales de un polinomio.

Si los coeficientes del siguiente polinomio son enteros

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

y si el racional  $\frac{h}{k}$ , reducido a su mínima expresión, es un cero del polinomio, entonces

1.  $h$  es un divisor del coeficiente constante  $a_0$  y
2.  $k$  es un divisor del coeficiente principal  $a_n$

**Solución**

Si  $\frac{h}{k}$  es un cero de  $p(x)$ , entonces

$$a_n \left(\frac{h}{k}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{h}{k}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{h}{k}\right) + a_0 = 0$$

Multiplicando por  $k^n$ :

$$a_n h^n + a_{n-1} h^{n-1} k + \dots + a_1 h k^{n-1} + a_0 k^n = 0 \quad (i)$$

1. Transponiendo  $a_0 k^n$  en (i) y factorizando:

$$h(a_n h^{n-1} + a_{n-1} h^{n-2} k + \dots + a_1 k^{n-1}) = -a_0 k^n$$

Esta igualdad nos dice que  $h$  divide a  $a_0 k^n$ . Como  $h$  no divide a  $k$ , tampoco divide a  $k^n$  y, por lo tanto,  $h$  divide a  $a_0$ .

2. Transponiendo  $a_n h^n$  en (i) y factorizando:

$$k(a_{n-1} h^{n-1} + \dots + a_1 h k^{n-2} + a_0 k^{n-1}) = -a_n h^n$$

Esta igualdad nos dice que  $k$  divide a  $a_n h^n$ . Como  $k$  no divide a  $h$ , tampoco divide a  $h^n$  y, por lo tanto,  $k$  divide a  $a_n$ .

## **INTRIGA Y TRAGEDIA EN LA HISTORIA DE LAS ECUACIONES DE TERCER Y CUARTO GRADO**

Los antiguos babilonios ya conocían la fórmula  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ , que nos proporciona las raíces de la ecuación segundo grado  $ax^2 + bx + c = 0$ . Esta fórmula expresa las raíces en términos de radicales.

Por muchos siglos los matemáticos buscaron una fórmula similar a la cuadrática para resolver la ecuación de tercer grado  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ . Esta fórmula es encontrada en el siglo XVI. En este logro jugó un papel sobresaliente **Nicolo Fontana (1500–1557)**.

**NICOLO FONTANA**, más conocido con el sobrenombre de **Tartaglia** (tartamudo), nació en Brescia, Italia.



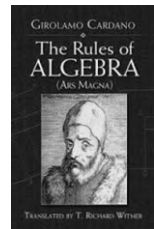
**Tartaglia**

En 1512, los franceses invaden Brescia y masacran a sus habitantes. Nicolo, un niño de 12 años, se refugia en un templo junto con su madre y otros ciudadanos. Entraron los invasores y dieron muerte a casi todos. Nicolo recibió un golpe de espada que le partió parte de su rostro y sus mandíbulas. Sobrevivió esta fatalidad, pero quedó tartamudo.

Alrededor de 1535, **Nicolo** hizo correr la noticia que él había descubierto la fórmula para resolver la ecuación de tercer grado. En Bologna, levantó la voz **Antonio del Fiore**, un discípulo del profesor de Matemáticas de la Universidad de Bologna, **Scipione del Ferro (1465–1526)**. Del Fiore acusa a Tartaglia de impostor y sostiene que fue su maestro quien ya había descubierto la fórmula en 1515. Para dilucidar esta situación, Fiore desafió a Tartaglia a un concurso público. Tartaglia aceptó y ganó el desafío.

La fama de Tartaglia se extendió en toda Italia. En 1539, otro matemático de Milán, **Girolamo Cardano (1501–1526)**, le solicita conocer la fórmula. En un principio, Tartaglia rehusó, pero más tarde acepta después de hacer jurar a Cardano que éste no la revelaría.

En 1545, Girolamo Cardano publicó su famoso libro **Ars Magna** (Arte Mayor) en el cual, aparece la fórmula, sin dar el completo crédito de autoría a Tartaglia. Este, eufórico, desafió a Cardano a un concurso público, que no fue aceptado. El desafío fue respondido por **Ludovico Ferrari (1522–1526)**, discípulo de Cardano. Este concurso fue muy escabroso y de un final no muy claro.



En el libro **Ars Magna** también aparece la fórmula para resolver la ecuación de cuarto grado, que fue hallada por **Ludovico Ferrari**, siguiendo los pasos de la solución de la de tercer grado.

Veamos la fórmula, para resolver la ecuación de tercer grado:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

En primer lugar, el cambio de variable  $x = z - b/3a$  transforma esta ecuación en una de la forma

$$x^3 + qx + r = 0,$$

la cual tiene por solución:

$$x = \left[ -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \right]^{1/3} + \left[ -\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \right]^{1/3}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 1.5

*En los problemas del 1 al 14, resolver las ecuaciones dadas.*

- |   |   |
|---|---|
| 1. $5(x - 3) = 3(x + 7) + x$  | 2. $y - (6 - 2y) = 8(y - 2)$  |
| 3. $\frac{1}{2}(2x - 1) = 3\left(x + \frac{1}{4}\right)$                    | 4. $\frac{x}{4} - \frac{x}{3} = \frac{7}{6} - \frac{4x}{3}$                           |
| 5. $\frac{2x - 1}{5} = \frac{2 + x}{3}$                                     | 6. $\frac{7z + 1}{6} + \frac{3}{2} = \frac{3z}{4}$                                    |
| 7. $\frac{x - 1}{3} - \frac{2 - 3x}{14} = \frac{4x - 3}{7}$                 | 8. $\frac{x - 3}{6} - \frac{2x - 1}{5} = -1$  |
| 9. $\frac{x + 1}{5} + \frac{x + 2}{6} = \frac{x - 1}{4} + \frac{x + 7}{10}$ | 10. $\frac{5x - 2}{3} - \frac{1}{2}(3x - 1) = \frac{9x + 7}{6} - \frac{2}{9}(5x - 1)$ |
| 11. $(x - 3)^2 = (x - 1)^2$   | 12. $(x - 5)(x + 1) = (x + 2)(x - 3) + 13$  |
| 13. $(2x - 5)(x - 1) + x^2 = (3x - 1)(x + 2) + 1$                           |   |
| 14. $8x(x + 2)(x - 1) = (2x + 1)^3 - (2x + 3)^2$                            |   |

*En los problemas del 15 al 22, resolver las ecuaciones literales (despejar x).*

- |   |   |
|---|---|
| 15. $5(5x - a) = a^2(x - 1)$                                  | 16. $a(x + b) + x(b - a) = 2b(2a - x)$  |
| 17. $x^2 + b^2 + b(b - 1) = (x + b)^2$                        | 18. $(x + a)^3 - 2x^3 = 12a^3 - (x - a)^3$  |
| 19. $\frac{x - a}{b} + \frac{x - b}{a} = 2$                   | 20. $\frac{x - 3m}{m^2} + \frac{x - 2m}{mn} = -\frac{1}{m}$                                 |
| 21. $\frac{a - x}{a} - \frac{b - x}{b} = \frac{2(a - b)}{ab}$ | 22. $\frac{x - a}{a + b} + \frac{a + b}{a - b} = \frac{x + b}{a + b} + \frac{x - b}{a - b}$ |

*En los problemas del 23 al 26 despejar la variable indicada en términos de las otras.*

$$23. A = \pi(r^2 + rs), s$$

$$24. S = a \frac{1-r^n}{1-r}, a$$

$$25. S = \frac{f}{H-h}, h$$

$$26. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}, x$$

*En los problemas del 27 al 40, resolver las ecuaciones dadas factorizando.*

$$27. x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$28. x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$29. x^2 + 24 = -11x$$

$$30. 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$31. 9x^2 - 17x - 2 = 0$$

$$32. (2x-1)^2 - (x+5)^2 = -19$$

$$33. (x-5)^2 - (x-4)^2 = (2x+3)^2 + 12$$

$$34. (x-2)^3 - (x+1)^3 = -x(3x+4) - 24$$

$$35. 6x^2 - \frac{5x}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$36. \frac{2(x-5)}{5} + \frac{x-4}{4} = \frac{x^2-53}{5}$$

$$37. x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

$$38. 6y^4 = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{4}$$

$$39. x^{2/3} + x^{1/3} - 6 = 0$$

$$40. 2x^{2/3} + 3x^{1/3} - 2 = 0$$

*En los problemas del 41 al 46, resolver las ecuaciones dadas, mediante la fórmula cuadrática.*

$$41. 9(x-1)^2 = 5$$

$$42. 4\sqrt{3}x - 3 = 4x^2$$

$$43. 2x(2x-3) = -1$$

$$44. (x+15)^2 = 6x(x+5)$$

$$45. x^2 - 2x - (a^2+2a) = 0$$

$$46. \frac{x^2}{2a} - \frac{a+2}{2a}x + 1 = 0$$

*En los problemas del 47 al 60, resolver las ecuaciones fraccionarias dadas.*

$$47. \frac{x-6}{x} = \frac{x+6}{x-6} + \frac{6}{x}$$

$$48. \frac{x}{x+2} - \frac{x}{x-2} = \frac{x-15}{x^2-4}$$

$$49. \frac{1}{3x-3} + \frac{1}{4x+4} = \frac{1}{12x-12}$$

$$50. \frac{4x+1}{4x-1} = \frac{4x-1}{4x+1} + \frac{6}{16x^2-1}$$

$$51. \frac{1}{x} + \frac{1}{4-x} = 1$$

$$52. \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1-x} = 0$$

$$53. \frac{3y-2}{3y+2} = \frac{2y+3}{4y-1}$$

$$54. \frac{x+5}{(x-1)(x+2)} = \frac{2x}{x+2}$$

$$55. \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-3}$$

$$56. \frac{3x}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} = 2$$

$$57. \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - 15 = 0$$

$$58. \frac{12}{x-1} + \frac{12}{x} = 10$$

$$59. \frac{2x}{x-1} = \frac{8}{x-1} - \frac{5}{x}$$

$$60. \frac{1}{x^2-4} + \frac{2x+3}{x+2} + \frac{x+3}{x-2} = 0$$

*En los problemas del 61 al 76, resolver las ecuaciones radicales dadas. Eliminar las soluciones extrañas.*

$$61. 5 - \sqrt{2x+3} = 0$$

$$62. \sqrt{\frac{x}{18} + 1} = \frac{2}{3}$$

$$63. (5x-1)^{1/2} = 7$$

$$64. (y+9)^{3/2} = 4^3$$

$$65. \sqrt{x^2-5} = 5-x$$

$$66. \sqrt{z+7} - \sqrt{z} = 1$$

$$67. \sqrt{9x^2-10x} = 3x-2$$

$$68. \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{8}{4x+1}} = 0$$

$$69. \sqrt{4x+1} + 1 = 2x$$

$$70. \sqrt{x^2+5} = 2x-1$$

$$71. \sqrt{x+5} = 2\sqrt{x} - 1$$

$$72. \sqrt{x} + \sqrt{x-3} = \sqrt{x+5}$$

$$73. \sqrt{x+\sqrt{x+8}} = 2\sqrt{x}$$

$$74. \sqrt{3x-2} = \sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1}$$

$$75. \sqrt{x+1} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = 4$$

$$76. \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$$

*En los problemas 77 y 78, haciendo un cambio de variable, resolver*

$$77. \left(\frac{3x}{x+1}\right)^2 - \frac{6x}{x+1} = 8$$

$$78. \sqrt[3]{\frac{5x+4}{x-1}} + \sqrt[3]{\frac{x-1}{5x+4}} = \frac{5}{2}$$

*En los problemas 79 y 80, usando el teorema del residuo, hallar el residuo cuando se divide:*

$$79. 3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 3x - 2 \text{ entre } x-2 \quad 80. x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \text{ entre } x+2$$

*En los problemas del 81 al 88, hallar las raíces de la ecuación dada y factorice el polinomio correspondiente.*

$$81. x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

$$82. x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

$$83. 4x^3 - 7x^2 + 3 = 0$$

$$84. 2x^3 - 2x^2 - 11x + 2 = 0$$

85.  $x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6 = 0$

86.  $3x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 2 = 0$

87.  $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$

88.  $x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 34x^2 - 45x - 18 = 0$

*En los problemas del 89 al 91, usar el teorema del factor para probar que:*

89.  $x - a$  es un factor de  $x^n - a^n$ , para todo entero positivo  $n$ .

90.  $x + a$  es un factor de  $x^n - a^n$ , para todo entero positivo par  $n$ .

91.  $x + a$  es un factor de  $x^n + a^n$ , para todo entero positivo impar  $n$ .

## SECCION 1.6

### AXIOMAS DE ORDEN. INECUACIONES

#### AXIOMAS DE ORDEN

**O<sub>1</sub>. Ley de la tricotomía.** Todo par de elementos  $a$  y  $b$  de  $\mathbb{R}$  cumple una y sólo una de las tres relaciones siguientes:

$$a = b, \quad a < b \quad \text{ó} \quad b < a$$

**O<sub>2</sub>. Ley transitiva.**

$$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$$

**O<sub>3</sub>. Ley aditiva.**

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

**O<sub>4</sub>. Ley multiplicativa.**

$$a < b \wedge 0 < c \Rightarrow ac < bc$$

Llamaremos **sistema de los números reales** al conjunto  $\mathbb{R}$  provisto de las operaciones de adición y multiplicación, y de la relación de orden “<”, los cuales satisfacen los trece axiomas antes enunciados.

#### ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

A partir de la relación menor establecemos tres relaciones más.

**DEFINICION.** Diremos que:

1.  $a$  es mayor que  $b$ , y escribiremos  $a > b$  si  $b < a$

2.  $a$  es menor o igual a  $b$ , y escribiremos  $a \leq b$  si  $a < b \vee a = b$

3.  $a$  es mayor o igual a  $b$ , y escribiremos  $a \geq b$  si  $a > b \vee a = b$

**DEFINICION.** 1. Un número  $a$  es **negativo** si  $a < 0$  y es **positivo** si  $a > 0$ .

2. Dos números tienen el **mismo signo** si ambos son negativos o ambos son positivos y tienen **signo contrario** si uno es negativo y el otro es positivo.

A continuación presentamos algunos teoremas, los que nos proporcionan algunas propiedades importantes de las desigualdades.

**TEOREMA 1.13.**  $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$

**Demostración**

1.  $a < b \Rightarrow a + c < b + c$  (O<sub>3</sub>)

2.  $c < d \Rightarrow a + c < b + c$  (O<sub>3</sub> y A<sub>1</sub>)

Aplicando O<sub>2</sub> a la conclusiones de los pasos 1 y 2, obtenemos que

$$a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$$


---

**COROLARIO.** La suma de dos números positivos es positiva y la suma de dos números negativos es negativa.

**Demostración**

Sea  $a$  y  $b$  positivos. Eso es,  $0 < a \wedge 0 < b$ .

De acuerdo al teorema anterior,

$$0 + 0 < a + b \text{ y, por lo tanto, } 0 < a + b.$$

Luego,  $a + b$  es positiva.

En forma análogo se procede para el caso de números negativos.

---

**TEOREMA 1.14.**  $a < b \Rightarrow -a > -b$

**Demostración**

$$a < b \Rightarrow a + [(-a) + (-b)] < b + [(-a) + (-b)] \quad (O_3)$$

$$\Rightarrow [a + (-a)] + (-b) < [b + (-b)] + (-a) \quad (A_1 \text{ y } A_2)$$

$$\Rightarrow 0 + (-b) < 0 + (-a) \quad (A_4)$$

$$\Rightarrow -b < -a \quad (A_3)$$

$$\Rightarrow -a > -b \quad (\text{Def. de } >)$$


---

**TEOREMA 1.15.**  $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$

**Demostración**

$$c < 0 \Rightarrow -c > 0 \quad (\text{Teo. 1.14})$$

$$a < b \wedge -c > 0 \Rightarrow a(-c) < b(-c) \quad (O_4)$$

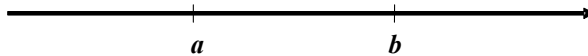
$$\Rightarrow -(ac) < -(bc) \quad (\text{Teo 1.2 parte 3})$$

$$\Rightarrow -(-(ac)) > -(-(bc)) \quad (\text{Teo 1.14})$$

$$\Rightarrow ac > bc \quad (\text{por Teo 1.2, parte 1})$$

## INTERVALOS

De acuerdo a la recta numérica,  $a < b$  significa que el punto que corresponde a  $a$  esta a la izquierda del punto que corresponde a  $b$ .

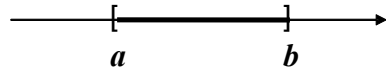


Más adelante aparecerán con frecuencia ciertos conjuntos de números reales llamados **intervalos**, los que a continuación definimos en términos de las relaciones de desigualdad anteriores.

Dados dos números reales  $a$  y  $b$ , se llama:

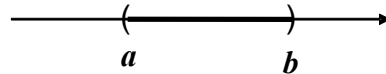
**1. Intervalo cerrado** de extremos  $a$  y  $b$  al conjunto:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$



**2. Intervalo abierto** de extremos  $a$  y  $b$  al conjunto:

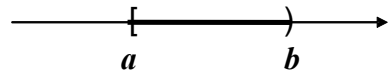
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$



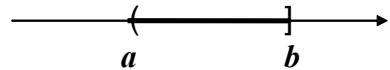
Notar que los extremos de un intervalo cerrado pertenecen al intervalo, mientras que un intervalo abierto excluye a estos extremos.

### Intervalos Semiabiertos

3.  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

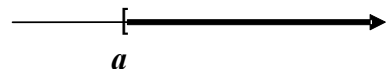


4.  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

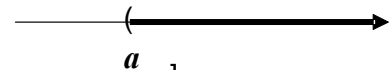


### Intervalos Infinitos

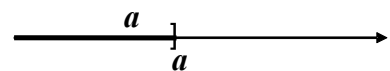
5.  $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x\}$



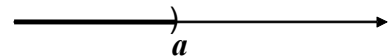
6.  $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / a < x\}$



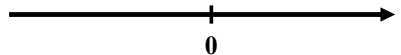
7.  $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$



8.  $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$



9.  $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$



Geoméricamente, el intervalo infinito  $9$  es toda la recta y los intervalos infinitos son semirrectas. Los símbolos  $+\infty$ ,  $-\infty$  son simples notaciones que usamos por comodidad. Ellos no representan ningún número real.

## RESOLUCION DE INECUACIONES

Una desigualdad donde aparecen una o más variables es una **inecuación**. Las inecuaciones que aquí nos interesan son la que tiene **una sola variable**. Se llama **solución** o **conjunto solución** de una inecuación de una variable al conjunto formado por todos los números reales que colocados en lugar de la variable producen proposiciones verdaderas.

Las inecuaciones más simples son las inecuaciones lineales, que son las inecuaciones en las que sólo aparecen polinomios de primer grado. Estas inecuaciones se resuelven fácilmente haciendo uso de las propiedades básicas de las desigualdades. Para resolver inecuaciones expresadas en términos de polinomios de mayor grado o en términos de cocientes de polinomios (funciones racionales) aplicamos el método de Sturm.

### INECUACIONES LINEALES

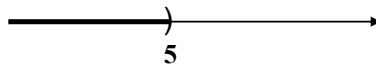
Una **inecuación es lineal** si la máxima potencia de la variable es 1. Estas inecuaciones son fáciles de resolver. Para esto, se despeja la variable haciendo uso de las propiedades básicas de las desigualdades.

**EJEMPLO 1.** Resolver la inecuación:  $5x - 15 < 2x$

**Solución**

$$\begin{aligned} 5x - 15 < 2x &\Leftrightarrow 5x < 2x + 15 && (O_3, \text{ sumando } 15 \text{ a ambos lados}) \\ &\Leftrightarrow 3x < 15 && (O_3, \text{ sumando } -2x \text{ a ambos lados}) \\ &\Leftrightarrow x < 15/3 && (O_4, \text{ multiplicando por } 1/3 \text{ a ambos lados}) \\ &\Leftrightarrow x < 5 \end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución de esta desigualdad es el intervalo  $(-\infty, 5)$



De aquí en adelante las transposiciones las haremos sin mencionarlas.

**EJEMPLO 2.** Resolver  $\frac{x-1}{6} + 2 \leq \frac{x-3}{2} + \frac{x}{3}$

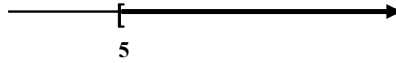
**Solución**

Eliminamos los denominadores. MCD es 6. Luego,

$$6\left(\frac{x-1}{6} + 2\right) \leq 6\left(\frac{x-3}{2} + \frac{x}{3}\right) \Leftrightarrow (x-1) + 12 \leq 3(x-3) + 2x$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x - 1 + 12 &\leq 3x - 9 + 2x \\ \Leftrightarrow -4x &\leq 1 - 12 - 9 \\ \Leftrightarrow -4x &\leq -20 \\ \Leftrightarrow x &\geq \frac{-20}{-4} = 5 \end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución de esta desigualdad es el intervalo  $[5, \infty)$



**EJEMPLO 3.** Resolver:  $4 \leq \frac{5x+1}{4} < 9$

### Solución

En esta expresión, realmente tenemos dos inecuaciones:

$$4 \leq \frac{5x+1}{4} \quad \wedge \quad \frac{5x+1}{4} < 9,$$

las que resolvemos separadamente.

#### 1. Solución de $4 \leq \frac{5x+1}{4}$

$$4 \leq \frac{5x+1}{4} \Leftrightarrow 16 \leq 5x + 1 \Leftrightarrow 16 - 1 \leq 5x \Leftrightarrow 15 \leq 5x \Leftrightarrow 3 \leq x$$

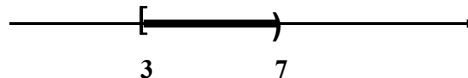
El conjunto solución de esta inecuación es el intervalo  $[3, \infty)$ .

#### 2. Solución de $\frac{5x+1}{4} < 9$

$$\frac{5x+1}{4} < 9 \Leftrightarrow 5x + 1 < 36 \Leftrightarrow 5x < 35 \Leftrightarrow x < 7$$

El conjunto solución de esta inecuación es el intervalo  $(-\infty, 7)$ .

Como cada solución del problema inicial debe ser solución de ambas inecuaciones, el conjunto solución del problema inicial es la intersección de los dos conjuntos de soluciones parciales. Esto es,  $[3, \infty) \cap (-\infty, 7) = [3, 7)$ .



## METODO DE STURM

Veamos, en primer término, como funciona este método en el caso de una inecuación expresada en términos de **polinomios de grados mayores que 1**.

Como primer paso, transponiendo términos trasformamos la inecuación hasta darle una de las cuatro formas siguientes:

1.  $p(x) < 0$
2.  $p(x) > 0$
3.  $p(x) \leq 0$
4.  $p(x) \geq 0$ ,

donde  $p(x)$  es un polinomio de grado 2 o más.

Este método, en esencia, se basa en el siguiente resultado:

**El signo de un polinomio es constante en un intervalo formado por dos raíces consecutivas.**

Dividimos a la recta real en los intervalos, llamados **intervalos de prueba**, determinados por las raíces del polinomio. En estos intervalos de prueba, el polinomio no cambia de signo. Para determinar el signo en uno de estos intervalos de prueba, se toma un valor cualquiera de dicho intervalo en el cual se evalúa el polinomio. A este valor escogido lo llamaremos **valor de prueba**. Los intervalos de prueba se encuentran factorizando el polinomio. Esto es:

$$\text{Si } p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n), \text{ donde } r_1 < r_2 < r_3 < \dots < r_n$$

entonces los intervalos de prueba son

$$(-\infty, r_1), \quad (r_1, r_2), \quad (r_2, r_3), \quad \dots, \quad (r_{n-1}, r_n), \quad (r_n, +\infty)$$

En la recta numérica marcamos los signos para cada intervalo. Esta recta nos da inmediatamente la solución. Si la desigualdad viene expresada mediante las relaciones  $<$  ó  $>$ , todos los intervalos que conforman la solución son abiertos. Si, en cambio, la desigualdad se expresa en términos de  $\geq$  ó  $\leq$ , los intervalos que conforman la solución son cerrados.

**EJEMPLO 4.** Resolver la desigualdad  $x^2 - 2 < 3x + 8$ .

**Solución**

**Paso 1.** Transponemos y factorizamos:

$$x^2 - 2 < 3x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 < 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 5) < 0$$

**Paso 2.** Las raíces de  $p(x) = (x + 2)(x - 5)$  son  $-2$  y  $5$  y los intervalos de prueba:

$$(-\infty, -2), \quad (-2, 5) \text{ y } (5, +\infty)$$

Determinamos el signo de  $p(x) = (x + 2)(x - 5)$  en cada intervalo de prueba.

En  $(-\infty, -2)$  tomamos a  $x = -3$  como valor de prueba y obtenemos:

$$p(-3) = (-3 + 2)(-3 - 5) = +8 \Rightarrow \text{signo de } p(x) \text{ en } (-\infty, -2) \text{ es } +$$

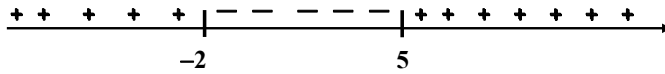
En  $(-2, 5)$  tomamos a  $x = 0$  como valor de prueba y obtenemos:

$$p(0) = (0 + 2)(0 - 5) = -10 \Rightarrow \text{signo de } p(x) \text{ en } (-2, 5) \text{ es } -$$

En  $(5, +\infty)$  tomamos a  $x = 6$  como valor de prueba y obtenemos:

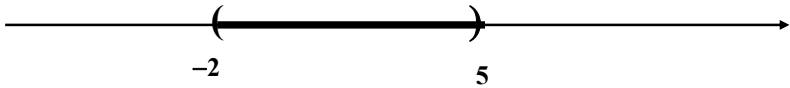
$$p(6) = (6 + 2)(6 - 5) = +12 \Rightarrow \text{signo de } p(x) \text{ en } (5, +\infty) \text{ es } +$$

Las raíces y los signos en los intervalos de prueba los consignamos en la recta numérica. Así:



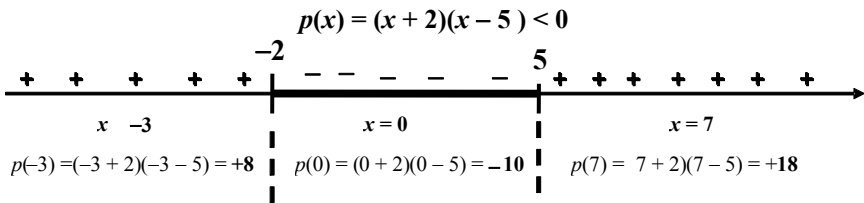
**Paso 3.** La figura nos dice que  $p(x)$  es negativo, o sea  $p(x) < 0$ , en el intervalo  $(-2, 5)$ .

Luego, el conjunto solución es el intervalo  $(-2, 5)$



**CONVENCION.**

Con el ánimo de simplificar, en los ejemplos venideros no especificaremos los pasos. Además, los cálculos y la figura del paso 3 lo sintetizaremos en una figura como la siguiente:



**EJEMPLO 5.**

Resolver  $(x - 1)(2 - 3x) \leq (2x + 7)(x - 2) - 4$

**Solución**

$$(x - 1)(2 - 3x) \leq (2x + 7)(x - 2) - 4 \Leftrightarrow 2x - 3x^2 - 2 + 3x \leq 2x^2 - 4x + 7x - 14 - 4$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 5x - 2 \leq 2x^2 + 3x - 18$$

$$\Leftrightarrow -5x^2 + 2x + 16 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 2x - 16 \geq 0$$

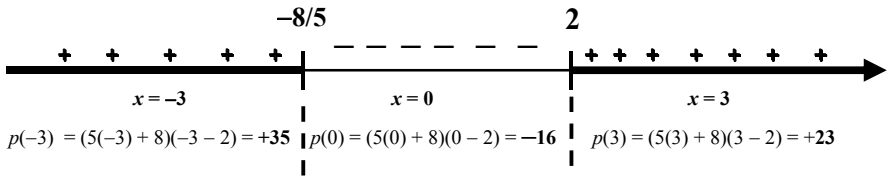
$$\Leftrightarrow (5x + 8)(x - 2) \geq 0$$

Hallems las raíces de  $p(x) = (5x + 8)(x - 2)$ :

$$(5x + 8)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow 5x + 8 = 0 \quad \text{ó} \quad x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -8/5 \quad \text{ó} \quad x = 2$$

Luego, los intervalos de prueba son:  $(-\infty, -8/5)$ ,  $(-8/5, 2)$  y  $(2, +\infty)$

$$p(x) = (5x + 8)(x - 2) \geq 0$$



El conjunto solución es  $(-\infty, -8/5] \cup [2, \infty)$ .

**EJEMPLO 6.** Resolver  $3x^3 - 6x > 7x^2$

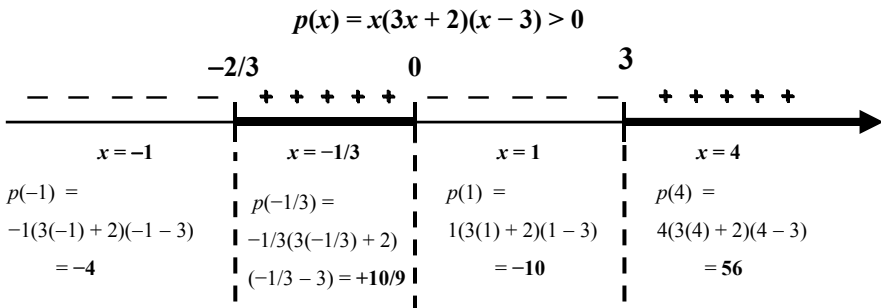
**Solución**

$$3x^3 - 6x > 7x^2 \Leftrightarrow 3x^3 - 7x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x(3x^2 - 7x - 6) > 0 \Leftrightarrow x(3x + 2)(x - 3) > 0$$

Hallamos las raíces de  $p(x) = x(3x + 2)(x - 3)$ :

$$x(3x + 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad 3x + 2 = 0 \text{ ó } x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad x = -\frac{2}{3} \text{ ó } x = 3$$

Luego, los intervalos de prueba son  $(-\infty, -2/3)$ ,  $(-2/3, 3)$  y  $(3, +\infty)$



El conjunto solución es  $(-2/3, 0) \cup (3, \infty)$

### INECUACIONES RACIONALES

Se llama **función racional a un cociente de polinomios**. Para resolver una inecuación expresada en términos de funciones racionales mediante el método se Sturm se siguen los mismos tres pasos dados en la solución de inecuaciones polinómicas, sólo con el agregado que ahora se trabaja con dos polinomios, que son el numerador y el denominador.

**Paso 1.** Se transforma algebraicamente la inecuación hasta obtener una expresión de la forma siguiente, donde los polinomios  $p(x)$  y  $q(x)$  están factorizados,

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0, \quad \frac{p(x)}{q(x)} \geq 0, \quad \frac{p(x)}{q(x)} < 0 \quad \text{ó} \quad \frac{p(x)}{q(x)} \leq 0$$

**Paso 2.** Se hallan las raíces de  $p(x) = 0$  y de  $q(x) = 0$ .

**Paso 3.** Marcamos en la recta numérica las raíces halladas en el paso 2, así como el signo de  $\frac{p(x)}{q(x)}$  en cada intervalo en que ha quedado dividida la recta. Para hallar el signo se puede usar valores de prueba.

Determinar el conjunto solución observando los signos de la recta numérica. Si la desigualdad viene expresada mediante las relaciones  $<$  ó  $>$ , todos los intervalos que conforman la solución son abiertos. Si, en cambio, la desigualdad se expresa en términos de  $\geq$  ó  $\leq$ , los intervalos que conforman la solución son cerrados en los extremos que corresponden a raíces del numerador y abiertos en los extremos correspondientes a raíces del denominador.

**EJEMPLO 7.** Resolver la desigualdad  $\frac{x+3}{1-x} \geq -3$

### Solución

**Paso 1.** Transponemos y factorizamos:

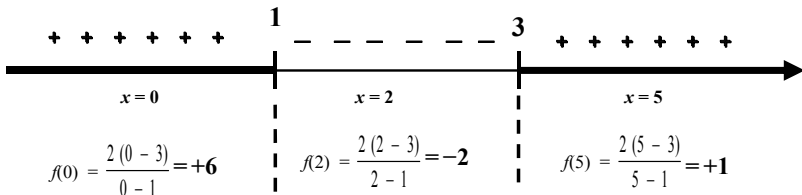
$$\frac{x+3}{1-x} \geq -3 \Leftrightarrow \frac{x+3}{1-x} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+3+3(1-x)}{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-3)}{x-1} \geq 0$$

**Paso 2.** Raíces del numerador y del denominador.

$$2(x-3) = 0 \wedge x-1 = 0 \Leftrightarrow x=3 \wedge x=1.$$

**Paso 3.** Los intervalos de prueba son:  $(-\infty, 1)$ ,  $(1, 3)$  y  $(3, +\infty)$

Signo de  $f(x) = \frac{2(x-3)}{x-1}$  en cada uno de los intervalos anteriores es:



El conjunto solución es  $(-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$ .

Observar en la solución que en el extremo correspondiente a 3 tomamos el intervalo cerrado. Esto debido a que la desigualdad viene expresada en términos de la relación  $\geq$  y a que 3 es una raíz del numerador.

**EJEMPLO 8.** Resolver  $\frac{3x+1}{x-1} \leq \frac{2x+7}{x+2}$

### Solución

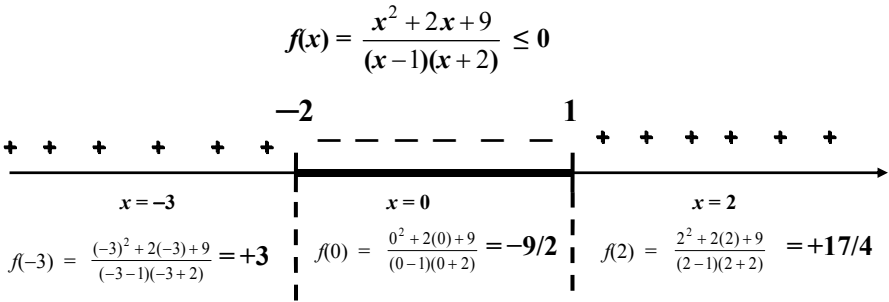
En busca de brevedad, los pasos requeridos para resolver la desigualdad se presentarán implícitamente.

$$\frac{3x+1}{x-1} \leq \frac{2x+7}{x+2} \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-1} - \frac{2x+7}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+2)(3x+1) - (x-1)(2x+7)}{(x-1)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 9}{(x-1)(x+2)} \leq 0$$

El numerador de la última fracción es un polinomio de segundo grado con raíces complejas (su discriminante es negativo:  $b^2 - 4ac < 0$ ). Esto significa que este polinomio no tiene raíces reales y, por tanto, no se puede factorizar en términos de números reales. Las raíces del denominador son  $-2$  y  $1$ .

Las raíces  $-2$  y  $1$  determinan los intervalos:  $(-\infty, -2)$ ,  $(-2, 1)$  y  $(1, +\infty)$



El conjunto solución es  $(-2, 1)$

**EJEMPLO 9.** Resolver  $\frac{4}{x} < x \leq \frac{20}{x-1}$

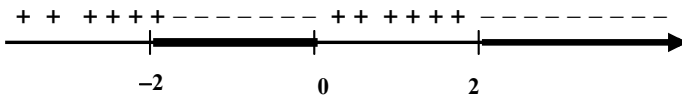
**Solución**

En esta expresión tenemos dos inecuaciones:  $\frac{4}{x} < x$  y  $x \leq \frac{20}{x-1}$

**1. Solución de  $\frac{4}{x} < x$**

$$\frac{4}{x} < x \Leftrightarrow \frac{4}{x} - x < 0 \Leftrightarrow \frac{4 - x^2}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(2-x)(2+x)}{x} < 0$$

Las raíces son:  $-2, 0$  y  $2$ . Mediante valores de prueba hallamos que:



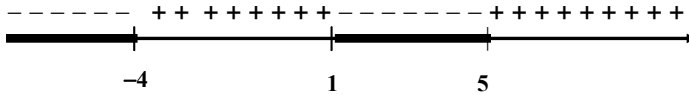
Luego la solución de esta desigualdad es  $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

**2. Solución de  $x \leq \frac{20}{x-1}$**

$$x \leq \frac{20}{x-1} \Leftrightarrow x - \frac{20}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1) - 20}{x-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 20}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)(x+4)}{x-1} \leq 0$$

Las raíces son:  $-4$ ,  $1$  y  $5$ . Mediante valores de prueba hallamos que:



Luego, la solución de esta desigualdad es  $(-\infty, -4] \cup (1, 5]$ .

**3. Solución total.** La solución total es la intersección de las soluciones parciales:

$$\left[(-2, 0) \cup (2, +\infty)\right] \cap \left[(-\infty, -4] \cup (1, 5]\right] = (2, 5].$$

**EJEMPLO 10.**

En cierto día, la temperatura Celsius de una ciudad cambió según el intervalo  $25 \leq C \leq 40$ . ¿En que intervalo cambió la temperatura ese día en grados Fahrenheit ( $F$ )? Se sabe que:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

**Solución**

$$25 \leq C \leq 40 \Rightarrow 25 \leq \frac{5}{9}(F - 32) \leq 40 \Rightarrow 25(9) \leq 5(F - 32) \leq 40(9) \Rightarrow$$

$$225 \leq 5F - 160 \leq 360 \Rightarrow 225 + 160 \leq 5F \leq 360 + 160 \Rightarrow$$

$$385 \leq 5F \leq 520 \Rightarrow \frac{385}{5} \leq F \leq \frac{520}{5} \Rightarrow 77 \leq F \leq 104$$

**¿SABIA QUE...**

**JACQUES CHARLES FRANÇOIS STURM (1803–1855)** nació en Ginebra, Suiza, en 1803. Estudió matemáticas en la Academia de Ginebra. En 1833 se hizo ciudadano francés y en 1836 fue incorporado a la Academia de Ciencias de París. Fue amigo de Laplace, Poisson, Fourier, Ampere y otros científicos franceses notables. En 1829 publicó su trabajo más conocido, *Mémoires sur la résolution des équations numériques*, que tiene que ver con la determinación del número de raíces reales de una ecuación en un intervalo.



## PROBLEMAS RESUELTOS 1.6

**PROBLEMA 1.** Resolver  $x^3 - 5x^2 + 3x + 9 > 0$

**Solución**

Factoricemos  $p(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$

Las posibles raíces enteras de este polinomio son los divisores de 9:  $\pm 1, \pm 3$  y  $\pm 9$ .

$P(-1) = 0, P(1) = 8, P(-3) = -72, P(3) = 0, P(-9) = -1.152, P(9) = 360$

Vemos que  $p(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$  tiene dos raíces enteras:  $-1$  y  $3$ .

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -5 & 3 & 9 \\
 -1 & & -1 & 6 & -9 \\
 \hline
 & 1 & -6 & 9 & 0
 \end{array}$$

Dividimos  $x^3 - 5x^2 + 3x + 9$  entre

$$x - (-1) = x + 1$$

Tenemos que:

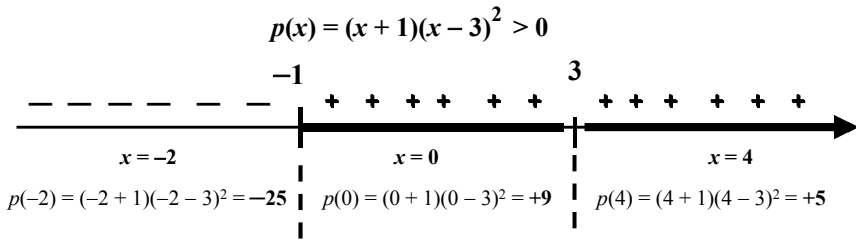
$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = (x + 1)(x^2 - 6x + 9) = (x + 1)(x - 3)^2$$

Esto es,  $p(x) = (x + 1)(x - 3)^2$

Vemos que  $x = 3$  es una raíz de multiplicidad 2.

Aplicamos el método de Sturm:

Los intervalos de prueba son  $(-\infty, -1), (-1, 3)$  y  $(3, \infty)$



El conjunto solución es  $(-1, 3) \cup (3, \infty)$

**PROBLEMA 2.** Se quiere construir una caja sin tapa de una lámina rectangular de 40 cm. de largo por 30 cm. de ancho. Para esto, se debe cortar de cada esquina de la lámina un cuadrado de lado  $x$  cm. para luego doblar las aletas. Hallar la máxima longitud  $x$  del cuadrado si se quiere que el área de la base de la caja tenga, por lo menos,  $600 \text{ cm}^2$ .

**Solución**

Si  $x$  es el lado del cuadrado que se corta, entonces

El largo de la base es  $= 40 - 2x$

El ancho de la base es  $= 30 - 2x$

El área de la base es  $= (40 - 2x)(30 - 2x)$

Se debe cumplir que:

$$(40 - 2x)(30 - 2x) \geq 600$$

Resolvemos la inecuación:

$$(40 - 2x)(30 - 2x) \geq 600 \Leftrightarrow 1200 - 140x + 4x^2 \geq 600$$

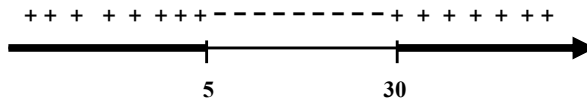
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 140x + 600 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 35x + 150 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(x - 30) \geq 0$$

Las raíces de  $(x - 5)(x - 30) = 0$  son  $x = 5$  y  $x = 30$

Tomando valores de prueba obtenemos la siguiente gráfica:

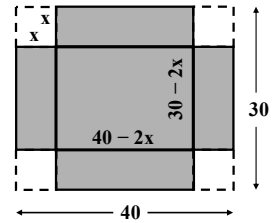


Luego, el conjunto solución es  $(-\infty, 5] \cup [30, \infty)$ .

Para nuestro problema, las soluciones del intervalo  $[30, \infty)$  las desechamos, porque éstas nos darían longitudes negativas para la base: Así, para  $x = 30$  el ancho sería  $30 - 2(30) = -30$ .

En consecuencia, el conjunto solución para este problema es  $(0, 5]$ .

En el intervalo  $(0, 5]$ , el máximo es 5. Por lo tanto, la máxima longitud del lado del cuadrado que se corta es 5 cm.



## PROBLEMAS PROPUESTOS 1.6

*En los problemas del 1 al 21 resolver la desigualdad dada. Ilustre la gráfica del conjunto solución.*

1.  $4x - 5 < 2x + 3$

2.  $2(x - 5) - 3 > 5(x + 4) - 1$

3.  $\frac{2x-5}{3} - 3 > 1$

4.  $\frac{5x-1}{4} - \frac{x+1}{3} \leq \frac{3x-13}{10}$

5.  $8 \geq \frac{2x-5}{3} - 3 > 1 - x$

6.  $5 < \frac{x-1}{-2} < 10$

7.  $(x - 3)(x + 2) < 0$

8.  $x^2 - 1 < 0$                       9.  $x^2 + 2x - 20 \geq 0$                       10.  $2x^2 + 5x - 3 > 0$
11.  $9x - 2 < 9x^2$                       12.  $(x - 2)(x - 5) < -2$                       13.  $(x + 2)(x - 1)(x + 3) \geq 0$
14.  $\frac{x - 2}{x + 2} \leq 0$                       15.  $\frac{2}{x} \leq -\frac{3}{5}$                       16.  $\frac{2}{x - 1} \leq -3$
17.  $\frac{x}{2} + \frac{1}{x} \leq \frac{3}{x}$                       18.  $\frac{1}{x + 1} - \frac{x - 2}{3} \geq 1$                       19.  $\frac{x - 1}{x + 3} < \frac{x + 2}{x}$
20.  $\frac{x + 1}{1 - x} < \frac{x}{2 + x}$                       21.  $\frac{4 - 2x}{x^2 + 2} > 2 - \frac{x}{x - 3}$

22. En cierto día la temperatura Celsius de una ciudad varió según el intervalo  $5 \leq C \leq 20$  ¿En que intervalo cambió la temperatura ese día en grados Fahrenheit?

23. En cierto día la temperatura Fahrenheit de una ciudad varió según el intervalo  $59 \leq F \leq 95$  ¿En que intervalo cambió la temperatura ese día en grados Celcius?

24. (**Longitud máxima**) Se quiere construir una caja sin tapa de una lámina rectangular de 52 cm. de largo por 42 cm. de ancho. Para esto, se debe cortar de cada esquina de la lámina un cuadrado de lado  $x$  cm. para luego doblar las aletas. Hallar la máxima longitud  $x$  del cuadrado si se quiere que el área de la base de la caja tenga, por lo menos, 1,200  $\text{cm}^2$ .

*En los problemas del 24 al 30, probar la proposición dada.*

25.  $a < b \wedge c > d \Rightarrow a - c < b - d$
26.  $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$                       27.  $a > 1 \Rightarrow a^2 > a$
28.  $0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < a$                       29.  $0 < a < b \wedge 0 < c < d \Rightarrow ac < bd$
30.  $a \neq 0 \Rightarrow a$  y  $a^{-1}$  tienen el mismo signo (ambos son positivos o ambos negativos).
31. Se llama **media aritmética** de dos números  $a$  y  $b$  al número  $\frac{a + b}{2}$ . Probar que la media aritmética de dos números está entre los números. Esto es, probar:

$$a < b \Rightarrow a < \frac{a + b}{2} < b$$

32. Se llama **media geométrica** de dos números positivos  $a$  y  $b$  al número  $\sqrt{ab}$ . Probar que la media geométrica de dos números está entre los números. Esto es, probar:  $0 < a < b \Rightarrow a < \sqrt{ab} < b$

33. Probar que  $\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}$ , donde  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$ . Sugerencia:  $0 \leq (a - b)^2$ .

## SECCION 1.7

### VALOR ABSOLUTO

**DEFINICION.** El **valor absoluto** de un número real  $a$  es el número real

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

O sea, el valor absoluto de un número real es igual al mismo número si éste es 0 ó positivo y es igual a su inverso aditivo si es negativo.

Considerando que  $\sqrt{x^2}$  es la raíz cuadrada positiva de  $x^2$ , tenemos que

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

- EJEMPLO 1.** 1.  $|0| = 0$       2.  $|8| = 8$       3.  $|-5| = -(-5) = 5$   
 4.  $|\sqrt{2} - 3| = -(\sqrt{2} - 3) = 3 - \sqrt{2}$ , ya que  $\sqrt{2} - 3 < 0$
- 

De la definición obtenemos inmediatamente que:

- TEOREMA 1.16** 1.  $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$       2.  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$   
 3.  $-|x| \leq x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$   
 4. Si  $a \geq 0$ , entonces  $|x| = a \Leftrightarrow x = a$  ó  $x = -a$
- 

**EJEMPLO 2.** Resolver la ecuación  $|x - 3| = 1$

**Solución**

De acuerdo a la propiedad 4 anterior tenemos que:

$$|x - 3| = 1 \Leftrightarrow x - 3 = 1 \quad \text{ó} \quad x - 3 = -1 \Leftrightarrow x = 4 \quad \text{ó} \quad x = 2.$$


---

**EJEMPLO 3.** Resolver las ecuaciones:

- a.  $|2x - 3| = 3x - 6$       b.  $|2x - 3| = 6 - 3x$

**Solución**

- a. En primer lugar, como el valor absoluto no es negativo, la expresión  $3x - 6$  también tiene que ser no negativa. Esto es, debemos tener que:

$$3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 2$$

Ahora, de acuerdo a la propiedad 4 anterior, tenemos:

$$2x - 3 = 3x - 6 \quad \text{ó} \quad 2x - 3 = -(3x - 6) \Leftrightarrow -x = -3 \quad \text{ó} \quad 5x = 9$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ó} \quad x = 9/5$$

De estas dos posibles soluciones deseamos  $x = 9/5$ , debido a que no cumple la condición  $x \geq 2$ . Luego, la ecuación tiene una sola solución, que es  $x = 3$ .

- b. Debemos, en primer lugar, tener que:

$$6 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow 6 \geq 3x \Leftrightarrow 2 \geq x \Leftrightarrow x \leq 2$$

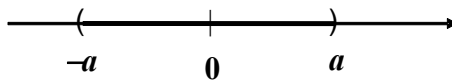
Ahora, de acuerdo a la propiedad 4 anterior, tenemos:

$$2x - 3 = 6 - 3x \quad \text{ó} \quad 2x - 3 = -(6 - 3x) \Leftrightarrow 5x = 9 \quad \text{ó} \quad -x = -3$$

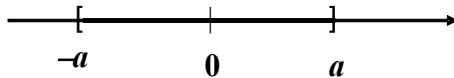
$$\Leftrightarrow x = 9/5 \quad \text{ó} \quad x = 3$$

De estas dos posibles soluciones deseamos a  $x = 3$ , debido a que no cumple la condición  $x \leq 2$ . Luego, la ecuación tiene una sola solución,  $x = 9/5$ .

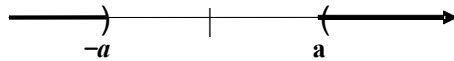
**TEOREMA 1.17** 1. Si  $a > 0$ , entonces  $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$



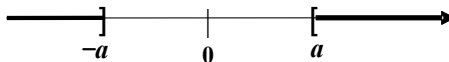
2. Si  $a \geq 0$ , entonces  $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$



3.  $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \quad \text{ó} \quad x > a$



4.  $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \quad \vee \quad x \geq a$



**Demostración**

Ver el problema resuelto 2.

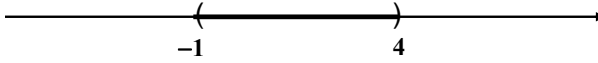
**EJEMPLO 3.** Resolver la inecuación  $|2x - 3| < 5$

**Solución**

De acuerdo a la parte 1 del teorema anterior tenemos:

$$|2x - 3| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x - 3 < 5 \Leftrightarrow -2 < 2x < 8 \Leftrightarrow -1 < x < 4$$

O sea, el conjunto solución es el intervalo  $(-1, 4)$



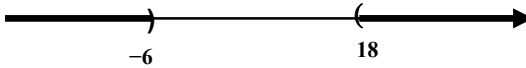
**EJEMPLO 4.** Resolver la inecuación  $\left| \frac{x}{3} - 2 \right| > 4$

**Solución**

De acuerdo a la parte 3 del teorema anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x}{3} - 2 \right| > 4 &\Leftrightarrow \frac{x}{3} - 2 < -4 \quad \text{ó} \quad \frac{x}{3} - 2 > 4 \Leftrightarrow \frac{x}{3} < -2 \quad \text{ó} \quad \frac{x}{3} > 6 \\ &\Leftrightarrow x < -6 \quad \text{ó} \quad x > 18 \end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución es  $(-\infty, -6) \cup (18, +\infty)$



**EJEMPLO 5.** Resolver la inecuación  $|7x - 2| \leq 3x + 6$

**Solución**

Aplicamos la parte 2 del teorema anterior. En primer lugar, debemos tener que:

$$3x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \quad (1)$$

$$\text{Ahora, } |7x - 2| \leq 3x + 6 \Leftrightarrow -(3x + 6) \leq 7x - 2 \leq 3x + 6$$

$$\Leftrightarrow -3x - 6 \leq 7x - 2 \quad \wedge \quad 7x - 2 \leq 3x + 6$$

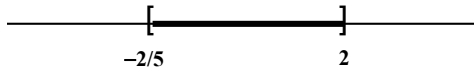
$$\Leftrightarrow -10x \leq 4 \quad \wedge \quad 4x \leq 8$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2/5 \quad \wedge \quad x \leq 2 \quad (2)$$

Las soluciones de la inecuación inicial deben satisfacer las tres condiciones:

$$x > -2, \quad x \geq -2/5 \quad \text{y} \quad x \leq 2$$

En consecuencia, el conjunto solución es el intervalo  $[-2/5, 2]$



**OTRAS PROPIEDADES IMPORTANTES DEL VALOR ABSOLUTO**

**TEOREMA 1.18** Si  $x$  y  $y$  son números reales y  $n$  es un número natural, entonces

1.  $|xy| = |x||y|$
2.  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ ,  $y \neq 0$
3.  $|x^n| = |x|^n$
4.  $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$
5. **Desigualdad triangular:**  
 $|x + y| \leq |x| + |y|$

**Demostración**

Ver el problema resuelto 4.

**EJEMPLO 6.** Resolver la inecuación  $\left| \frac{x+4}{x-3} \right| < 1$

**Solución**

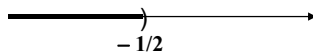
Aplicando la propiedad 2 del teorema anterior:

$$\left| \frac{x+4}{x-3} \right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|x+4|}{|x-3|} < 1 \Leftrightarrow |x+4| < |x-3|$$

Ahora, Aplicando la propiedad 4 del teorema anterior:

$$\begin{aligned} |x+4| < |x-3| &\Leftrightarrow (x+4)^2 < (x-3)^2 && \text{(prop. 4)} \\ &\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 < x^2 - 6x + 9 \\ &\Leftrightarrow 14x < -7 \Leftrightarrow x < -1/2 \end{aligned}$$

El conjunto solución es  $(-\infty, -1/2)$ .



**DIVIDE Y CONQUISTARAS**

Llamaremos “divide y conquistarás” al siguiente método, que nos permite deshacernos del símbolo del valor absoluto y, de este modo, podemos resolver inecuaciones un tanto más complicadas.

Dividimos la resta numérica en intervalos, los que son determinados por las raíces de las expresiones encerrados en valores absolutos. Resolvemos la inecuación en cada intervalo. La solución de la inecuación inicial es la unión de las soluciones en los intervalos. Procedemos en forma detallada, para que sirva de modelo para otros problemas.

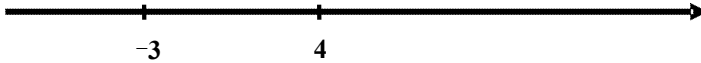
**EJEMPLO 7.** Resolver la inecuación  $|x + 3| < 1 + |x - 4|$

**Solución**

Dividimos a la recta en intervalos. Las raíces de las expresiones encerradas en valores absolutos son:

$$x + 3 = 0 \wedge x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \wedge x = 4.$$

Estas raíces dividen a la recta en los intervalos:  $(-\infty, -3)$ ,  $[-3, 4)$  y  $[4, \infty)$



Resolvemos la desigualdad en cada uno de estos intervalos.

**En el intervalo  $(-\infty, -3)$ :**  $x + 3 < 0 \wedge x - 4 < 0$ . Luego,

$$\begin{aligned} |x + 3| < 1 + |x - 4| &\Leftrightarrow -(x + 3) < 1 - (x - 4) \Leftrightarrow -x - 3 < 1 - x + 4 \\ &\Leftrightarrow -3 < 5 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \infty) \end{aligned}$$

El conjunto solución en el intervalo  $(-\infty, -3)$  es

$$(-\infty, -3) \cap (-\infty, \infty) = (-\infty, -3)$$

**En el intervalo  $[-3, 4)$ :**  $x + 3 \geq 0 \wedge x - 4 < 0$ . Luego,

$$\begin{aligned} |x + 3| < 1 + |x - 4| &\Leftrightarrow x + 3 < 1 - (x - 4) \Leftrightarrow x + 3 < 1 - x + 4 \\ &\Leftrightarrow 2x < 2 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \end{aligned}$$

El conjunto solución en el intervalo  $[-3, 4)$  es

$$[-3, 4) \cap (-\infty, 1) = [-3, 1)$$

**En el intervalo  $[4, +\infty)$ :**  $x + 3 \geq 0 \wedge x - 4 \geq 0$ . Luego,

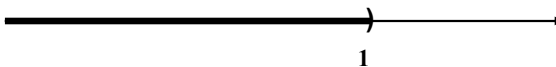
$$|x + 3| < 1 + |x - 4| \Leftrightarrow x + 3 < 1 + x - 4 \Leftrightarrow 3 < -3 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

El conjunto solución en el intervalo  $[4, +\infty)$  es

$$[4, +\infty) \cap \emptyset = \emptyset$$

La solución total es la unión de las soluciones parciales. Esto es, la solución de la inecuación inicial es

$$(-\infty, -3) \cup [-3, 1) \cup \emptyset = (-\infty, 1)$$



**EJEMPLO 8.** Hallar un número  $M$  tal que

$$|x - 2| < 1 \Rightarrow |x^2 + 4x - 6| < M$$

**Solución**

Aplicando la desigualdad triangular tenemos que

$$|x^2 + 4x - 6| < |x^2| + |4x - 6|$$

$$< |x^2| + |4x| + |6| = |x|^2 + 4|x| + 6$$

O sea

$$|x^2 + 4x - 6| < |x|^2 + 4|x| + 6 \quad (1)$$

Por otro lado,

$$|x - 2| < 1 \Rightarrow -1 < x - 2 < 1 \Rightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow |x| < 3$$

$$\Rightarrow |x|^2 < 9 \quad \wedge \quad 4|x| < 12$$

De estas desigualdades y de la desigualdad (1) se tiene:

$$|x - 2| < 1 \Rightarrow |x^2 + 4x - 6| < 9 + 12 + 6 = 27$$

El número  $M = 27$  satisface la condición pedida.

## PROBLEMAS RESUELTOS 1.7

**PROBLEMA 1.** Resolver la ecuación  $\left| \frac{3x-2}{x-2} \right| = 2$

**Solución**

Aplicamos la propiedad 4 del teorema 1.16:

$$\left| \frac{3x-2}{x-2} \right| = 2 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x-2} = 2 \quad \text{ó} \quad \frac{3x-2}{x-2} = -2$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2 = 2(x - 2) \quad \text{ó} \quad 3x - 2 = -2(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2 = 2x - 4 \quad \text{ó} \quad 3x - 2 = -2x + 4$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ó} \quad 5x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ó} \quad x = 6/5$$

**PROBLEMA 2.** Resolver la inecuación  $|3x - 2| > 2x + 12$

**Solución**

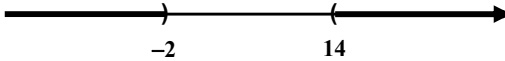
Aplicamos la propiedad 3 del teorema 1.17:

$$|3x - 2| > 2x + 12 \Leftrightarrow 3x - 2 < -(2x + 12) \quad \text{ó} \quad 3x - 2 > 2x + 12$$

$$\Leftrightarrow 5x < -10 \quad \text{ó} \quad x > 14$$

$$\Leftrightarrow x < -2 \quad \text{ó} \quad x > 14$$

Luego, la solución es  $(-\infty, -2) \cup (14, \infty)$



**PROBLEMA 3.** Probar el teorema 1.17:

1. Si  $a > 0$ , entonces  $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
2. Si  $a > 0$ , entonces,  $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
3.  $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ ó } x > a$
4.  $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ó } x \geq a$

**Solución**

1. Como  $-x \leq |x| \wedge x \leq |x|$ , tenemos que

$$|x| < a \Leftrightarrow -x < a \wedge x < a \Leftrightarrow -a < x \wedge x < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

2. Similar a 1.

3. Como  $|x| = -x$  ó  $|x| = x$ , tenemos que

$$|x| > a \Leftrightarrow -x > a \text{ ó } x > a \Leftrightarrow x < -a \text{ ó } x > a$$

4. Similar a 3.

**PROBLEMA 4.** Probar el teorema 1.18:

Si  $x$  y  $y$  son números reales y  $n$  es un número natural, entonces

1.  $|xy| = |x||y|$
2.  $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ ,  $y \neq 0$
3.  $|x^n| = |x|^n$
4.  $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$
5. **Desigualdad triangular:**  $|x + y| \leq |x| + |y|$

**Solución**

1.  $|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{x^2} \sqrt{y^2} = |x||y|$

2. Sea  $\frac{x}{y} = z$ . Luego,

$$x = yz \Rightarrow |x| = |yz| = |y||z| \Rightarrow \frac{|x|}{|y|} = |z| = \left| \frac{x}{y} \right|$$

3. Si  $n = 0$ , entonces  $|x^0| = |1| = 1$  y  $|x|^0 = 1$ . Luego,  $|x^0| = |x|^0$

$$\text{Si } n > 0, |x^n| = \underbrace{|x \cdot x \cdot \dots \cdot x|}_n = \underbrace{|x| \cdot |x| \cdot |x| \cdot \dots \cdot |x|}_n = |x|^n$$

4. ( $\Rightarrow$ )  $|x| < |y| \Rightarrow |x||x| < |x||y|$  y  $|x||y| < |y||y|$  (O<sub>4</sub>)  
 $\Rightarrow |x|^2 < |y|^2 \Rightarrow x^2 < y^2$

( $\Leftarrow$ )  $x^2 < y^2 \Rightarrow |x|^2 < |y|^2 \Rightarrow |x|^2 - |y|^2 < 0$   
 $\Rightarrow (|x| - |y|)(|x| + |y|) < 0$   
 $\Rightarrow |x| - |y| < 0 \Rightarrow |x| < |y|$

5. Tenemos que:

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad \text{y} \quad -|y| \leq y \leq |y|$$

Sumando estas desigualdades:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

Aplicando la parte 2 del problema anterior obtenemos:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

**PROBLEMA 5.** Hallar un número  $M$  tal que

$$|x - 1| < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{|x + 3|}{|x - 1/4|} < M$$

**Solución**

$$|x - 1| < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} < x - 1 < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4} &\Rightarrow \frac{3}{4} + 3 < x + 3 < \frac{5}{4} + 3 \quad \wedge \quad \frac{3}{4} - \frac{1}{4} < x - \frac{1}{4} < \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow \frac{15}{4} < x + 3 < \frac{17}{4} \quad \wedge \quad \frac{1}{2} < x - \frac{1}{4} < 1 \\ &\Rightarrow |x + 3| < \frac{17}{4} \quad \wedge \quad \frac{1}{2} < \left| x - \frac{1}{4} \right| \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$|x - 1| < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{|x + 3|}{|x - 1/4|} < \frac{17/4}{1/2} = \frac{17}{2} = M$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 1.7

---

*En los problemas del 1 al 9, resolver la ecuación dada.*

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 1. $ x - 5  = 4$                           | 2. $ 2x + 1  = x + 3$                   | 3. $ x - 2  = 3x - 9$                    |
| 4. $ x - 2  = 9 - 3x$                      | 5. $ x + 4  =  2 - x $                  | 6. $ x - 1  =  2x - 4 $                  |
| 7. $\left  \frac{3x-2}{2} \right  =  x-4 $ | 8. $\left  5 - \frac{2}{x} \right  = 3$ | 9. $\left  \frac{x-5}{2x-3} \right  = 1$ |

*En los problemas del 10 al 26, resolver la inecuación dada.*

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 10. $ x - 4  < 3$                                    | 11. $ 3x + 1  < 15$                     | 12. $\left  \frac{2x}{3} - 1 \right  < 2$    |
| 13. $ -3x - 2  \leq 4$                               | 14. $ 5x + 2  \geq 1$                   | 15. $ -4x - 3  > 1$                          |
| 16. $\left  \frac{2x}{5} - 2 \right  \geq 3$         | 17. $ x^2 - 5  \geq 4$                  | 18. $1 <  x  \leq 4$                         |
| 19. $0 <  x - 3  < 1$                                | 20. $ x - 1  <  x $                     | 21. $\left  \frac{3-2x}{1+x} \right  \leq 1$ |
| 22. $\left  \frac{1}{1-2x} \right  \geq \frac{1}{3}$ | 23. $ x - 1  +  x - 2  > 1$             | 24. $ x - 1  +  x + 1  \leq 4$               |
| 25. $\left  \frac{1}{2+x} \right  < \frac{1}{ x }$   | 26. $ 3x - 5  \leq  2x - 1  +  2x + 3 $ |  |

*En los problemas del 27 al 29, Hallar Un número M que satisfaga la proposición dada.*

27.  $|x + 2| < 1 \Rightarrow |x^3 - x^2 + 2x + 1| < M$

28.  $|x - 3| < 1/2 \Rightarrow \frac{|x+2|}{|x-2|} < M$

29.  $|x - 1/4| < 1/8 \Rightarrow \frac{|16x + 4|}{1+x^2} < M$

30. Probar: a.  $|x - y| \geq |x| - |y|$ .

*Sugerencia: Aplicar la desigualdad triangular en:  $x = (x - y) + y$*

b.  $|x - y| \geq |y| - |x|$

c.  $||x| - |y|| \leq |x - y|$

---

# 2

---

## EL PLANO CARTESIANO Y LA RECTA

---

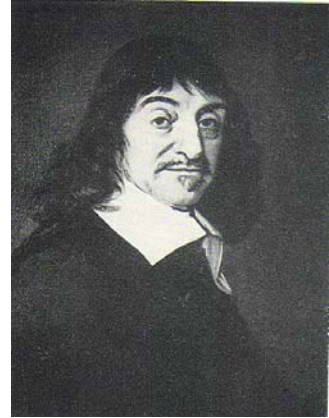
*RENE DESCARTES*  
(1596–1650)

**2.1 EL PLANO CARTESIANO**

**2.2 GRAFICAS DE ECUACIONES DE DOS VARIABLES.  
CRITERIOS DE SIMETRIA Y TRASLACION**

**2.3 LA RECTA Y LA ECUACION DE PRIMER GRADO**

## **René Descartes** (1596 - 1650)



**RENE DESCARTES**, filósofo, matemático y físico francés, nació en La Haya. Es considerado como el padre de la filosofía moderna. De él es la famosa frase: "Cogito, ergo sum" (Pienso, luego existo).

Fue un niño de singular inteligencia, pero físicamente débil. Durante los años de su educación en el colegio jesuita de la Flèche, los religiosos, para mitigar el frío de las duras mañanas de invierno, le permitían permanecer en la cama. Se dice que fueron precisamente durante esas ociosas horas de cama cuando Descartes concibió las ideas fundamentales de la Geometría Analítica.

En 1637 escribe el libro **Géometrie** en el que da nacimiento oficial a la **Geometría Analítica**. Su compatriota Pierre de Fermat (1601-1665), independientemente, también descubrió los principios fundamentales de esta ciencia.

En 1628 se mudó a Holanda donde vivió 21 años. Durante esta permanencia escribió sus principales obras: **Principios de Filosofía**, **El Discurso del Método**, **Las Meditaciones**, etc.

En 1649, la joven y energética reina Cristina de Suecia lo invitó a Estocolmo, como su tutor de filosofía. Sus clases eran en las tempranas horas de la mañana. El eminente filósofo y distinguido matemático no soportó el duro invierno sueco, muriendo a consecuencia de una neumonía el año siguiente de su llegada a Estocolmo.

### **ACONTECIMIENTOS PARALELOS IMPORTANTES**

Durante la vida de René Descartes, en América y en el mundo hispano sucedieron los siguientes hechos notables: En 1609 el cronista peruano Inca Gracilazo de la Vega, hijo de un conquistador y de una princesa india, publica "**Los Comentarios Reales**", famosa obra que cuenta la historia del Imperio Incaico. El 17 de septiembre de 1630, en la desembocadura del río Charles, unos colonos ingleses fundan la ciudad de Boston. En 1636 en Cambridge, ciudad contigua a Boston, se funda la Universidad de Harvard. Para ese entonces, la América española ya contaba, desde muchos años atrás, con la Universidad Mayor de San Marcos (Lima, 1551) y la Universidad de Santo Domingo

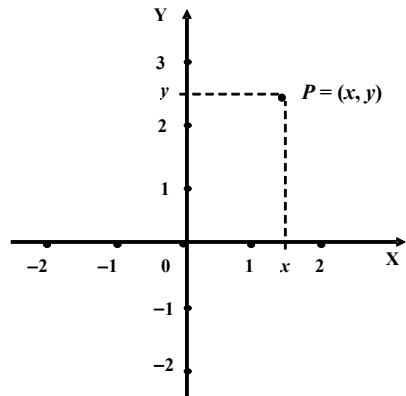
**SECCION 2.1**

**EL PLANO CARTESIANO**

Un conjunto sumamente importante y que aparecerá con mucha frecuencia más adelante, es el conjunto  $\mathbb{R}^2$  formado por todos los pares ordenados  $(a, b)$  de números reales. Esto es,

$$\mathbb{R}^2 = \{ (a, b) / a, b \in \mathbb{R} \}$$

Es de fundamental importancia tener una representación geométrica de  $\mathbb{R}^2$ . Para esto tomamos un plano cualquiera al cual fijamos. Sobre este plano tomamos dos rectas numéricas perpendiculares a la misma escala y cuyos orígenes coinciden.



Estas dos rectas nos permiten establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos  $P$  del plano y los pares ordenados  $(x, y)$  de números reales, en la forma que indica la figura adjunta. A la recta X se le llama **eje X** o eje de las **abscisas**. La recta Y es el **eje Y** o eje de las **ordenadas**.

El punto de intersección **O** de los ejes es el origen. Si al punto  $P$  le corresponde el par  $(x, y)$ , diremos que  $x$  e  $y$  son las **coordenadas** de  $P$ , siendo  $x$  su abscisa e  $y$  su ordenada. Con el objeto de abreviar, identificaremos el punto  $P$  con el par  $(x, y)$ , y escribiremos  $P = (x, y)$ . Así, tenemos  $O = (0, 0)$ . Esta correspondencia biunívoca también nos permite identificar al plano con  $\mathbb{R}^2$ .

Una correspondencia biunívoca del plano con  $\mathbb{R}^2$ , de la forma obtenida anteriormente, se llama un **sistema de coordenadas rectangulares o sistema de coordenadas cartesianas** del plano.

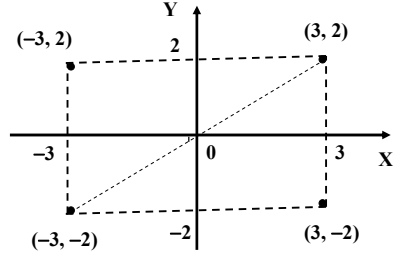
Se ha adoptado el nombre de "cartesianas" en honor al célebre matemático y filósofo René Descartes (1596–1650), a quién se le otorga la paternidad de la Geometría Analítica. El plano, provisto con este sistema de coordenadas, recibe el nombre de **plano cartesiano**.

**EJEMPLO 1.** Sea  $P_1 = (3, 2)$

- a. Hallar el punto  $P_2$  que es simétrico respecto al eje X al punto  $P_1 = (3, 2)$
- b. Hallar el punto  $P_3$  que es simétrico respecto al eje Y al punto  $P_1 = (3, 2)$
- c. Hallar el punto  $p_4$  que es simétrico respecto al origen al punto  $P_1 = (3, 2)$

**Solución**

- a.  $P_2 = (3, -2)$
- b.  $P_3 = (-3, 2)$
- c.  $P_4 = (-3, -2)$



**DISTANCIA**

**TEOREMA 2.1** La distancia entre los puntos  $P_1 = (x_1, y_1)$  y  $P_2 = (x_2, y_2)$  es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

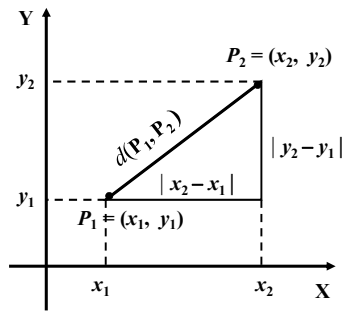
**Demostación**

Tomemos el triángulo rectángulo que tiene por hipotenusa el segmento que une  $P_1 = (x_1, y_1)$  y  $P_2 = (x_2, y_2)$  y por catetos, los segmentos paralelos a los ejes indicados en la figura.

Las longitudes de los catetos son  $|x_2 - x_1|$  y  $|y_2 - y_1|$ . La distancia  $d(P_1, P_2)$  es la longitud de la hipotenusa. Luego, aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos que:

$$(d(P_1, P_2))^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

de donde obtenemos:  $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



**EJEMPLO 2.** Mediante la fórmula de la distancia probar que los siguientes puntos son los vértices de un triángulo rectángulo:

$$A = (4, 7), B = (1, 1) \text{ and } C = (3, 0)$$

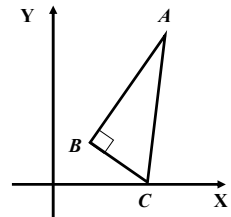
**solución**

Calculamos la longitud de los lados del triángulo:

$$d(A, B) = \sqrt{(3 - 1)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(4 - 1)^2 + (7 - 1)^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(4 - 3)^2 + (7 - 0)^2} = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50}$$



Como se cumple que:

$$d(A, B)^2 + d(A, C)^2 = 5 + 45 = 50 = d(B, C)^2,$$

el triángulo debe ser rectángulo, por el teorema recíproco al teorema de Pitágoras.

### PUNTO MEDIO

**TEOREMA 2.2** El punto medio del segmento de recta de extremos  $P_1 = (x_1, y_1)$  y  $P_2 = (x_2, y_2)$  es el punto

$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

#### Demostración

Supongamos que  $x_2 > x_1$  y que  $y_2 > y_1$ .

Sea  $M = (x, y)$  el punto medio de  $\overline{P_1P_2}$

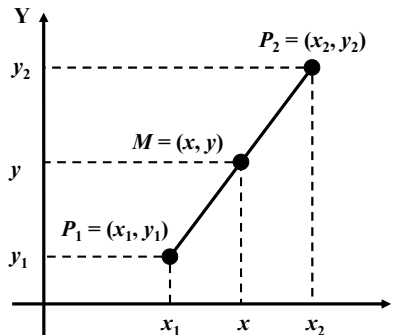
Proyectamos el segmento  $\overline{P_1P_2}$  sobre los ejes.

Por ser  $M = (x, y)$  el punto medio,  $x$  e  $y$  deben ser los puntos medios de los intervalos  $[x_1, x_2]$  y  $[y_1, y_2]$ , respectivamente. Luego,

$$x - x_1 = x_2 - x \quad \wedge \quad y - y_1 = y_2 - y \quad \Rightarrow$$

$$2x = x_1 + x_2 \quad \wedge \quad 2y = y_1 + y_2 \quad \Rightarrow$$

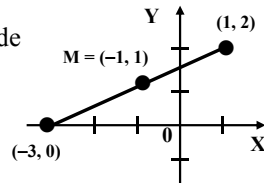
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \wedge \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



**EJEMPLO 4.** Hallar el punto medio del segmento de recta de extremos  $(-3, 0)$  y  $(1, 2)$

**Solución**

$$M = \left( \frac{-3+1}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (-1, 1)$$



**EJEMPLO 5.** Probar que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices.

**Solución**

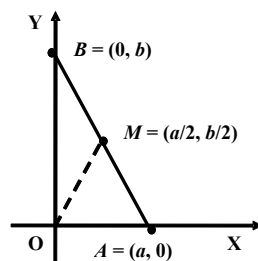
Tomamos un triángulo rectángulo cualquiera y, por conveniencia, lo colocamos en el plano coordenado en tal forma que el vértice correspondiente al ángulo recto coincida con el origen y un cateto caiga sobre el semieje positivo de las X. Por tratarse de un triángulo rectángulo, el otro cateto debe caer sobre el eje Y y lo colocamos en la parte positiva, como indica la figura.

Un vértice es  $O = (0, 0)$ . Sean  $A = (a, 0)$  y  $B = (0, b)$  los otros dos vértices.

El punto medio de la hipotenusa es

$$M = \left( \frac{a+0}{2}, \frac{0+b}{2} \right) = \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$$

Ahora calculamos las distancias de  $M$  a los tres vértices y observamos que estas tres distancias son iguales:



$$d(M, A) = \sqrt{\left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$d(M, B) = \sqrt{\left(0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$d(M, O) = \sqrt{\left(0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

## PROBLEMAS RESUELTOS 2.1

### PROBLEMA 1.

Usando la fórmula de la distancia probar que los puntos  $A = (-1, 1)$ ,  $B = (3, 9)$  y  $C = (5, 13)$  son colineales (están sobre una recta).

#### Solución

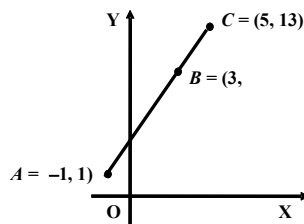
Calculemos las siguientes distancias:

$$d(A, B) = \sqrt{(3+1)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(5-3)^2 + (13-9)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(5+1)^2 + (13-1)^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

Observamos que  $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ . Luego, los tres puntos:  $A$ ,  $B$  y  $C$  son colineales.



### PROBLEMA 2.

Hallar una ecuación que relacione a las variables  $x$  e  $y$ , y que exprese el hecho de que el punto  $P = (x, y)$  equidista de los puntos  $A = (1, 2)$  y  $B = (5, -1)$ .

**Solución**

Se debe cumplir que:  $d(P, A) = d(P, B)$

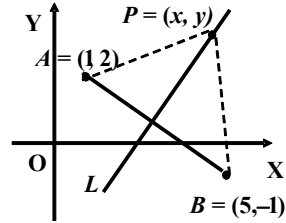
Luego,  $d(P, A)^2 = d(P, B)^2$

Esto es,

$$(1-x)^2 + (y-2)^2 = (5-x)^2 + (1+y)^2 \Leftrightarrow$$

$$1-2x+x^2+4-4y+y^2 = 25-10x+x^2+1+2y+y^2 \Leftrightarrow$$

$$-2x+1-4y+4 = -10x+25+2y+1 \Leftrightarrow 8x-6y-21 = 0$$



Luego, la ecuación buscada es  $8x - 6y - 21 = 0$ . Más adelante veremos que esta ecuación representa una recta (la mediatriz del segmento  $\overline{AB}$ ).

**PROBLEMA 3.**

Dos vértices adyacentes de un paralelogramo son  $A = (-4, 3)$  y  $B = (1, 5)$ . El punto medio de las diagonales es  $M = (2, 1)$ .

- a. Hallar los otros dos vértices.
- b. Hallar la longitud de dos lados adyacentes a vértice A.

**Solución**

a. Sean  $C = (c_1, c_2)$  y  $G = (g_1, g_2)$  los otros dos vértices.

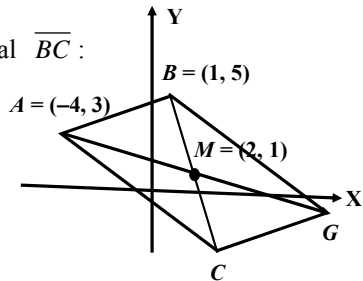
Por ser  $M = (2, 1)$  el punto medio de la diagonal  $\overline{BC}$ :

$$2 = \frac{c_1+1}{2}, \quad 1 = \frac{c_2+5}{2} \Rightarrow$$

$$c_1 = 3, \quad c_2 = -3 \Rightarrow C = (3, -3)$$

Por ser  $M = (2, 1)$  el punto medio de la diagonal  $\overline{AG}$ :

$$2 = \frac{-4+g_1}{2}, \quad 1 = \frac{3+g_2}{2} \Rightarrow g_1 = 8, \quad g_2 = -1 \Rightarrow G = (8, -1)$$



b.  $d(A, B) = \sqrt{(1-(-4))^2 + (5-3)^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

$$d(A, C) = \sqrt{(3-(-4))^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{7^2 + (-6)^2} = \sqrt{85}$$

**PROBLEMA 4.**

Probar que los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero se bisecan. Es decir, estos segmentos tienen el mismo punto medio.

**Solución**

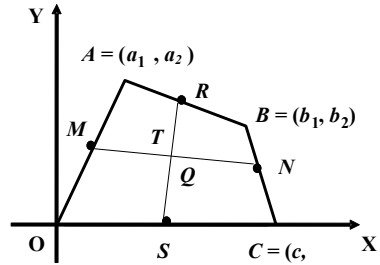
Tomemos un cuadrilátero cualquiera. Puesto que la distancia entre puntos es invariante por traslaciones y reflexiones, podemos suponer que un vértice del cuadrilátero coincide con el origen y un de los lados cae sobre el semieje positivo de las X, como indica la figura.

Sean  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$  y  $C = (c, 0)$

Si  $M$ ,  $N$ ,  $R$  y  $S$  son los puntos medios de los lados del cuadrilátero, Usando la fórmula del punto medio, tenemos que:

$$M = \left( \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2} \right), \quad N = \left( \frac{c+b_1}{2}, \frac{b_2}{2} \right),$$

$$S = \left( \frac{c}{2}, 0 \right), \quad R = \left( \frac{a_1+b_2}{2}, \frac{a_2+b_2}{2} \right)$$



Ahora, si  $T = (t_1, t_2)$  es el punto medio del segmento  $\overline{MN}$ , entonces

$$t_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{a_1}{2} + \frac{c+b_1}{2} \right] = \frac{a_1+c+b_1}{4}, \quad t_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{a_2}{2} + \frac{b_2}{2} \right] = \frac{a_2+b_2}{4}$$

$$\text{Luego, } T = \left( \frac{a_1+c+b_1}{4}, \frac{a_2+b_2}{4} \right).$$

Por otro lado, si  $Q = (q_1, q_2)$  es el punto medio del segmento  $\overline{SR}$ , entonces

$$q_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{c}{2} + \frac{a_1+b_1}{2} \right] = \frac{c+a_1+b_1}{4}, \quad q_2 = \frac{1}{2} \left[ 0 + \frac{a_2+b_2}{2} \right] = \frac{a_2+b_2}{4}$$

$$\text{Luego, } Q = \left( \frac{c+a_1+b_1}{4}, \frac{a_2+b_2}{4} \right)$$

Comparando  $T$  y  $Q$  vemos que  $T = Q$ ; es decir, ambos puntos medios coinciden.

## PROBLEMAS PROPUESTOS 2.1

*En los problemas 1, 2 y 3 hallar la distancia entre los siguientes pares de puntos P y Q y encontrar el punto medio del segmento que los une.*

1.  $P = (0, 0)$ ,  $Q = (1, 2)$     2.  $P = (1, 3)$ ,  $Q = (3, 5)$     3.  $P = (-1, 1)$ ,  $Q = (1, \sqrt{2})$

4. Probar que los puntos  $A = (-2, 4)$ ,  $B = (-1, 3)$  y  $C = (2, -1)$  son colineales.

5. Si  $A = (-3, -5)$  y  $M = (0, 2)$ , hallar  $B$  sabiendo que  $M$  es el punto medio del segmento  $\overline{AB}$ .

6. Si  $B = (8, -12)$  y  $M = (7/2, 3)$ , hallar  $A$  sabiendo que  $M$  es el punto medio del segmento  $\overline{AB}$ .

7. Probar que los puntos  $A = (2, -3)$ ,  $B = (4, 2)$  y  $C = (-1, 4)$  son los vértices de un triángulo isósceles.
8. Probar que el triángulo con vértices  $A = (4, 1)$ ,  $B = (2, 2)$  y  $C = (-1, -4)$  es rectángulo.
9. Probar que los puntos  $A = (1, 2)$ ,  $B = (4, 8)$ ,  $C = (5, 5)$  y  $D = (2, -1)$  son los vértices de un paralelogramo.
10. Probar que los puntos  $A = (0, 2)$ ,  $B = (1, 1)$ ,  $C = (2, 3)$  y  $D = (-1, 0)$  son los vértices de un rombo.
11. Probar que los puntos  $A = (1, 1)$ ,  $B = (11, 3)$ ,  $C = (10, 8)$  y  $D = (0, 6)$  son los vértices de un rectángulo.
12. Probar que los puntos  $A = (-4, 1)$ ,  $B = (1, 3)$ ,  $C = (3, -2)$  y  $D = (-2, -4)$  son los vértices de un cuadrado.
13. Hallar los puntos  $P = (x, 2)$  que distan 5 unidades del punto  $(-1, -2)$ .
14. Hallar los puntos  $P = (1, y)$  que distan 13 unidades del punto  $(-4, 1)$ .
15. Hallar una ecuación que relaciona las variables  $x$  e  $y$ , y que describa el hecho de que el punto  $P = (x, y)$  equidista de los puntos  $A = (6, 1)$  y  $B = (-4, -3)$ .
16. Hallar una ecuación que relacione a las variables  $x$  e  $y$ , y que describa el hecho de que el punto  $P = (x, y)$  dista 3 unidades del origen.
17. Los puntos medios de los lados de un triángulo son  $M = (2, -1)$ ,  $N = (-1, 4)$  y  $Q = (-2, 2)$ . Hallar los vértices.
18. Dos vértices adyacentes de un paralelogramo son  $A = (2, 3)$  y  $B = (4, -1)$ . Si las diagonales se bisecan en el punto  $M = (1, -3)$ , hallar los otros dos vértices.
19. Los vértices de un cuadrilátero son  $A = (-2, 14)$ ,  $B = (3, -4)$ ,  $C = (6, -2)$  y  $D = (6, 6)$ . Hallar el punto donde las diagonales se intersectan.

## SECCION 2.2

### GRAFICAS DE ECUACIONES.

#### CRITERIOS DE SIMETRIA Y DE TRASLACION

**DEFINICION** Dada una ecuación en dos variables  $F(x, y) = 0$ , Se llama **gráfico** o **gráfica** al conjunto formado por todos los puntos  $P = (x, y)$  del plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. En otros términos, la gráfica de la ecuación  $F(x, y) = 0$  es el conjunto

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / F(x, y) = 0\}$$

Dos ecuaciones son **equivalentes** si ambas tienen las mismas soluciones. Así, las ecuaciones  $y = x/2$  y  $2y = x$  son equivalentes. Es claro que las ecuaciones equivalentes tienen el mismo gráfico.

Trazar el gráfico de una ecuación no es simple y requiere de conocimientos que desarrollaremos más adelante, después de estudiar el concepto de derivada. Sin embargo, si la ecuación no es complicada, ésta se puede graficar localizando algunos puntos. En la elección de los puntos a representar se deben tratar de escoger los más adecuados. Entre estos, están los puntos donde la gráfica interseca a los ejes coordenados. Las abscisas de los puntos donde la gráfica interseca al eje X se llama **abscisas en el origen**. Estas se encuentran haciendo  $y = 0$  en la ecuación. Similarmente, las ordenadas de los puntos donde la gráfica interseca al eje Y se llaman **ordenadas en el origen**, y se encuentran haciendo  $x = 0$  en la ecuación.

**EJEMPLO 1.** Graficar la ecuación  $y = x^2$

**Solución**

**Intersección con el eje X:**  $y = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

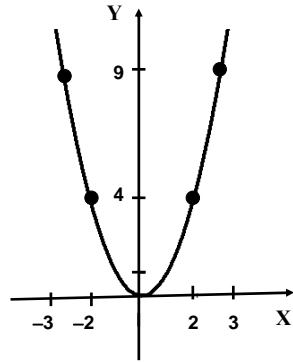
Luego, la gráfica interseca al eje X en el punto  $(0, 0)$ .

**Intersección con el eje Y:**  $x = 0 \Rightarrow y = 0^2 = 0$

Luego, la gráfica interseca al eje Y en el punto  $(0, 0)$ .

La siguiente tabla nos proporciona otros puntos.

x	-3	-2	0	1	2	3
y	9	4	0	1	4	9



Esta curva es una **parábola** con vértice en el origen cuyo eje coincide con el eje Y

**EJEMPLO 2.** Trazar el gráfico de la ecuación  $x^2 + 4y^2 = 4$ .

**Solución**

Confeccionamos una tabla que nos proporcione algunos puntos cuyas coordenadas satisfagan esta ecuación. En primer lugar hallamos las intersecciones con los ejes

**Intersección con el eje X:**

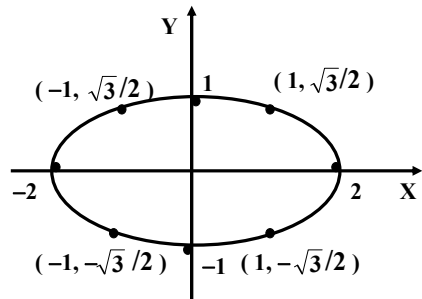
$$y = 0 \Rightarrow x^2 + 4(0)^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ ó } x = -2.$$

Luego, la gráfica corta al eje X en los puntos

$$(2, 0) \text{ y } (-2, 0).$$

**Intersección con el eje Y:**

$$x = 0 \Rightarrow (0)^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow y = 1 \text{ ó } y = -1.$$



Luego, la gráfica corta al eje Y en los puntos  $(0, 1)$  y  $(0, -1)$ .

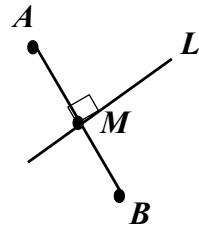
Para obtener otros puntos, damos valores a  $x$  ó a  $y$ . En la ecuación resultante despejamos los valores correspondiente de  $x$  ó de  $y$ . La siguiente tabla nos proporciona algunos de estos puntos.

$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	0	$\pm\sqrt{3}/2$	$\pm 1$	$\pm\sqrt{3}/2$	0

Esta curva es una **elipse**. Más adelante nos volveremos a encontrar con ella.

### SIMETRÍAS Y REFLEXIONES

Dos puntos  $A$  y  $B$  son **simétricos respecto a la recta  $L$**  si  $L$  corta perpendicularmente al segmento  $\overline{AB}$  en su punto medio. En este caso, la recta  $L$  es llamada **eje de simetría**. En la figura,  $M$  es el punto medio del segmento  $\overline{AB}$ . Si consideramos que la recta  $L$  es un espejo, el punto  $B$  es la reflexión del punto  $A$  es el espejo.



Dos puntos  $A$  y  $B$  son **simétricos respecto a un punto  $O$**  si  $O$  es el punto medio del segmento  $\overline{AB}$ . En este caso,  $O$  es el **centro de simetría**.

- DEFINICION.**
- a. Un gráfico es **simétrica respecto a un eje de simetría** si para cada punto de la curva existe otro punto de la curva tal que estos dos puntos son simétricos respecto al eje de simetría.
  - b. Un gráfico es **simétrica respecto a un centro de simetría** si para cada punto de la curva existe otro punto de la curva tal que estos dos puntos son simétricos respecto al centro de simetría.

Las simetrías más notables son las siguientes:

#### 1. Simetría respecto al eje Y.

Un gráfico  $G$  es simétrico respecto al eje Y si se cumple:  $(x, y) \in G \Rightarrow (-x, y) \in G$

#### 2. Simetría respecto al eje X.

Un gráfico  $G$  es simétrico respecto al eje X si se cumple:  $(x, y) \in G \Rightarrow (x, -y) \in G$

#### 3. Simetría respecto al origen.

Un gráfico  $G$  es simétrico respecto al origen si se cumple:  $(x, y) \in G \Rightarrow (-x, -y) \in G$

A continuación presentamos tres resultados (criterios) cuya demostración sigue inmediatamente de las proposiciones anteriores.

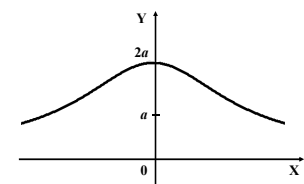
### CRITERIOS DE SIMETRÍA

La gráfica de una ecuación  $F(x, y) = 0$  es simétrica respecto al:

- Eje Y** si al sustituir  $x$  por  $-x$  se obtiene una ecuación equivalente.
- Eje X** si al sustituir  $y$  por  $-y$  se obtiene una ecuación equivalente.
- Origen** si al sustituir  $x$  por  $-x$  e  $y$  por  $-y$  se obtiene una ecuación equivalente.

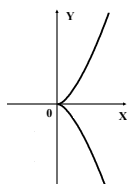
**EJEMPLO 6.** Probar que:

- La **bruja de Agnesi** es simétrica respecto al eje Y
- La **parábola semicúbica** es simétrica respecto al eje X
- La **parábola cúbica** se es simetría respecto al origen.



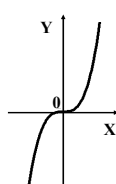
$$yx^2 = 4a^2(2a - y), a > 0$$

**Bruja de Agnesi**



$$y^2 = x^3$$

**Parábola semicúbica**



$$y = x^3$$

**Parábola cúbica**

#### Solución

- a. Reemplazando  $x$  por  $-x$  en la ecuación de la Bruja:

$$(-x)^2 y = 4a^2(2a - y) \Rightarrow x^2 y = 4a^2(2a - y), \text{ que es la ecuación de la Bruja.}$$

- b. Reemplazando  $y$  por  $-y$  en la ecuación de la parábola semicúbica:

$$(-y)^2 = x^3 \Rightarrow y^2 = x^3, \text{ que es la ecuación de la parábola semicúbica.}$$

- c. Reemplazando  $x$  por  $-x$  e  $y$  por  $-y$  en la ecuación de la parábola cúbica:

$$-y = (-x)^3 \Rightarrow -y = -x^3 \Rightarrow y = x^3, \text{ que es la ecuación de la parábola cúbica}$$

### ¿SABIAS QUE ...

**MARÍA GAETANA AGNESI (1718–1779).** Nació en Milán, Italia. Desde muy joven demostró talento y afición por la Matemática. Escribió, en italiano, un texto para la enseñanza del Cálculo Diferencial: *Institución Analitiche al uso della Gioventu Italiana*. En este libro describió la curva que ahora se llama la **Bruja de Agnesi**, cuyo nombre inicial fue “versiera” (derivada de una palabra latina que da la idea de voltear). En una traducción del libro se confundió la palabra “versiera” con “avversiera”, que significa “bruja”. De esta confusión viene el nombre de **bruja de Agnesi**.



### REFLEXION EN LA DIAGONAL PRINCIPAL

Si a un punto  $A = (a, b)$  le intercambiamos sus coordenadas obtenemos el punto  $B = (b, a)$ . ¿Qué propiedad geométrica relaciona a estos dos puntos?

Para hallar esta relación grafiquemos algunas de estas parejas de puntos. Grafiquemos también a la **recta diagonal  $L: y = x$** , a la que llamaremos **diagonal principal**. Vemos que estas parejas de puntos se caracterizan por ser simétricos respecto a la diagonal  $L$ . Probemos este resultado.

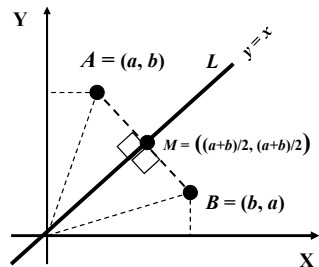
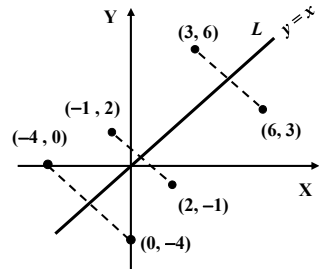
El punto medio del segmento de extremos  $A = (a, b)$  y  $B = (b, a)$  es el punto

$$M = \left( \frac{a+b}{2}, \frac{b+a}{2} \right),$$

que está en la diagonal principal  $L$ .

Se ve fácilmente que los dos triángulos de la figura son rectángulos y, por lo tanto, la diagonal principal es perpendicular al segmento  $\overline{AB}$  de extremos. Luego, estos puntos son **simétricos respecto a la diagonal principal**.

Este resultado nos permite establecer la siguiente proposición, a la que llamaremos **criterio de reflexión en la diagonal principal** o **criterio de inversión**. Le damos este segundo nombre debido a que él nos servirá más adelante, para construir las gráficas de las funciones inversas.



**CRITERIO DE REFLEXION EN LA DIAGONAL PRINCIPAL**  
**O**  
**CRITERIO DE INVERSION**

La gráfica de la ecuación  $F(y, x) = 0$  se obtiene reflejando en la **diagonal principal  $y = x$**  la gráfica de  $F(x, y) = 0$ .

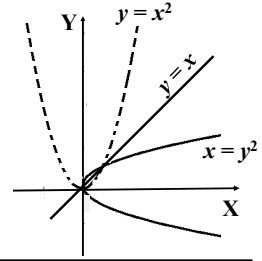
**EJEMPLO 7.**

Haciendo uso de la gráfica de  $y = x^2$ , dada en el ejemplo 1, y del criterio de la reflexión en la diagonal principal, graficar la ecuación

$$x = y^2$$

**Solución**

La ecuación  $x = y^2$  se obtiene de la ecuación  $y = x^2$ , intercambiando la variable  $x$  con la variable  $y$ . Luego, por el criterio de inversión, la gráfica de  $x = y^2$  se obtiene reflejando la gráfica de  $y = x^2$  en la diagonal principal.

**ECUACION DE UNA CURVA**

El hecho de contar con un sistema de coordenadas para el plano nos ha permitido traducir conceptos algebraicos, como son las ecuaciones, a conceptos geométricos, como son los gráficos. También nos permite tomar el camino inverso, de traducir conceptos geométricos a conceptos algebraicos.

**DEFINICION.** Una **ecuación de una curva** es una ecuación a la cual satisfacen las coordenadas de todos los puntos de la curva y sólo éstos.

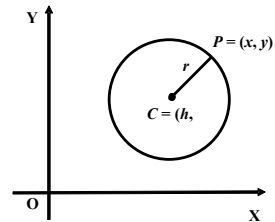
Un gráfico puede tener muchas ecuaciones. Por esta razón decimos **una** ecuación y no **la** ecuación del gráfico.

**LA CIRCUNFERENCIA**

Recordar que la circunferencia de centro en el punto  $C$  y radio  $r > 0$  es el conjunto de puntos del plano cuya distancia al punto  $C$  es  $r$ . Es decir:

$$\{P \in \mathbb{R}^2 / d(P, C) = r\}$$

Hallemos una ecuación para la circunferencia.



**TEOREMA 2.3** Una ecuación de la **circunferencia** de centro  $C = (h, k)$  y radio  $r$  es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

En particular, si el centro es el origen  $(0, 0)$  y el radio  $r$ ,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

**Demostración**

$$P = (x, y) \text{ está en la circunferencia} \Leftrightarrow d(P, C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

**EJEMPLO 8.** Hallar una ecuación de la circunferencia de centro  $C = (2, 1)$  y radio 3.

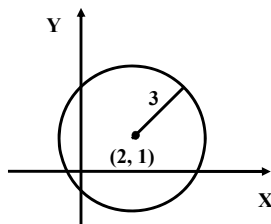
**Solución**

Por la proposición anterior, una ecuación de esta circunferencia es:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

Esta ecuación también podemos presentarla desarrollando los cuadrados y simplificando. Esto es,

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$$



**TRASLACION**

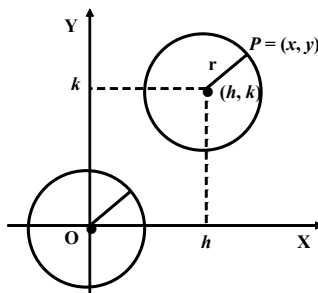
Observando la figura podemos concluir que a la circunferencia de centro en  $(h, k)$ :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

la podemos obtener mediante una traslación de la circunferencia de centro en el origen:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Esta traslación lleva el origen  $(0, 0)$  al punto  $(h, k)$  del modo siguiente: Si  $h > 0$  y  $k > 0$ , trasladando a todo punto del plano  $h$  unidades hacia la derecha y  $k$  unidades hacia arriba. Si  $h < 0$  ó  $k < 0$  trasladamos  $|h|$  unidades a la izquierda ó  $|k|$  hacia abajo.



Esta observación la enunciamos en forma más general en la siguiente proposición, que llamamos criterio de traslación.

**CRITERIO DE TRASLACION**

La gráfica de la ecuación

$$F(x - h, y - k) = 0$$

se obtiene trasladando la gráfica de la ecuación

$$F(x, y) = 0,$$

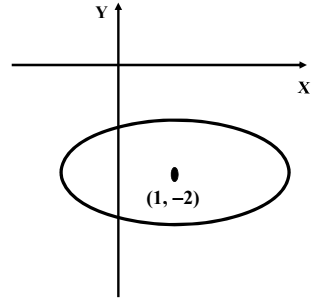
mediante la traslación que lleva el **origen** al punto  $(h, k)$ .

**EJEMPLO 9.** Graficar la ecuación  $x^2 - 2x + 4y^2 + 16y + 13 = 0$ .

**Solución**

Completamos cuadrados en la ecuación dada:

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x + 4y^2 + 16y + 13 &= 0 && \Leftrightarrow \\
 (x^2 - 2x + \quad) + (4y^2 + 16y + \quad) &= -13 && \Leftrightarrow \\
 (x^2 - 2x + \quad) + 4(y^2 + 4y + \quad) &= -13 && \Leftrightarrow \\
 (x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 + 4y + 4) &= -13 + 1 + 16 && \Leftrightarrow \\
 (x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 &= 4 && \Leftrightarrow \\
 (x - 1)^2 + 4(y - (-2))^2 &= 4 &&
 \end{aligned}$$



Vemos que la ecuación dada se obtiene de la ecuación del ejemplo 2,  $x^2 + 4y^2 = 4$ , mediante la traslación que lleva el origen al punto  $(h, k) = (1, -2)$ .

## PROBLEMAS RESUELTOS 2.2

**PROBLEMA 1.** Hallar una ecuación de la circunferencia que tiene por diámetro al segmento de extremos  $A = (-2, 1)$  y  $B = (4, 7)$ .

**Solución**

El centro de la circunferencia es el punto medio del segmento  $\overline{AB}$ . Esto es, el punto:

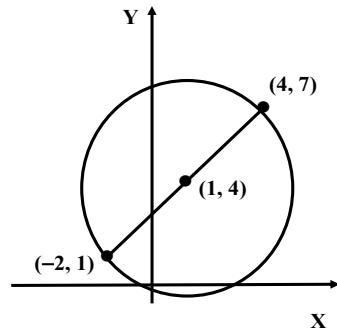
$$M = \left( \frac{-2+4}{2}, \frac{1+7}{2} \right) = (1, 4)$$

El radio de la circunferencia debe ser la mitad del diámetro o bien la distancia del punto medio  $M$  a cualquiera de los extremos  $A$  ó  $B$ ; esto es

$$r = d(M, B) = \sqrt{(1-4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{18}$$

Luego, una ecuación para esta circunferencia es,

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 18 \quad \text{ó bien} \quad x^2 + y^2 - 2x - 8y - 1 = 0$$



**PROBLEMA 2.** Hallar una ecuación de la circunferencia que de radio  $r = \sqrt{10}$  y pasa por los puntos  $Q = (2, -2)$  y  $S = (6, -4)$ .

**Solución**

Hallemos el centro  $C = (h, k)$  de la circunferencia. Como  $Q$  y  $S$  están en la circunferencia debemos tener que:

$$d(C, Q) = r \quad \text{y} \quad d(C, S) = r \Rightarrow$$

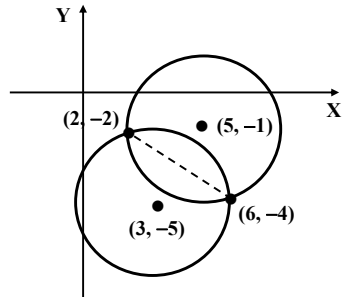
$$d(C, Q)^2 = r^2 \quad \text{y} \quad d(C, S)^2 = r^2 \Rightarrow$$

$$(h - 2)^2 + (k + 2)^2 = 10 \quad \text{y}$$

$$(h - 6)^2 + (k + 4)^2 = 10 \Rightarrow$$

$$(a) \quad h^2 + k^2 - 4h + 4k - 2 = 0 \quad \text{y}$$

$$(b) \quad h^2 + k^2 - 12h + 8k + 42 = 0$$



Restando la primera ecuación de la segunda se tiene:

$$-8h + 4k + 44 = 0 \Rightarrow -2h + k + 11 = 0 \Rightarrow k = 2h - 11$$

Reemplazando este valor de  $k$  en (a):

$$h^2 + (2h - 11)^2 - 4h + 4(2h - 11) - 2 = 0 \Rightarrow 5h^2 - 40h + 75 = 0 \Rightarrow$$

$$h^2 - 8h + 15 = 0 \Rightarrow (h - 5)(h - 3) = 0 \Rightarrow h = 5 \quad \text{ó} \quad h = 3.$$

Si tomamos  $h = 5$ , entonces  $k = 2(5) - 11 = -1$  y  $C = (5, -1)$ .

Si tomamos  $h = 3$ , entonces  $k = 2(3) - 11 = -5$  y  $C = (3, -5)$ .

Tenemos dos soluciones, una para cada centro  $C$  hallado. Estas son:

$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 10 \quad \text{y} \quad (x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 10$$

**PROBLEMA 3.** Haciendo uso de los criterios de traslación o de inversión, graficar las siguientes ecuaciones:

$$a. \quad xy^2 = 4a^2(2a-x) \quad b. \quad x = -y^2 \quad c. \quad x - 3 = -(y - 2)^2$$

**Solución**

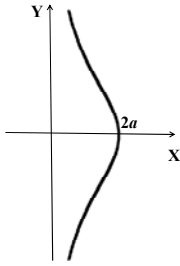
a.  $xy^2 = 4a^2(2a-x)$  se obtiene de la ecuación de la Bruja de Agnesi, ejemplo 6 a,

$$yx^2 = 4a^2(2a-y)$$

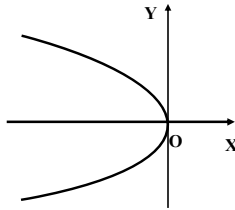
cambiando la variable  $y$  por la variable  $x$ . Luego, la gráfica de  $xy^2 = 4a^2(2a-x)$  se obtiene reflejando la Bruja de Agnesi en la diagonal principal.

b. En ejemplo 7 se obtuvo a gráfica de  $x = y^2$  reflejando la gráfica de  $y = x^2$  en la diagonal principal. Tenemos que  $x = -y^2 \Rightarrow -x = y^2$ . Esta último ecuación se obtiene de  $x = y^2$  cambiando  $x$  por  $-x$ . Luego, la gráfica de  $x = -y^2$  o de  $-x = y^2$  se obtiene reflejando la gráfica de  $x = y^2$  en el eje Y.

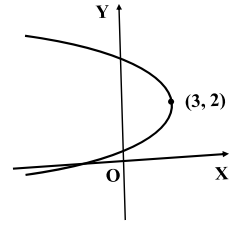
c. La gráfica de  $x - 3 = -(y - 2)^2$  se obtiene la gráfica de de la gráfica de  $x = -y^2$  mediante la traslación que lleva el origen a  $(3, 2)$ .



a.  $xy^2 = 4a^2(2a-x)$



b.  $x = -y^2$



b.  $x - 3 = -(y - 2)^2$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 2.2

*En los problemas del 1 al 7 aplicar los criterios de simetría para determinar si el gráfico de la ecuación dada es simétrico respecto al eje X, eje Y o al origen.*

1.  $y = x^2$

2.  $xy = 1$

3.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

4.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

5.  $y^2(2-x) = x^3$

6.  $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$

7.  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$

*En los problemas del 8 al 16 hallar una ecuación de la circunferencia que satisface las condiciones dadas.*

8. Centro  $(2, -1)$ ;  $r = 5$

9. Centro  $(-3, 2)$ ;  $r = \sqrt{5}$

10. Centro el origen y pasa por  $(-3, 4)$

11. Centro  $(1, -1)$  y pasa por  $(6, 4)$

12. Centro  $(1, -3)$  y es tangente al eje X

13. Centro  $(-4, 1)$  y es tangente al eje Y

14. Tiene un diámetro de extremos  $(2, 4)$  y  $(4, -2)$

15. De radio  $r = 1$  y pasa por  $(1, 1)$  y  $(1, -1)$

16. Pasa por los puntos  $(0, 0)$ ,  $(0, 8)$  y  $(6, 0)$

*En los problemas del 17 al 22 probar que la ecuación dada representa una circunferencia, hallando su centro y su radio.*

17.  $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

18.  $x^2 + y^2 + 4y - 4 = 0$

19.  $x^2 + y^2 + y = 0$

20.  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

21.  $2x^2 + 2y^2 - x + y - 1 = 0$

22.  $16x^2 + 16y^2 - 48x - 16y - 41 = 0$

*En los problemas 23 y 24, aplicando los criterios de traslación a la gráfica de la parábola semicúbica (ejemplo 6b), graficar las siguientes ecuaciones.*

23.  $(y - 1)^2 = (x + 1)^3$

24.  $(y + 1)^2 = (x - 1)^3$

*En los problemas del 26, 27 y 28, aplicando los criterios de traslación y de reflexión a la gráfica de la Bruja de Agnesi (ejemplo 6a), graficar las siguientes ecuaciones.*

26.  $(x - 3)^2(y - 2) = 4(4 - y)$

27.  $(y - 3)^2(x - 2) = 4(4 - x)$

28.  $(x + 3)^2(y + 2) = 4(-y)$

SECCION 2.3

LA RECTA Y LA ECUACION DE PRIMER GRADO

Se llama **ecuación de primer grado** en dos variables,  $x$  e  $y$ , a la ecuación

$$Ax + By + C = 0, \text{ donde } A \neq 0 \text{ ó } B \neq 0$$

Veremos que la gráfica de esta ecuación es una recta y, recíprocamente, cualquier ecuación que represente a una recta es una ecuación de primer grado. Comenzamos presentando las diferentes formas de la ecuación de una recta.

PENDIENTE DE UNA RECTA

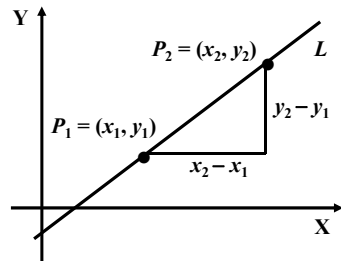
Introducimos el concepto de **pendiente** de una recta para medir la razón de elevación o inclinación de la recta. Este concepto capta el sentido intuitivo de la palabra pendiente que usamos en frases como "la pendiente de una carretera" o "la pendiente de una colina".

**DEFINICION.** La **pendiente** de una recta **no vertical**  $L$  que pasa por los puntos

$$P_1 = (x_1, y_1) \text{ y } P_2 = (x_2, y_2)$$

es el cociente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



**OBSERVACIONES.**

1. También se tiene que  $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ , ya que  $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

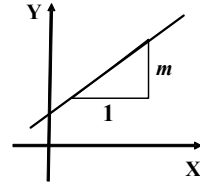
Sin embargo,  $m \neq \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$  y  $m \neq \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$ .

2. La pendiente de una recta es independiente de los puntos que se toman para definirla. Esto es, si  $P'_1 = (x'_1, y'_1)$  y  $P'_2 = (x'_2, y'_2)$  son otros puntos de la recta, se tiene:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}$$

3. La recta de **pendiente positiva** es **ascendente** y la recta de **pendiente negativa** es **descendente**.

4. La pendiente  $m$  indica el número de unidades que la recta sube (si  $m > 0$ ) o baja (si  $m < 0$ ) por cada unidad horizontal que se avance a la derecha. Si  $m = 0$ , la recta es horizontal.



**EJEMPLO 1.** Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos

$$P_1 = (1, -2) \text{ y } P_2 = (3, 4)$$

**Solución**

$$m = \frac{4 - (-2)}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{ó bien} \quad m = \frac{-2 - 4}{1 - 3} = \frac{-6}{-2} = 3$$

**TEOREMA 2.1** Ecuación punto–pendiente.

Una ecuación de la recta de pendiente  $m$  y que pasa por el punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

**Demostración**

Sea  $P = (x, y)$  un punto cualquiera de la recta. De la definición de pendiente:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

**EJEMPLO 2.** Hallar una ecuación de la recta que pasa por los puntos

$$(-2, 5) \text{ y } (1, -1).$$

**Solución**

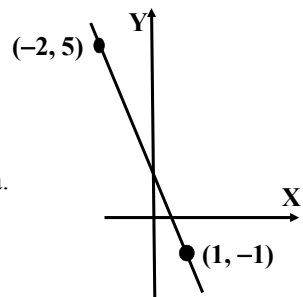
Hallemos, en primer lugar, la pendiente de la recta:

$$m = \frac{-1 - 5}{1 - (-2)} = \frac{-6}{3} = -2$$

Ahora hallamos la ecuación punto–pendiente de la recta.

Como el punto  $P_0$  podemos tomar cualquiera de los dos puntos dados,  $(-2, 5)$  ó  $(1, -1)$ . Así, si  $P_0 = (1, -1)$ ,

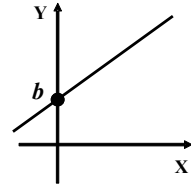
$$y - (-1) = -2(x - 1) \Rightarrow y + 1 = -2x + 2 \Rightarrow y + 2x - 1 = 0$$



Si en la ecuación punto–pendiente tomamos  $P_0 = (0, b)$ , el punto donde la recta corta al eje Y, se tiene que:

$$y - b = m(x - 0) \Rightarrow y = mx + b$$

Esta nueva ecuación de la recta se llama ecuación **pendiente–intersección**.



**TEOREMA 2.2** Ecuación pendiente-intersección con eje Y.

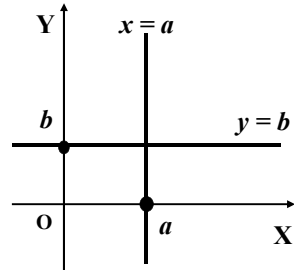
Una ecuación de la recta que tiene pendiente  $m$  y pasa por el punto  $(0, b)$  es

$$y = mx + b$$

**RECTAS VERTICALES Y HORIZONTALES**

Ninguna de las ecuaciones de la recta presentadas describe a las rectas verticales, debido a que éstas no tienen pendiente.

Supongamos que una recta vertical  $L$  corta al eje X en el punto  $(a, 0)$ ; es decir  $a$  su **abscisa en el origen**. Un punto cualquiera  $(x, y)$  está en  $L$  si y sólo si su abscisa es  $a$ ; es decir, si  $x = a$ . Por tanto, una ecuación para esta recta vertical es:  $x = a$



Por otro lado, una recta horizontal tiene pendiente  $m = 0$ , ya que cualquier par de puntos de la recta tienen la misma ordenada. Luego, reemplazando  $m = 0$  en la ecuación punto–intersección se obtiene, para la recta horizontal, la ecuación  $y = b$ .

En resumen, tenemos:

**TEOREMA 2.3** 1. Una ecuación de la **recta vertical** con abscisa en el origen  $a$  es:

$$x = a$$

2. Una ecuación de la **recta horizontal** con ordenada en el origen  $b$  es

$$y = b$$

**EJEMPLO 3.** 1. La ecuación de la recta vertical que pasa por el punto  $(-2, 3)$  es

$$x = -2$$

2. La ecuación de la recta horizontal que pasa por el punto  $(-2, 3)$  es

$$y = 3$$

**LA ECUACION LINEAL**

Una **ecuación lineal** en dos variables,  $x$  e  $y$ , es una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0, \text{ donde } A \neq 0 \text{ ó } B \neq 0$$

Las distintas ecuaciones que hemos hallado anteriormente para las rectas, ya sean oblicuas, horizontales o verticales, son todas ecuaciones lineales. Probaremos ahora que lo recíproco también es cierto. Es decir, el gráfico de una ecuación lineal es una recta. De hecho, el nombre de "ecuación lineal" está motivado por este resultado.

**TEOREMA 2.4** El gráfico de la ecuación lineal  $Ax + By + C = 0$ ,  $A \neq 0$  ó  $B \neq 0$  es una **recta**. Además:

1. Si  $A \neq 0$  y  $B \neq 0$ , la recta es **oblicua**.
2. Si  $A = 0$  y  $B \neq 0$ , la recta es **horizontal**
3. Si  $A \neq 0$  y  $B = 0$ , la recta es **vertical**.

### Demostración

**Caso 1.** Si  $A \neq 0$  y  $B \neq 0$ , despejamos  $y$ :  $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

Su gráfica es una recta oblicua, ya que su pendiente  $m = -\frac{A}{B} \neq 0$ .

**Caso 2.** Si  $A = 0$ , la ecuación lineal se convierte en  $By + C = 0$ . De donde, despejando  $y$  obtenemos  $y = -\frac{C}{B}$ , la cual tiene por gráfica una recta horizontal.

**Caso 3.** Si  $B = 0$ , la ecuación se convierte en  $Ax + C = 0$ . De donde,  $x = -\frac{C}{A}$ , la cual tiene por gráfica una recta vertical.

Frecuentemente, para simplificar, en lugar de decir "la recta que es el gráfico de la ecuación  $Ax + By + C = 0$ " diremos simplemente "la recta  $Ax + By + C = 0$ ".

**EJEMPLO 4.** Dada la recta  $L: 2x - 3y + 12 = 0$ , hallar su pendiente, ordenada en el origen y abscisa en el origen. Graficarla.

### Solución

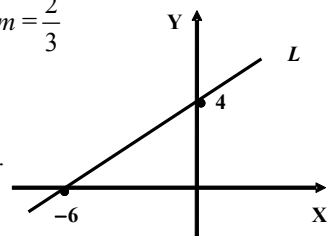
Despejamos  $y$ :  $y = \frac{2}{3}x + 4$ . Luego, la pendiente es  $m = \frac{2}{3}$

Si en  $2x - 3y + 12 = 0$  hacemos  $x = 0$  se tiene  $y = 4$ .

Luego, la ordenada en el origen es 4.

Si en  $2x - 3y + 12 = 0$  hacemos  $y = 0$  se tiene  $x = -6$ .

Luego, la abscisa en el origen es  $-6$ .



Para graficar una recta basta conocer dos de sus puntos. De esta recta ya conocemos los puntos  $(0, 4)$  y  $(-6, 0)$ , obtenidos a partir de la ordenada y la abscisa en el origen. El gráfico se obtiene trazando la recta que une estos dos puntos.

**EJEMPLO 5.** Sea  $L_1$  la recta que pasa por  $P_1 = (4, 6)$  y  $P_2 = (5, 8)$ . Hallar el punto donde  $L_1$  interseca la recta  $L_2: x + y - 7 = 0$ .

**Solución**

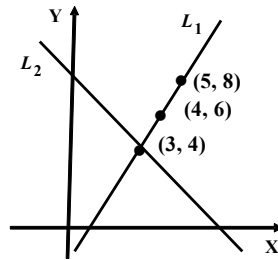
En primer lugar hallemos una ecuación de  $L_1$ .

Como  $L_1$  pasa por  $P_1 = (4, 6)$  y  $P_2 = (5, 8)$ , tenemos:

$$y - 6 = \frac{8-6}{5-4}(x-4) \Leftrightarrow y - 6 = 2(x-4)$$

$$\Leftrightarrow 2x - y - 2 = 0$$

Luego,  $L_1: 2x - y - 2 = 0$



El punto donde  $L_1$  y  $L_2$  se intersecan debe tener por coordenadas la solución común a ambas ecuaciones. Luego, debemos resolver el sistema:

$$L_1: 2x - y - 2 = 0$$

$$L_2: x + y - 7 = 0$$

La solución es  $x = 3, y = 4$ . Luego, las rectas se intersecan en el punto  $(3, 4)$ .

**RECTAS PARALELAS**

Dos rectas del plano,  $L_1$  y  $L_2$ , son **paralelas** si no se intersecan o son coincidentes; es decir:  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas  $\Leftrightarrow L_1 \cap L_2 = \emptyset$  ó  $L_1 = L_2$ .

La siguiente proposición traduce el paralelismo en términos de pendientes.

**TEOREMA 2.5** Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos rectas del plano que no son verticales y tienen pendientes  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente. Entonces

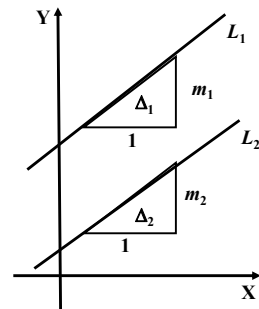
$$L_1 \text{ y } L_2 \text{ son paralelas} \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

**Demostración**

Sean  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  los triángulos rectángulos mostrados en la figura adjunta. Se tiene que:

$$L_1 \text{ y } L_2 \text{ son paralelas} \Leftrightarrow \Delta_1 \text{ y } \Delta_2 \text{ son congruentes}$$

$$\Leftrightarrow m_1 = m_2$$



**EJEMPLO 6.** Hallar una ecuación de la recta  $L_1$  que pasa por el punto  $P_1 = (-1, 1)$  y es paralela a la recta  $L_2: 2x + 3y - 8 = 0$ .

**Solución**

Tenemos que:

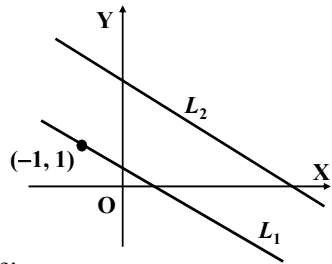
$$2x + 3y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

Luego, la pendiente de  $L_2$  es  $m = -\frac{2}{3}$

Como  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas, por la proposición anterior, la pendiente de  $L_1$  también es  $m = -\frac{2}{3}$ .

Además, como  $L_1$  pasa por  $P_1 = (-1, 1)$ , tenemos que:

$$L_1: y - 1 = -\frac{2}{3}(x + 1) \Leftrightarrow L_1: 2x + 3y - 1 = 0$$

**RECTAS PERPENDICULARES**

Dos rectas en el plano son **perpendiculares** si éstas se cortan formando un ángulo recto. La siguiente proposición caracteriza la perpendicularidad de rectas en términos de las pendientes.

**TEOREMA 2.6** Si  $L_1$  y  $L_2$  son dos rectas no verticales con pendientes  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente, entonces,

$$L_1 \text{ y } L_2 \text{ son perpendiculares} \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$$

**Demostración**

Ver el problema resuelto 9.

**EJEMPLO 7.** a. Hallar una ecuación de la recta  $L_1$  que pasa por el punto  $P_1 = (15/8, 7)$  y es perpendicular a la recta  $L_2: 3x - 4y - 12 = 0$

b. Hallar el punto donde  $L_1$  corta a  $L_2$ .

**Solución**

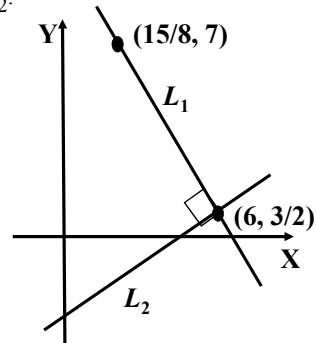
a. Sean  $m_1$  y  $m_2$  las pendientes de  $L_1$  y  $L_2$ , respectivamente. Por la proposición

anterior tenemos que  $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ . Pero,

$$L_2: 3x - 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow L_2: y = \frac{3}{4}x - 3$$

$$\text{Luego, } m_2 = \frac{3}{4} \text{ y, por tanto, } m_1 = -\frac{1}{3/4} = -\frac{4}{3}$$

Como  $L_1$  pasa por el punto  $P_1 = (15/8, 7)$  y tiene pendiente  $m_1 = -4/3$ , aplicando la ecuación punto-pendiente, tenemos:



$$L_1: y - 7 = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{15}{8}\right) \Leftrightarrow L_1: 8x + 6y - 57 = 0$$

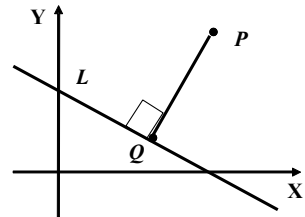
b. Resolvemos el sistema determinado por las ecuaciones de  $L_1: 8x + 6y - 57 = 0$  y de  $L_2: 3x - 4y - 12 = 0$ , hallamos que  $x = 6$  e  $y = 3/2$ . Luego, las rectas se cortan en el punto  $(6, 3/2)$ .

### DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Dado un punto  $P$  y una recta  $L$ , se llama **distancia del punto  $P$  a la recta  $L$**  a la distancia de  $P$  al punto  $Q$ , donde  $Q$  es la intersección de  $L$  con la recta perpendicular a  $L$  que pasa por  $P$ . Esto es,

$$d(P, L) = d(P, Q)$$

El siguiente teorema nos proporciona una fórmula muy simple para calcular la distancia de un punto a una recta. La demostración la presentamos en el problema resuelto 10.



**TEOREMA 2.7** La distancia del punto  $P = (x_0, y_0)$  a la recta  $L: Ax + By + C = 0$  es

$$d(P, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

**EJEMPLO 8.** Hallar la distancia del punto  $P = (-2, 3)$  a la recta  $L: 3x - 4y - 2 = 0$ .

**Solución**

$$d(P, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3(-2) + (-4)(3) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{20}{5} = 4$$

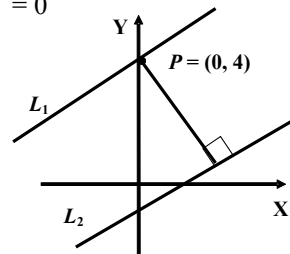
**EJEMPLO 9.** Hallar la distancia entre las rectas paralelas.

$$L_1: 2y - x - 8 = 0, \quad L_2: 2y - x + 2 = 0$$

**Solución**

Se entiende que la distancia entre dos rectas paralelas es la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra recta. Consigamos un punto de la recta  $L_1: 2y - x - 8 = 0$ . Por ejemplo, el punto  $P$  donde  $L_1$  corta al eje  $Y$ . Si hacemos  $x = 0$ , entonces  $2y - 8 = 0$  y, por tanto,  $y = 4$ . Luego  $P = (0, 4)$ .

Ahora:



$$d(L_1, L_2) = d(P, L_2) = \frac{|2(4) + (-1)(0) + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

## PROBLEMAS RESUELTOS 2.3

**PROBLEMA 1.** Usando pendientes probar que los puntos  $P_1 = (-3, -3)$ ,  $P_2 = (3, 1)$  y  $P_3 = (6, 3)$  son colineales (están sobre una misma recta).

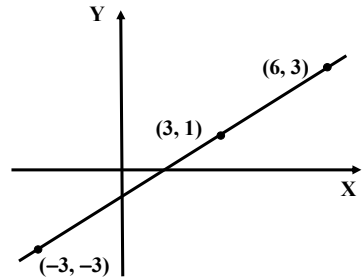
**Solución**

Si  $m_1$  es la pendiente de la recta que pasa por  $P_1 = (-3, -3)$  y  $P_2 = (3, 1)$ , entonces

$$m_1 = \frac{1 - (-3)}{3 - (-3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Si  $m_2$  es la pendiente de la recta que pasa por  $P_1 = (-3, -3)$  y  $P_3 = (6, 3)$ , entonces

$$m_2 = \frac{3 - (-3)}{6 - (-3)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$



Vemos que  $m_1 = m_2$ . Esto nos dice que estas dos rectas son paralelas. Además, como ambas pasan por el punto  $P_1$ , concluimos que las dos rectas son iguales y, por tanto, los tres puntos son colineales.

**PROBLEMA 2.** Dada la recta  $L: y = 5$ , hallar una ecuación de la recta:

- a.  $L_1$  que pasa por el punto  $P = (-4, 2)$  y es paralela a la recta  $L$ .
- b.  $L_2$  que pasa por el punto  $P = (-4, 2)$  y es perpendicular a la recta  $L$ .

**Solución**

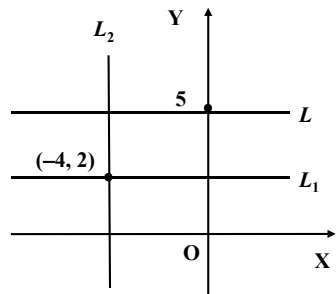
- a. La recta  $L: y = 5$  es una recta horizontal. La recta  $L_1$ , por ser paralela a  $L$ , también es horizontal.

Como pasa por el punto  $P = (-4, 2)$ , una ecuación para ésta es:

$$L_1 : y = 2$$

- b. La recta  $L_2$ , por ser perpendicular a una recta horizontal, debe ser vertical. Como pasa por  $P = (-4, 2)$ , una ecuación para ésta es:

$$L_2 : x = -4$$



**PROBLEMA 3.** Probar que las siguientes rectas son paralelas:

$$L_1: 8x + 3y - 5 = 0, \quad L_2: 6y + 16x = 7$$

**Solución**

Las pendientes de  $L_1$  y  $L_2$  son, respectivamente,

$$m_1 = -\frac{8}{3}, \quad m_2 = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3}$$

Como  $m_1 = m_2 = -\frac{8}{3}$ , por el teorema 2.5,  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas.

---

**PROBLEMA 4.** Probar que las rectas siguientes son perpendiculares.

$$L_1: 3x - \sqrt{2}y - 5 = 0, \quad L_2: \sqrt{2}x + 3y - 6 = 0$$

**Solución**

Hallemos las pendientes de estas rectas. Despejamos  $y$  en cada ecuación:

$$L_1: y = \frac{3}{\sqrt{2}}x - 5 \quad L_2: y = -\frac{\sqrt{2}}{3}x + 2$$

Las pendientes de  $L_1$  y  $L_2$  son, respectivamente,  $m_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}$  y  $m_2 = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

Tenemos que 
$$m_1 m_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \left( -\frac{\sqrt{2}}{3} \right) = -1.$$

En consecuencia, por el teorema 2.6, las rectas  $L_1$  y  $L_2$  son perpendiculares.

---

**PROBLEMA 5.** Hallar una ecuación de la recta que es perpendicular a la recta

$$L: 3y - 4x - 15 = 0$$

y que forma con los ejes coordenados un triángulo de área igual a 6.

**Solución**

La pendiente de la recta  $L: 3y - 4x - 15 = 0$  es  $m = \frac{4}{3}$ . Luego, la pendiente de la

recta buscada es,  $m_1 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{4/3} = -\frac{3}{4}$  y, por tanto, esta recta tiene por

ecuación: 
$$y = -\frac{3}{4}x + b \quad (1)$$

Sea  $(a, 0)$  el punto donde esta recta corta al eje X. Reemplazando estos valores en la ecuación anterior:

$$0 = -\frac{3}{4}a + b \Rightarrow a = \frac{4}{3}b \quad (2)$$

El área del triángulo formado por la recta y los ejes es:

$$\frac{|a||b|}{2} = 6 \Leftrightarrow |ab| = 12$$

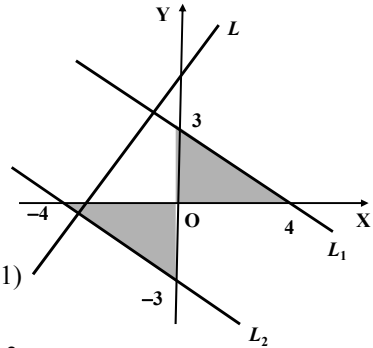
Reemplazando (2) en esta última igualdad:

$$|ab| = 12 \Leftrightarrow \left| \frac{4}{3}bb \right| = 12 \Leftrightarrow b^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow b = \pm 3$$

Reemplazando  $b = 3$  y  $b = -3$  en la ecuación (1) encontramos dos respuestas:

$$L_1: y = -\frac{3}{4}x + 3 \quad \text{ó} \quad L_2: y = -\frac{3}{4}x - 3$$



**PROBLEMA 6.** Hallar una ecuación de la mediatriz del segmento de extremos  $A = (1, 2)$  y  $B = (5, -1)$ . Recordar que la mediatriz de un segmento es la recta que corta perpendicularmente al segmento en su punto medio.

### Solución

La pendiente de la recta que pasa por los puntos  $A = (1, 2)$  y  $B = (5, -1)$  es

$$m' = \frac{-1 - 2}{5 - 1} = \frac{-3}{4}$$

Luego, la pendiente de la mediatriz es

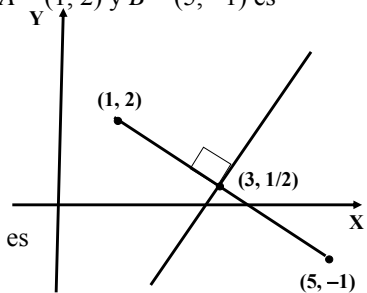
$$m = -\frac{1}{m'} = -\frac{1}{-3/4} = \frac{4}{3}$$

Por otro lado, el punto medio del segmento  $\overline{AB}$  es

$$M = \left( \frac{1+5}{2}, \frac{2+(-1)}{2} \right) = (3, 1/2)$$

Luego, la ecuación punto-pendiente de la mediatriz es:

$$y - \frac{1}{2} = \frac{4}{3}(x - 3) \Leftrightarrow 8x - 6y - 21 = 0$$



**PROBLEMA 7.** Una circunferencia tiene su centro en  $C = (1, -1)$ . Una tangente a esta circunferencia es la recta:

$$L: 5x - 12y + 9 = 0$$

Hallar la ecuación de la circunferencia.

### Solución

El radio de la circunferencia debe ser igual a la distancia del centro a la recta tangente. Esto es,

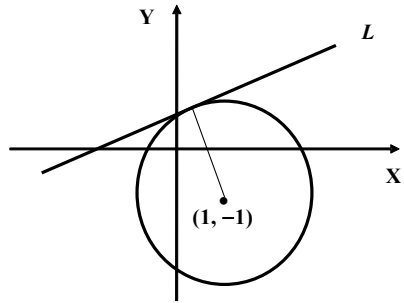
$$r = d(C, L) = \frac{|5(1) - 12(-1) + 9|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}}$$

$$= \frac{26}{\sqrt{169}} = 2$$

Luego, la ecuación de la circunferencia es:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

ó bien  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$



**PROBLEMA 8.** Una circunferencia pasa por el punto  $Q = (3, 6)$ . La recta

$$L: 3x + y + 1 = 0$$

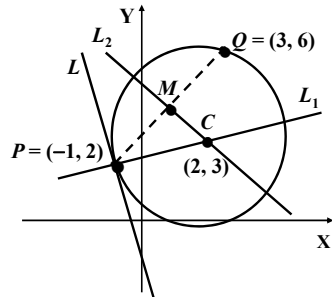
es tangente a esta circunferencia en el punto  $P = (-1, 2)$ .

Hallar una ecuación de la circunferencia.

**Solución**

En primer lugar, hallamos el centro de la circunferencia. Este debe estar localizado en la intersección de las rectas

$L_1$  y  $L_2$ , donde  $L_1$  es la recta que pasa por el punto  $P = (-1, 2)$  y es perpendicular a la recta  $L$ , y  $L_2$  es la mediatriz del segmento  $\overline{PQ}$  (la recta perpendicular al segmento  $\overline{PQ}$  y que pasa por su punto medio  $M$ ).



Procedemos por pasos.

1. Hallemos una ecuación  $L_1$ , que pasa por  $P = (-1, 2)$  y es perpendicular a  $L$ .

La pendiente de  $L$  es  $m = -3$ . Luego, la pendiente de  $L_1$  es  $m_1 = \frac{1}{3}$  y

$$L_1: y - 2 = \frac{1}{3}(x + 1) \Leftrightarrow L_1: x - 3y + 7 = 0$$

2. Hallemos una ecuación de la recta  $L_2$ , la mediatriz del segmento  $\overline{PQ}$ .

Pendiente del segmento  $\overline{PQ} = m' = \frac{6 - 2}{3 - (-1)} = 1$ .

La pendiente de  $L_2$  es  $m_2 = \frac{-1}{m'} = \frac{-1}{1} = -1$ .

El punto medio del segmento  $\overline{PQ}$  es  $M = \left( \frac{3+(-1)}{2}, \frac{6+2}{2} \right) = (1, 4)$ .

Luego,

$$L_2: y - 4 = -1(x - 1) \Leftrightarrow L_2: x + y - 5 = 0$$

3. Hallemos el centro  $C$  de la circunferencia. Como  $C$  es la intersección de las rectas  $L_1$  y  $L_2$ , debemos resolver el sistema dado por las ecuaciones de estas rectas:

$$\begin{cases} x - 3y + 7 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (2, 3)$$

4. Hallemos el radio de la circunferencia:

$$r = d(C, P) = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$$

5. Finalmente, la ecuación de la circunferencia es,

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10 \quad \text{ó bien} \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

### PROBLEMA 9. Probar el teorema 2.6

Si  $L_1$  y  $L_2$  son dos rectas no verticales con pendiente  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente. Probar que:

$$L_1 \text{ y } L_2 \text{ son perpendiculares} \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$$

#### Solución

Como la perpendicularidad permanece invariante por traslaciones, podemos suponer que estas dos rectas se intersectan en el origen.

Las ecuaciones pendiente–intersección de estas rectas son:

$$L_1: y = m_1 x, \quad L_2: y = m_2 x$$

Sea  $P = (x_1, m_1 x_1)$  un punto de  $L_1$  y

$Q = (x_2, m_2 x_2)$  un punto de  $L_2$ , tales que

ninguno de ellos es el origen.

Luego,  $x_1 \neq 0$ ,  $x_2 \neq 0$  y, por tanto,  $x_1 x_2 \neq 0$ .

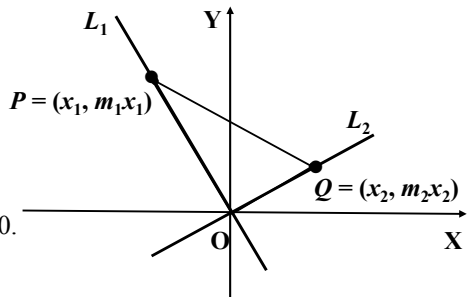
De acuerdo al teorema de Pitágoras:

$$L_1 \text{ y } L_2 \text{ son perpendiculares} \Leftrightarrow \Delta POQ \text{ es rectángulo} \Leftrightarrow$$

$$d(P, Q)^2 = d(O, P)^2 + d(O, Q)^2$$

Pero,

$$\begin{aligned} d(P, Q)^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (m_2 x_2 - m_1 x_1)^2 \\ &= x_2^2 - 2x_2 x_1 + x_1^2 + (m_2 x_2)^2 - 2m_2 m_1 x_2 x_1 + (m_1 x_1)^2 \end{aligned}$$



$$d(O, P)^2 = x_1^2 + (m_1x_1)^2 \quad \text{y} \quad d(O, Q)^2 = x_2^2 + (m_2x_2)^2$$

Luego,

$L_1$  y  $L_2$  son perpendiculares  $\Leftrightarrow$

$$x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 + (m_2x_2)^2 - 2m_2m_1x_2x_1 + (m_1x_1)^2 = x_1^2 + (m_1x_1)^2 + x_2^2 + (m_2x_2)^2$$

$$\Leftrightarrow -2x_2x_1 - 2m_2m_1x_2x_1 = 0 \Leftrightarrow -2x_2x_1(1 + m_2m_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + m_2m_1 = 0 \Leftrightarrow m_2m_1 = -1$$

**PROBLEMA 10.** Probar el teorema 2.7

Probar que la distancia del punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  a la recta  $L: Ax + By + C = 0$ , es

$$d(P, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

**Solución**

Sea  $L_1$  la recta perpendicular a  $L$  y que pasa por el punto  $P = (x_0, y_0)$ .

La pendiente de  $L$  es  $m = -\frac{A}{B}$  y,

por tanto, la pendiente de  $L_1$  es  $m_1 = \frac{B}{A}$

La ecuación punto pendiente de  $L_1$  es

$$y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0) \Leftrightarrow Ay - Bx + (Bx_0 - Ay_0) = 0$$

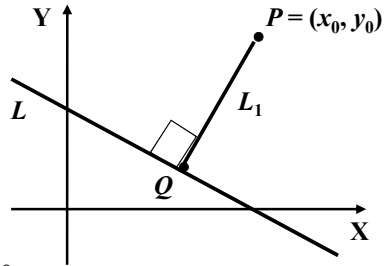
Hallemos el punto  $Q$  donde se intersectan las rectas perpendiculares  $L$  y  $L_1$ . Para esto resolvemos el sistema:

$$(1) \quad Ax + By + C = 0, \quad (2) \quad Ay - Bx + (Bx_0 - Ay_0) = 0$$

El resultado es  $Q = \left( \frac{B^2x_0 - AB y_0 - AC}{A^2 + B^2}, \frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2} \right)$

Ahora,

$$\begin{aligned} d(P, L)^2 = d(P, Q)^2 &= \left( \frac{B^2x_0 - AB y_0 - AC}{A^2 + B^2} - x_0 \right)^2 + \left( \frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2} - y_0 \right)^2 \\ &= \left( \frac{-A}{A^2 + B^2} \right)^2 (Ax_0 + By_0 + C)^2 + \left( \frac{-B}{A^2 + B^2} \right)^2 (Ax_0 + By_0 + C)^2 \end{aligned}$$



$$= \frac{A^2 + B^2}{(A^2 + B^2)^2} (Ax_0 + By_0 + C)^2 = \frac{1}{A^2 + B^2} (Ax_0 + By_0 + C)^2$$

Extrayendo raíz cuadrada,  $d(P, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

---

## PROBLEMAS PROPUESTOS 2.3

---

1. Usando pendientes probar que los puntos  $A = (2, 1)$ ,  $B = (-4, -2)$ ,  $C = (1, 1/2)$  son colineales.

*En los problemas del 2 al 9, hallar una ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas y llevarla a la forma  $y = mx + b$ .*

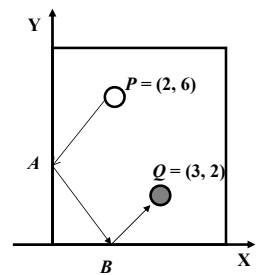
2. Pasa por el punto  $(1, 3)$  y tiene pendiente 5.
3. Tiene pendiente  $-3$  y pasa por el origen.
4. Pasa por los puntos  $(1, 1)$  y  $(2, 3)$ .
5. Intersecta al eje X en 5 y al eje Y en 2.
6. Pasa por el punto  $(1, 3)$  y es paralela a la recta  $5y + 3x - 6 = 0$ .
7. Pasa por el punto  $(4, 3)$  y es perpendicular a la recta  $5x + y - 2 = 0$ .
8. Es paralela a  $2y + 4x - 5 = 0$  y pasa por el punto de intersección de las rectas  $5x + y = 4$ ,  $2x + 5y - 3 = 0$ .
9. Intersecta a los ejes coordenados a igual distancia del origen y pasa por  $(8, -6)$ .
10. Dada la recta  $L: 2y - 4x - 7 = 0$
- Encontrar la recta que pasa por el punto  $P = (1, 1)$  y es perpendicular a  $L$ .
  - Hallar la distancia del punto  $P = (1, 1)$  a la recta  $L$ .
11. Usando pendientes probar que los puntos  $A = (3, 1)$ ,  $B = (6, 0)$  y  $C = (4, 4)$  son los vértices de un triángulo rectángulo. Hallar el área de dicho triángulo.
12. Determinar cuáles de las siguientes rectas son paralelas y cuáles son perpendiculares:
- |                             |                           |                            |
|-----------------------------|---------------------------|----------------------------|
| a. $L_1: 2x + 5y - 6 = 0$ , | b. $L_2: 4x + 3y - 6 = 0$ | c. $L_3: -5x + 2y - 8 = 0$ |
| d. $L_4: 5x + y - 3 = 0$    | e. $L_5: 4x + 3y - 9 = 0$ | f. $L_6: -x + 5y - 20 = 0$ |
13. Hallar la mediatriz de cada uno de los siguientes segmentos de extremos
- |                         |                          |                           |
|-------------------------|--------------------------|---------------------------|
| a. $(1, 0)$ y $(2, -3)$ | b. $(-1, 2)$ y $(3, 10)$ | c. $(-2, 3)$ y $(-2, -1)$ |
|-------------------------|--------------------------|---------------------------|

14. Los extremos de una de las diagonales de un rombo son  $(2, -1)$  y  $(14, 3)$ .  
Hallar una ecuación de la recta que contiene a la otra diagonal.  
Sugerencia: las diagonales de un rombo son perpendiculares.
15. Hallar la distancia del origen a la recta  $4x + 3y - 15 = 0$ .
16. Hallar la distancia del punto  $(0, -3)$  a la recta  $5x - 12y - 10 = 0$ .
17. Hallar la distancia del punto  $(1, -2)$  a la recta  $x - 3y = 5$ .
18. Hallar la distancia entre las rectas paralelas  $3x - 4y = 0$ ,  $3x - 4y = 10$ .
19. Hallar la distancia entre las rectas paralelas  $3x - y + 1 = 0$ ,  $3x - y + 9 = 0$ .
20. Hallar la distancia de  $Q = (6, -3)$  a la recta que pasa por  $P = (-4, 1)$  y es paralela a la recta  $4x + 3y = 0$
21. Determinar el valor de  $C$  en la recta  $L: 4x + 3y + C = 0$  sabiendo que la distancia del punto  $Q = (5, 9)$  a  $L$  es 4 veces la distancia del punto  $P = (-3, 3)$  a  $L$ .
22. Hallar las rectas paralelas a la recta  $5x + 12y - 12 = 0$  y que distan 4 unidades de ésta.
23. Hallar la ecuación de la recta que es tangente en el punto  $(-1, 1)$  a la circunferencia  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$
24. Hallar las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto  $P = (2, -8)$  y son tangentes a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 34$
25. En el problema anterior, hallar los puntos de contacto de las tangentes con la circunferencia.
26. Hallar las ecuaciones de las dos rectas paralelas a la recta  $2x - 2y + 5 = 0$  y que son tangentes a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 9$ .
27. Hallar la ecuación de la recta que es tangente en el punto  $(2, 2)$  a la circunferencia  $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$ .
28. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro  $C = (1, -1)$  que es tangente a la recta  $5x - 12y + 22 = 0$ .
29. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por  $Q = (4, 0)$  y es tangente a la recta  $3x - 4y + 20 = 0$  en el punto  $P = (-12/5, 16/5)$ .
30. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos  $(3, 1)$  y  $(-1, 3)$  y su centro está en la recta  $3x - y - 2 = 0$ .
31. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a las rectas paralelas:  $2x + y - 5 = 0$ ,  $2x + y + 15 = 0$ .  $B = (2, 1)$  uno de los puntos de tangencia.

32. Hallar la ecuación de la recta que pasando por el punto  $P = (8, 6)$  intersecta a los ejes coordenados formando un triángulo de área 12 unidades cuadradas.
33. Determinar para que valores de  $k$  y de  $n$  las rectas:  

$$kx - 2y - 3 = 0, \quad 6x - 4y - n = 0$$
 a. Se intersectan en un único punto.      b. son perpendiculares  
 c. son paralelas no coincidentes      d. son coincidentes.
34. Determinar para qué valores de  $k$  y de  $n$  las rectas:  

$$kx + 8y + n = 0, \quad 2x + ky - 1 = 0$$
 a. son paralelas no coincidentes      b. son coincidentes.      c. son perpendiculares.
35. Un cuadrado tiene por centro  $C = (1, -1)$  y uno de sus lados está en la recta  $x - 2y = -12$ . Hallar las ecuaciones de las rectas que contienen a los otros lados.
36. Probar que los puntos  $A = (1, 4)$ ,  $B = (5, 1)$ ,  $C = (8, 5)$  y  $D = (4, 8)$  son los vértices de un rombo (cuadrilátero de lados de igual longitud). Verifique que las diagonales se cortan perpendicularmente.
37. Sean  $a$  y  $b$  la abscisa en el origen y la ordenada en el origen de una recta.  
 Si  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$ , probar que una ecuación de esta recta es  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .
38. Roberto está defendiendo los colores de su club en un campeonato de billar. En determinado momento, él debe golpear con una bola blanca a la roja con un tiro sin efecto y usando 2 bandas, como indica la figura. Si la bola blanca está en el punto  $P = (2, 6)$  y la roja en  $Q = (3, 2)$ , hallar los puntos  $A$  y  $B$  en los extremos de la mesa donde la bola debe tocar para que la jugada tenga éxito.



# 3

---

## LAS CONICAS

---

*APOLONIO DE PERGA*  
(262–190 A.C.)

**3.1 INTRODUCCION**

**3.2 LA PARABOLA**

**3.3 LA ELIPSE**

**3.4 LA HIPERBOLA**

**3.5 LA ECUACION GENERAL DE SEGUNDO GRADO  
ROTACION DE EJES**

**APOLONIO DE PERGA**  
(262–190 A. C.)



**APOLONIO DE PERGA**, conocido como *el gran geómetra*, nació en Perga, antigua ciudad de la Grecia Antigua que ahora pertenece a Turquía con el nombre de Murtana. El Nuevo Testamento, en Los Hechos 13, nos dice que el apóstol Pablo visitó esta ciudad, en su primer viaje misionero. Esto sucedió, aproximadamente, 300 años después que Apolonio escribió su famosa obra, **Las Cónicas**. Esta obra cumplió un papel muy importante en el desarrollo de la matemática por varios siglos. Aquí aparecieron por primera vez los términos **Parábola**, **elipse** e **hipérbola**. La obra consiste de 8 libros, el octavo de los cuales se perdió.

Apolonio, además de *Las Cónicas*, escribió otros libros. Uno de ellos fue “**Acerca de los Espejos Incendiarios**”. Aquí, Apolonio describe las propiedades reflexivas de los espejos parabólicos:

Los rayos paralelos al eje, al reflejarse en el espejo, todos pasan por un único punto (el foco). Esta propiedad lo aprovechó Arquímedes para defender Siracusa. Una expedición romana, al mando del general Marcelo, el año 213 A.C. inició la conquista de Siracusa, ciudad griega donde vivía Arquímedes, situada en la isla de Sicilia, Italia. Los griegos pudieron detener al superior ejército romano por tres años, gracias a las armas que inventó el sabio. Una de estas armas fueron unos espejos parabólicos, que concentraban los rayos solares para incendiar los barcos romanos.



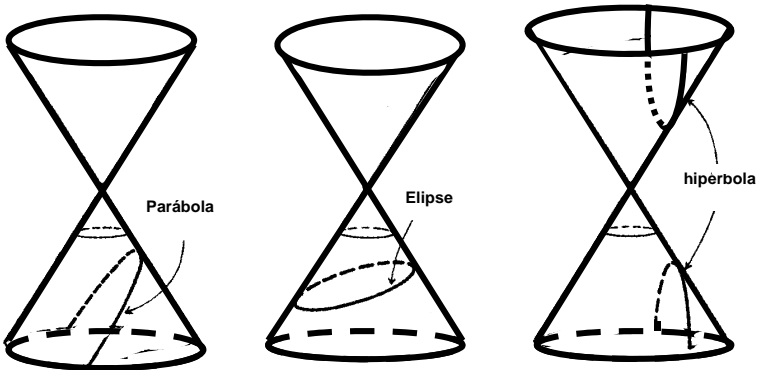
Apolonio, Euclides y Arquímedes son considerados como los matemáticos más distinguidos de la Grecia Antigua.

**SECCION 3.1**  
**INTRODUCCION**

Las cónicas juegan un rol fundamental en el estudio del Cálculo. Debido a la importancia del tema y a su extensión, se decidió asignarle un capítulo propio.

Tenemos tres cónicas, **la parábola, la elipse y la hipérbola**. Estas curvas han sido estudiadas por muchos matemáticos por más de 2,300 años. Se distinguen por su amplio rango de aplicaciones, como en el estudio del movimiento planetario, en el diseño de telescopios y antenas, etc.

A estas tres curvas se les da el nombre común de **secciones cónicas**, o simplemente **cónicas**, debido a que ellas pueden obtenerse como intersecciones de un plano con un cono circular recto.



A cada una de estas curvas dedicaremos una sección.

**SECCION 3.2**  
**LA PARABOLA**

**DEFINICION.** Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo  $F$  y de una recta fija  $L$  del plano que no contiene a  $F$ . El punto fijo  $F$  se llama **foco** y la recta fija  $L$ , es la **directriz**.

La recta perpendicular a la directriz y que pasa por el foco se llama **eje de la parábola**, el punto del eje que esta a la mitad de la distancia del foco y la directriz es el **vértice**.

### ECUACION CANONICA DE LA PARABOLA

Para obtener una ecuación de la parábola, que sea lo más simple posible, hacemos coincidir el vértice con el origen y el eje de la parábola con uno de los ejes coordenados, la directriz es perpendicular a este eje.

#### Caso 1. Ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje es el eje Y.

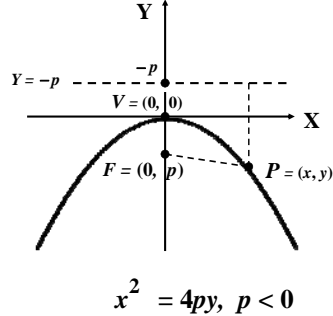
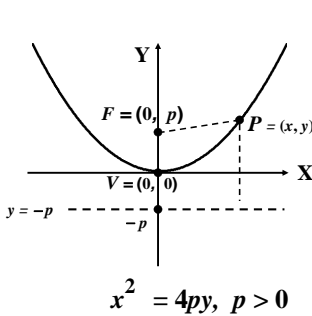
Sea  $F = (0, p)$  el foco. La directriz es  $y = -p$ . Sea  $P = (x, y)$ . Tenemos que:

$$d(P, F) = \sqrt{x^2 + (y-p)^2} \quad \text{y} \quad d(P, L) = |y+p|.$$

Luego, si  $P = (x, y)$  es un punto de la parábola, entonces, por definición:

$$\begin{aligned} d(P, F) = d(P, L) &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p| \Leftrightarrow x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 4py \quad (1) \end{aligned}$$

Si  $p > 0$ , la parábola se abre hacia arriba y si  $p < 0$ , se abre hacia abajo



#### Caso 2. Ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje es el eje X.

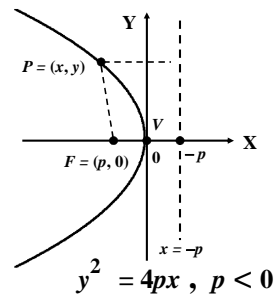
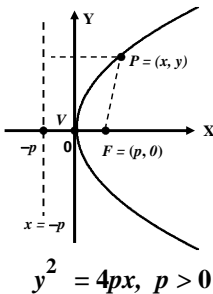
Sea  $F = (p, 0)$  el foco. La directriz es  $x = -p$ . Sea  $P = (x, y)$ . Tenemos que:

$$d(P, F) = \sqrt{(x-p)^2 + y^2} \quad \text{y} \quad d(P, L) = |x+p|.$$

Luego, si  $P = (x, y)$  es un punto de la parábola, entonces, por definición:

$$\begin{aligned} d(P, F) = d(P, L) &\Leftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p| \Leftrightarrow (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \\ &\Leftrightarrow y^2 = 4px \quad (2) \end{aligned}$$

Si  $p > 0$ , la parábola se abre hacia la derecha y si  $p < 0$ , se abre hacia la izquierda.



Resumimos los resultados anteriores en el siguiente teorema.

**TEOREMA 3.1.** Ecuaciones canónicas o estándar de la parábola.

1. Ecuación de la parábola de **vértice en el origen** y cuyo eje coincide con el eje Y:

$$x^2 = 4py.$$

El **foco** es  $F = (0, p)$  y la **directriz**,  $y = -p$ . Si  $p > 0$ , la parábola se abre hacia **arriba**. Si  $p < 0$ , la parábola se abre hacia **abajo**.

2. Ecuación de la parábola de **vértice en el origen** y cuyo eje coincide con el eje X:

$$y^2 = 4px.$$

El **foco** es  $F = (p, 0)$  y la **directriz**,  $x = -p$ . Si  $p > 0$ , la parábola se abre hacia la **derecha**. Si  $p < 0$ , la parábola se abre hacia la **izquierda**.

**EJEMPLO 1.** Hallar el foco y la directriz de la parábola  $x^2 = -16y$

**Solución**

Tenemos que  $x^2 = -16y \Rightarrow 4p = -16 \Rightarrow p = -4$

Luego, el foco es  $F = (0, -4)$  y la directriz es  $y = 4$

**DEFINICION.** Se llama **lado recto** de una parábola a la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje. La longitud del lado recto es el **diámetro focal**.

La longitud del lado recto, o sea el diámetro focal, es  $L = 4|p|$

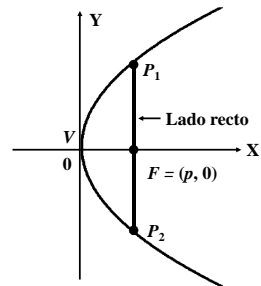
En efecto. Consideremos la parábola  $y^2 = 4px$

Si  $y_1$  es la ordenada del punto  $P_1$ , entonces  $P_1 = (p, y_1)$ .

Por estar este punto en la parábola, se tiene:

$$y_1^2 = 4pp = 4p^2 \Rightarrow y_1 = \sqrt{4p^2} = 2|p|$$

Luego, la longitud del lado recto es  $2y_1 = 4|p|$



**EJEMPLO 2.** Una parábola tiene su vértice en el origen, su eje coincide con el eje X y pasa por el punto  $(-1, 2\sqrt{2})$ .

- a. Hallar la ecuación canónica de la parábola.

- b. Hallar el foco y la directriz.
- c. Hallar la longitud del lado recto.

**Solución**

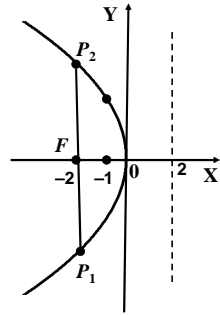
- a. La ecuación que buscamos es de la forma  $y^2 = 4px$ .  
Como la parábola pasa por el punto  $(-1, 2\sqrt{2})$ , tenemos:

$$(2\sqrt{2})^2 = 4p(-1) \Rightarrow 8 = -4p \Rightarrow p = -2$$

Luego, la ecuación de la parábola es  $y^2 = -8x$

- b.  $F = (p, 0) = (-2, 0)$ . Directriz:  $x = 2$ .
- c. El lado recto es el segmento  $\overline{P_1P_2}$  y su longitud es

$$L = 4|p| = 4|-2| = 8$$



**ECUACION CANONICA DE LA PARABOLA TRASLADADA**

Si al vértice de las parábolas del teorema 1, que está en el origen, lo trasladamos al punto  $(h, k)$ , manteniendo el eje paralelo a uno de los ejes coordenados, obtenemos el siguiente resultado:

- 1. La ecuación de la parábola de vértice en  $(h, k)$  y cuyo eje es paralelo al eje Y es  $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ .

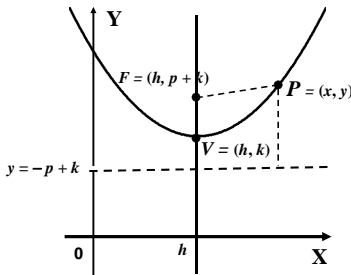
El foco es  $F = (h, p + k)$  y la directriz es  $y = -p + k$ .

Si  $p > 0$ , la parábola se abre hacia arriba. Si  $p < 0$ , la parábola se abre hacia abajo.

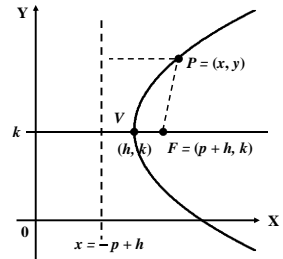
- 2. La ecuación de la parábola de vértice en  $(h, k)$  y cuyo eje es paralelo al eje X es  $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ .

El foco es  $F = (p + h, k)$ , la directriz es  $x = -p + h$ .

Si  $p > 0$ , la parábola se abre hacia la derecha. Si  $p < 0$ , la parábola se abre hacia la izquierda.



$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

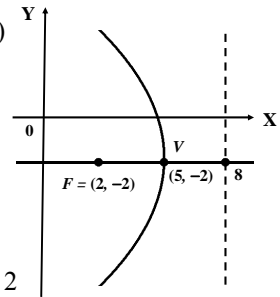


$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

**EJEMPLO 3.** Hallar la ecuación canónica de la parábola que tiene por foco  $F = (2, -2)$  y por directriz  $x = 8$ .

**Solución**

Buscamos una ecuación de la forma  $(y - k)^2 = 4p(x - h)$   
 Debemos hallar los valores de  $h$  y  $k$ .  
 Sabemos que para este caso  $F = (p + h, k)$  y la directriz es  $x = -p + h$ . Luego,



$$F = (p + h, k) = (2, -2) \text{ y } x = -p + h = 8 \Rightarrow$$

$$p + h = 2, k = -2, -p + h = 8 \Rightarrow p = -3, h = 5, k = -2$$

En consecuencia, la ecuación de la parábola es

$$(y - (-2))^2 = 4(-3)(x - 5), \text{ o sea } (y + 2)^2 = -12(x - 5)$$

**EJEMPLO 4.** Probar la siguiente ecuación es una parábola.

$$3x^2 - 12x + 4y + 8 = 0$$

Hallar su vértice, su eje, su foco y su directriz.

**Solución**

Completamos cuadrados:

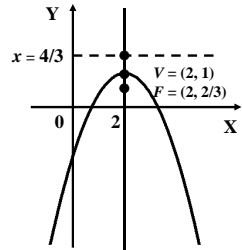
$$3x^2 - 12x + 4y + 8 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = -4y - 8$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - 4x) = -4y - 8$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 4) = -4y - 8 + 12$$

$$\Leftrightarrow 3(x - 2)^2 = -4(y - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = -\frac{4}{3}(y - 1)$$



Esta última ecuación es la ecuación estándar de una parábola con

Vértice  $V = (h, k) = (2, 1)$  y eje  $x = 2$ .

Por otro lado,  $4p = -\frac{4}{3} \Rightarrow p = -\frac{1}{3}$ . Luego,

$$F = (h, p + k) = (2, -1/3 + 1) = (2, -2/3).$$

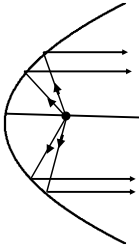
Directriz:  $x = -p + k = -(-1/3) + 1 \Rightarrow x = 4/3$

**PROPIEDAD REFLEXIVA DE LA PARABOLA**

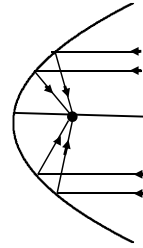
Una de las aplicaciones más importantes de la parábola lo encontramos en la construcción de reflectores de luz, como en los faros de los automóviles. En estos faros se aprovecha la propiedad reflexiva de la parábola, que nos asegura que:

Los rayos de luz que se originan en foco se reflejan en la parábola siguiendo trayectorias paralelas al eje.

Esta propiedad la probaremos en el problema resuelto 7.



*Los rayos salen del foco*



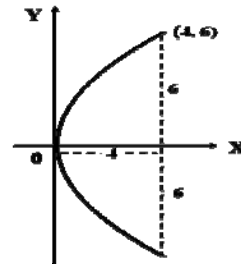
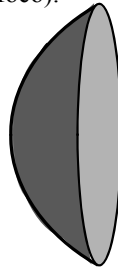
*Los rayos llegan al foco*

En la segunda figura usamos la propiedad reflexiva en sentido inverso. Los rayos de luz que llegan a la parábola con trayectorias paralelas al eje, se reflejan en la parábola y todos estos rayos reflejados pasan por el foco. Este es el principio en que se basan los telescopios y radares.

En los faros de los carros o en los telescopios, se usan **espejos parabólicos**. Se llama **paraboloide de revolución** a la superficie que se obtiene al girar una parábola alrededor de su eje. Un espejo parabólico es un paraboloide de revolución.

**EJEMPLO 5.** Se está diseñando un espejo parabólico para usarlo como un reflector. El espejo debe tener un diámetro 12 cm. y una profundidad de 4 cm.

- Hallar la ecuación de la parábola que debe dar forma al espejo.
- Hallar la distancia del vértice al punto donde debe colocarse la fuente de luz (el foco).



### Solución

- Colocamos la parábola con vértice en el origen y abriéndose a la derecha. Luego, su ecuación es de la forma  $x^2 = 4py$ . Debemos encontrar el valor de  $p$ . Como el punto  $(4, 6)$  está en la parábola, tenemos que:

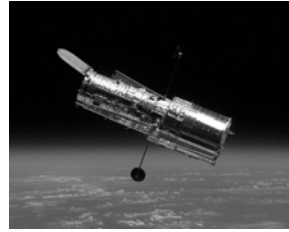
$$6^2 = 4p(4) \Rightarrow 36 = 16p \Rightarrow p = 9/4$$

Luego, la ecuación de la parábola es  $x^2 = 4\left(\frac{9}{4}\right)y$ . Esto es,  $x^2 = 9y$

- El foco de la parábola es  $F = (p, 0) = (9/4, 0)$ . Luego, la fuente de luz debe estar a  $9/4 = 2.25$  cm. del vértice.

**¿SABIAS QUE . . .**

En 1990 la NASA puso en órbita, alrededor de la Tierra, el **telescopio espacial Hubble**, cumpliéndose así, uno de los sueños de los astrónomos de contar con un observatorio fuera de la atmósfera. Este telescopio cuenta con un espejo parabólico de 2.4 m. de diámetro, gira a una altura promedio de 575 Km sobre la superficie terrestre y da una vuelta nuestro planeta cada 96 minutos.



Este telescopio fue nombrado así en honor del astrónomo americano **Edwin Powell Hubble** (1889–1953), quien en 1929 dio a conocer sorprendentes resultados sobre la expansión del universo, dando lugar a la teoría del **Big Bang**. Según esta teoría, nuestro universo se originó en una gran explosión que ocurrió hace 13.7 millardos de años.

**PROBLEMAS RESUELTOS 3. 2**

**PROBLEMA 1.** Hallar una ecuación de la parábola que abre hacia la derecha y tiene por lado recto el segmento de extremos (6, -4) y (6, 8).

**Solución**

El foco es el punto medio del lado recto. Esto es,  $F = (6, 2)$

La longitud del lado recto es  $L = 8 - (-4) = 12$ .

Pero, sabemos que  $L = 4|p|$ . Como la parábola se abre a la derecha, entonces  $p > 0$ .

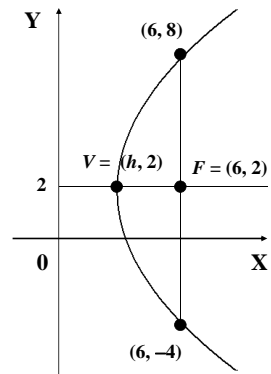
Luego,  $4p = 12 \Rightarrow p = 3$

Sea  $V = (h, 2)$  el vértice. Debemos tener que

$h + p = 6 \Rightarrow h + 3 = 6 \Rightarrow h = 3$

En consecuencia, una ecuación de la parábola es

$$(y - 2)^2 = 12(x - 3)$$



**PROBLEMA 2.** Un tanque de agua de una finca tiene la forma de de un paraboloide de revolución. El tanque tiene una altura de 9 m. y el diámetro de su tapa es de 12m. Si el nivel del agua está a 4 m. debajo de la tapa, hallar el diámetro de la superficie del agua.

**Solución.**

Colocamos el origen de coordenadas en la base del tanque, como indica la figura.

La ecuación de la parábola es  $x^2 = 4py$ .

Como el punto  $(6, 9)$  está en la parábola, tenemos:

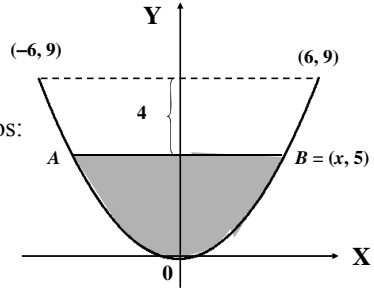
$$(6)^2 = 4p(9) \Rightarrow p = 1$$

Luego, la ecuación de la parábola es  $x^2 = 4y$ .

Como  $B = (x, 5)$  está en la parábola, tenemos:

$$x^2 = 4(5) \Rightarrow x = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

El diámetro de la superficie del agua es  $2(2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$



### PROBLEMA 3.

Las torres de un puente colgante están a 400 m de distancia y tiene una altura de 90 m. El cable entre las torres tiene forma parabólica y su punto más bajo está a 10 m sobre la carretera.

- Hallar una ecuación de la parábola generada por el cable.
- Hallar la altura a que está el cable en el punto de la vía que está a 50 m. del pie de la torre.

### Solución

- Hacemos coincidir al eje X con la carretera, al eje Y con el eje de la parábola y el vértice en el punto  $(0, 10)$ .

La ecuación de la parábola es de la forma

$$x^2 = 4p(y - 10)$$

El punto  $(200, 90)$  está en la parábola. Luego,

$$(200)^2 = 4p(90 - 10) \Rightarrow 40,000 = 320p \Rightarrow p = 125$$

La ecuación buscada es  $x^2 = 4(125)(y - 10)$ . O sea,

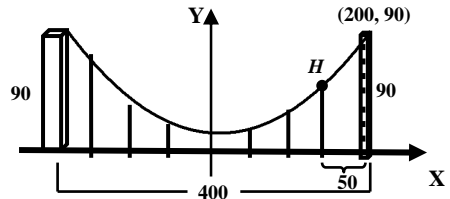
$$x^2 = 500(y - 10).$$

- El punto que está a 50 m de la torre tiene por abscisa  $x = 200 - 50 = 150$ .

Sea  $H = (150, y)$  el punto de la parábola. La altura que buscamos es la ordenada de este punto. Tenemos que:

$$(150)^2 = 500(y - 10) \Rightarrow 22,500 = 500y - 5,000 \Rightarrow y = 55$$

La altura del cable en el punto de la vía que está 50 m de la torre es 55 m.

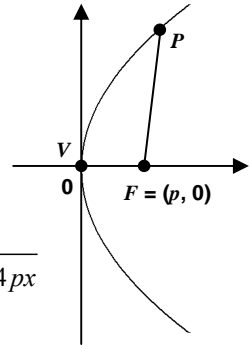


**PROBLEMA 4.** Pruebe que, en una parábola, el punto más cercano al foco es el vértice.

**Solución**

No se pierde generalidad si consideramos que la parábola es de la forma  $y^2 = 4px$ , con  $p > 0$ . O sea es una parábola con vértice el origen, que tiene como eje el eje X y que se abre a la derecha.

El foco es  $F = (p, 0)$  y un punto cualquiera de la parábola es de la forma  $P = (x, \sqrt{4px})$ . La distancia de P al foco es



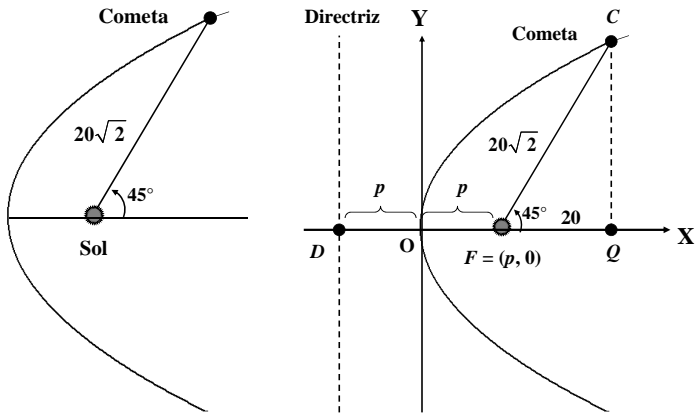
$$d(P, F) = \sqrt{(x-p)^2 + (\sqrt{4px} - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 2px + p^2 + 4px}$$

$$= \sqrt{x^2 + 2px + p^2} = \sqrt{(x+p)^2} = |x+p| = x+p$$

Esta distancia es mínima cuando  $x = 0$ . Luego, el punto de la parábola que está más cerca del foco es  $P = (0, \sqrt{4p(0)}) = (0, 0) = V$ . Aún más, esta distancia mínima es  $p$ .

**PROBLEMA 5.** La órbita de un cometa es una parábola en cuyo foco está el sol. Cuando el cometa está  $20\sqrt{2}$  millones de Km. del sol, la recta que pasa por el sol y el cometa forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje de la parábola. Hallar la mínima distancia del cometa al sol.

**Solución**



Ponemos un sistema de coordenadas con origen en el vértice y con el eje de la parábola sobre el eje X y con el foco a la derecha del vértice.

Sea C el punto de la parábola donde está el cometa. La directriz es  $x = -p$ . Tracemos el segmento  $\overline{QC}$  perpendicular al eje.

La longitud del segmento  $\overline{FQ}$  es  $d(F, Q) = 20\sqrt{2} \cos(45^\circ) = 20\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 20$

De acuerdo a la definición de parábola:  $d(C, \text{Directriz}) = d(C, F)$ .

Pero,

$$d(C, \text{Directriz}) = d(D, Q) = d(D, F) + d(F, Q) = 2p + 20 \quad \text{y} \quad d(C, F) = 20\sqrt{2}$$

Luego,  $2p + 20 = 20\sqrt{2} \Rightarrow p = 10(\sqrt{2} - 1)$ .

En consecuencia, de acuerdo al problema resuelto anterior, la distancia mínima del cometa al sol,

$$d(V, F) = p = 10(\sqrt{2} - 1) \text{ millones de Km.}$$

El resultado que presentamos en el siguiente problema se podrá obtener de una manera muy simple y rutinaria después de aprender a derivar en un capítulo posterior. Sin embargo, este resultado es importante en este momento para demostrar la propiedad reflexiva de la parábola, que, como ya vimos, tiene importantes aplicaciones. Aquí seguiremos un camino netamente algebraico, el cual es largo y tedioso.

#### **PROBLEMA 6.** Pendiente de la recta tangente

Probar que la pendiente de la recta tangente a la parábola

$$y^2 = 4px$$

en cualquier punto  $P = (x_1, y_1)$  de la curva es

$$m = \frac{2p}{y_1}$$

#### **Demostración**

La ecuación de la recta tangente a la parábola  $y^2 = 4px$  en el punto  $P = (x_1, y_1)$  es

$$y = m(x - x_1) + y_1, \text{ donde } m \text{ es la pendiente por determinar.}$$

Interceptamos la recta tangente con la parábola. Reemplazando el valor de  $y$  dado en la ecuación de la tangente por el valor de  $y$  en la parábola, obtenemos:

$$(m(x - x_1) + y_1)^2 = 4px$$

Desarrollando el cuadrado y factorizando,

$$m^2x^2 + (2mx_1 - 2m^2x_1 - 4p)x + (y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1) = 0$$

Como la tangente y parábola se corta en un único punto, la ecuación de segundo grado anterior debe tener una única solución. Esto es posible si su discriminante es cero. Esto es,

$$(2mx_1 - 2m^2x_1 - 4p)^2 - 4m^2(y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1) = 0$$

Efectuando las operaciones indicadas y simplificando,

$$x_1 m^2 - y_1 m + p = 0$$

De donde,

$$m = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4px_1}}{2x_1} \quad (1)$$

Pero, por estar el punto  $P = (x_1, y_1)$  en la parábola, se cumple que

$$y_1^2 = 4px_1 \text{ y, de donde, } x_1 = \frac{y_1^2}{4p}$$

Luego, regresando a ecuación (1):

$$m = \frac{y_1}{2x_1} = \frac{y_1}{2\left(\frac{y_1^2}{4p}\right)} = \frac{2p}{y_1}$$

**PROBLEMA 7. Propiedad reflexiva de la parábola.**

Sea  $P = (x_1, y_1)$  un punto cualquiera de la parábola y sea  $N$  la recta normal a la parábola en el punto  $P$ . Sea  $\alpha$  el ángulo que forma  $N$  con el segmento que une el punto  $P$  con el foco y sea  $\beta$  el ángulo que forma  $N$  con la recta  $L$  que pasa por  $P$  y es paralela al eje de la parábola. Se cumple que

$$\alpha = \beta$$

**Demostración**

No perdemos generalidad si tomamos la parábola con vértice en el origen, que se abre a la derecha y que su eje coincide con el eje X.

La ecuación de esta parábola es de la forma:

$$y^2 = 4px$$

De acuerdo al problema resuelto anterior, la pendiente de la recta tangente a la parábola en

el punto  $P = (x_1, y_1)$  es  $m = \frac{2p}{y_1}$ .

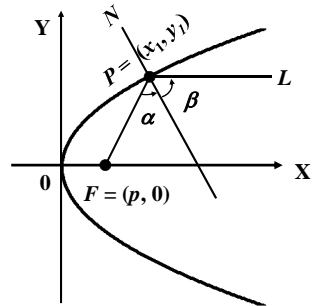
La pendiente del segmento  $\overline{FP}$  es  $m_1 = \frac{y_1}{x_1 - p}$

La pendiente de la recta normal  $N$ , por ser perpendicular a la recta tangente, es

$$m_2 = -\frac{1}{m} = -\frac{y_1}{2p}$$

La pendiente de la recta  $L$ , por ser paralela al eje X, es  $m_3 = 0$

Luego,



$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-\frac{y_1}{2p} - \frac{y_1}{x_1 - p}}{1 + \left(\frac{y_1}{x_1 - p}\right)\left(-\frac{y_1}{2p}\right)} = \frac{-x_1 y_1 - p y_1}{2 p x_1 - 2 p^2 - y_1^2}$$

Como  $P_1 = (x_1, y_1)$  está en la parábola, se cumple que  $y_1^2 = 4 p x_1$

Reemplazando este valor de  $y_1^2$  en la expresión anterior, se tiene:

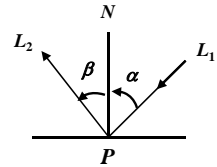
$$\tan \alpha = \frac{-x_1 y_1 - p y_1}{2 p x_1 - 2 p^2 - 4 p x_1} = \frac{-y_1 (x_1 + p)}{-2 p (x_1 + p)} = \frac{y_1}{2 p} \quad (1)$$

Por otro lado,

$$\tan \beta = \frac{m_3 - m_2}{1 + m_2 m_3} = \frac{0 - \left(-\frac{y_1}{2p}\right)}{1 + \left(-\frac{y_1}{2p}\right)(0)} = \frac{y_1}{2p} \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos que  $\alpha = \beta$ .

En Física, tenemos la **ley de reflexión** que dice: Un rayo de luz  $L_1$  choca en un espejo y se refleja siguiendo la recta  $L_2$ . Si  $\alpha$  es ángulo formado por  $L_1$  y la normal  $N$ , y  $\beta$  es el ángulo formado por  $N$  y  $L_2$ , entonces  $\alpha = \beta$ .



El resultado demostrado en el problema y la ley de reflexión nos aseguran que los rayos de luz que salen del foco y se reflejan en el espejo parabólico, los rayos reflejados son paralelos al eje.

## PROBLEMAS PROPUESTOS 3.2

En los problemas del 1 al 5, hallar el foco, la directriz y la longitud  $L$  del lado recto de la parábola indicada.

1.  $x^2 = 4y$

2.  $3x^2 + 4y = 0$

3.  $y^2 - 6x = 0$

4.  $y^2 + 20x = 0$

5.  $4y^2 + x = 0$

En los problemas del 6 al 10, hallar el vértice, el eje, el foco, la directriz y la longitud  $L$  del lado recto de la parábola indicada.

6.  $x^2 - 2x - 8y = -12$

7.  $y^2 + 10y = x - 26$

8.  $y^2 - 4y = 2x + 4$

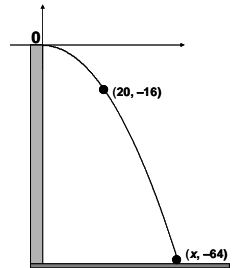
9.  $4x^2 + 4x + 4y + 1 = 0$

10.  $9x^2 + 24x + 72y + 88 = 0$

En los problemas del 11 al 23, hallar la ecuación de la parábola que tiene las propiedades indicadas

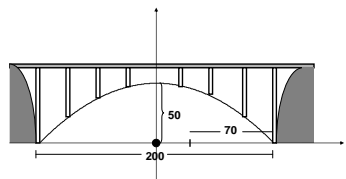
- 11. Foco  $(-6, 0)$ , directriz:  $x = 6$
- 12. Foco  $(0, 4)$ , directriz:  $y = -4$
- 13. Foco  $(2, 5)$ , directriz:  $y = -1$
- 14. Foco  $(-7/8, -2)$ , directriz:  $x = -9/8$
- 15. Vértice  $(-2, 2)$ , directriz:  $x = 2$
- 16. Vértice  $(-2, 2)$ , directriz:  $y = -2$
- 17. Vértice  $(3, 1)$ , foco  $(3, 5)$
- 18. Vértice  $(0, 0)$ , eje:  $x = 0$ , pasa por  $(3, -2)$
- 19. Vértice  $(1, 2)$ , eje: paralelo al eje X, pasa por  $(5, 8)$
- 20. Vértice  $(1, -2)$ , eje: paralelo al eje Y, longitud lado recto: 6
- 21. Directriz:  $x = -2$ , eje:  $y = 1$ , longitud lado recto: 8
- 22. Puntos extremos del lado recto:  $(1, 1)$  y  $(7, 1)$ . Se abre hacia arriba.
- 23. Vértice  $(0, 0)$ , extremos del lado recto:  $(-4, k)$  y  $(4, k)$ . Se abre hacia abajo.

24. Una pelota es lanzada horizontalmente desde la orilla de una azotea de un edificio de 64 m de altura. La trayectoria de la pelota es una parábola cuyo vértice está en la orilla del edificio y su eje está a lo largo del muro. La pelota pasa por un punto que está a 20 m del muro cuando la distancia vertical es de 16 m.



- a. Hallar una ecuación de la trayectoria, ubicando el origen de coordenadas en el vértice y el eje Y coincide con el eje de la parábola.
  - b. Hallar la distancia al muro del punto donde la pelota golpea el suelo.
25. Un faro está construido por un espejo parabólico de 12 cm. de diámetro y un de 2 cm. de profundidad. ¿A qué distancia del vértice se debe colocarse la fuente luz para que los rayos se reflejen paralelamente al eje de la parábola?
26. La orilla de una antena parabólica es una circunferencia de 1 m de diámetro y en su centro está el receptor de los rayos que vienen del exterior. Hallar la profundidad de la antena.
27. Las torres de un puente colgante están a 150 m de distancia y tiene una altura de 23 m. El cable entre las torres tiene forma parabólica y su punto más bajo está a 8 m sobre la carretera.
- a. Hallar una ecuación de la parábola que generada por el cable.
  - b. Hallar la altura que está el cable en el punto de la vía que está a 15 m. del pie de la torre.

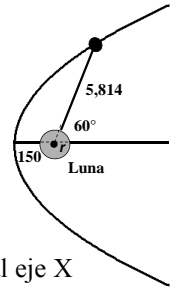
28. Un puente se sostiene sobre un arco parabólico de concreto. El arco tiene una abertura de 200 pies al nivel del agua y una altura en su centro de 50 pies.



- a. Hallar una ecuación de la parábola introduciendo un sistema de coordenadas como indica la figura.
- b. Hallar la altura del arco sobre el nivel del agua en el punto que está a 70 pies del extremo derecho del arco.

29. La órbita de un cometa es una parábola en cuyo foco está el sol. Cuando el cometa está 60 millones de Km. del sol, la recta que pasa por el sol y el cometa forma un ángulo de  $60^\circ$  con el eje de la parábola. Hallar la mínima distancia del cometa al sol.

30. Se colocó un satélite de órbita parabólica con foco en el centro de la luna. Cuando el satélite está a 5,814 km. de la superficie lunar, el eje de la parábola y la recta que pasa por el satélite y el centro de la luna forman un ángulo de  $60^\circ$ . La distancia más corta del satélite a la superficie lunar es de 150 km. Hallar el radio de la luna.



*Sugerencia:*  $p = 150 + r$  y problema resuelto 5.

31 Halar la ecuación canónica de la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y pasa por los puntos (3, 1), (4, 3) y (12,7).

*Sugerencia:* Los puntos satisfacen la ecuación  $(y-h)^2 = 4p(x-k)$

32 Halar la ecuación canónica de la parábola cuyo eje es paralelo al eje Y y pasa por los puntos (1, 0), (-1, 6) y (2,3).

33. Probar que la tangente a la parábola  $y^2 = 4px$  en cualquier punto  $P = (x_1, y_1)$  tiene por ecuación  $y_1y = 2p(x + x_1)$ . *Sugerencia:* Problema resuelto 6.

## SECCION 3.3

### LA ELIPSE

**DEFINICION.** Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos  $F_1$  y  $F_2$ , es constante. Los dos puntos fijos se llaman **focos**. El punto medio del segmento que une los focos es **centro** de la **elipse**.

#### ECUACION CANONICA DE LA ELIPSE

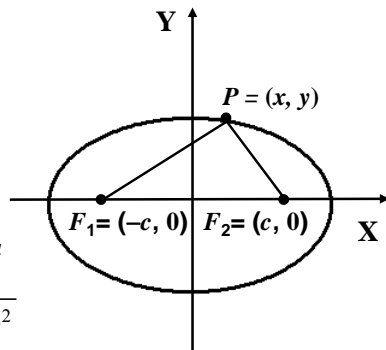
Pongamos el centro de la elipse sobre el origen de la coordenadas y los focos sobre el eje X con coordenadas  $F_1 = (-c, 0)$  y  $F_2 = (c, 0)$ . Sea  $2a$  la constante de la definición.

$P = (x, y)$  está en la elipse

$$\Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$



$$\Leftrightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx \Leftrightarrow a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (1)$$

Dividiendo entre  $a^2(a^2 - c^2)$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad (2)$$

Sabemos que en un triángulo, la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es mayor que la longitud del tercer lado. Aplicando este resultado al triángulo de la figura anterior, obtenemos,

$$d(F_1, P) + d(P, F_2) > d(F_1, F_2)$$

$$\Rightarrow 2a > 2c \Rightarrow a > c \Rightarrow a^2 - c^2 > 0$$

Sea  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ . Entonces  $b^2 = a^2 - c^2$ .

Reemplazando en (1):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

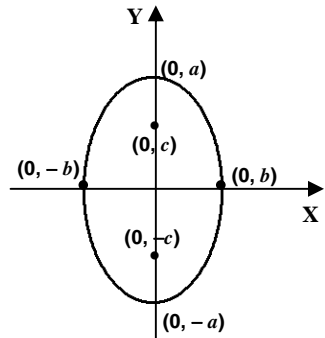
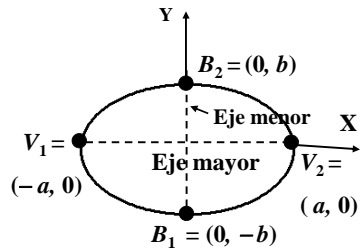
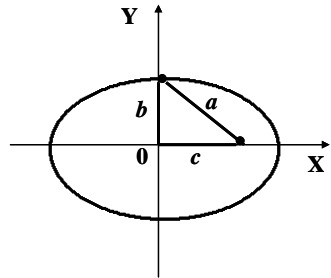
La recta que pasa por los focos intercepta a la elipse en dos puntos,  $V_1 = (-a, 0)$  y  $V_2 = (a, 0)$  llamados **vértices**. El segmento que une los vértices es el **eje mayor**. Su longitud es  $2a$ . La recta que pasa por el centro y es perpendicular al eje mayor, corta a la elipse en dos puntos.  $B_1 = (0, -b)$  y  $B_2 = (0, b)$ . El segmento que tiene como extremos los puntos,  $B_1$  y  $B_2$  es el **eje menor**. Su longitud es  $2b$ .

Si  $c = 0$ , los dos focos coinciden y son iguales al origen de coordenadas. Aún más, en este caso,  $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - 0^2} = a$  y la elipse se convierte en una circunferencia de radio  $r = a = b$ .

Si los focos están sobre el eje Y,  $F_1 = (0, -c)$  y  $F_2 = (0, c)$ , siguiendo argumentos similares a los anteriores, obtenemos como ecuación de la elipse la siguiente:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

donde, como antes,  $b^2 = a^2 - c^2$



En resumen, tenemos los siguientes resultados:

**TEOREMA 3.2.** Ecuaciones canónicas o estándar de la elipse.

1. La ecuación (canónica) de la elipse con **centro en el origen** y con eje mayor sobre el eje X y la cantidad constante es  $2a$  es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ donde } a \geq b > 0 \text{ y } b^2 = a^2 - c^2$$

Los focos son  $F_1 = (-c, 0)$  y  $F_2 = (c, 0)$ .

2. La ecuación (canónica) de la elipse con **centro en el origen** y con eje mayor sobre el eje Y y la cantidad constante es  $2a$  es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ donde } a \geq b > 0 \text{ y } b^2 = a^2 - c^2$$

Los focos son  $F_1 = (0, -c)$  y  $F_2 = (0, c)$ .

**OBSERVACION.** Los focos de la elipse se encuentra sobre el eje coordenado cuyo denominador de la su variable correspondiente es mayor.

**EJEMPLO 1.** Probar que el gráfico de la siguiente ecuación es una elipse.

$$9x^2 + 16y^2 = 144$$

Hallar los focos, vértices, longitud del lado mayor y del eje menor.

**Solución**

Buscamos transformar esta ecuación en una ecuación canónica. Para esto, dividimos la ecuación entre 144:

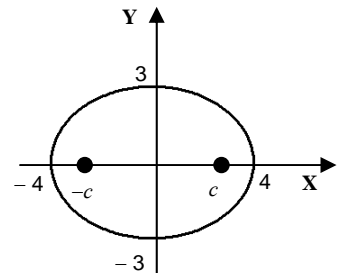
$$\begin{aligned} \frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144} &\Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \end{aligned}$$

El teorema anterior parte 1, nos dice que esta es la ecuación canónica de una elipse.

De acuerdo a la observación anterior, los focos de la elipse están sobre el eje X. Aún más, tenemos que  $a = 4$ ,  $b = 3$  y

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}.$$

Luego, los focos:  $F_1 = (-\sqrt{7}, 0)$  y  $F_2 = (\sqrt{7}, 0)$ . Los vértices:  $V_1 = (-4, 0)$  y  $V_2 = (4, 0)$ . Longitud del eje mayor =  $2a = 2(4) = 8$ . Longitud del eje menor =  $2b = 2(3) = 6$ .



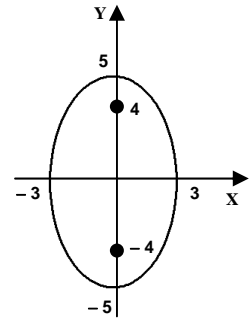
**DEFINICION.** Se llama excentricidad de una elipse a la razón

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Como  $0 < c < a$ , se tiene que  $0 < e < 1$ . Si  $e$  está cerca de 0, los focos están próximos entre sí y la forma de la elipse se asemeja a una circunferencia. En cambio, cuando  $e$  está cerca de 1, la forma de elipse es aplanada.

**EJEMPLO 2.** El centro de una elipse está en el origen de coordenadas, uno de sus focos es el punto  $(0, 4)$  y su excentricidad es  $e = \frac{4}{5}$ .

- a. Hallar el otro foco.
- b. Hallar la ecuación canónica de la elipse.



**Solución**

- a. El otro foco es  $(0, -4)$ .
- b. Tenemos que  $c = 4$ .

Luego,  $e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{4}{a} \Rightarrow a = 5$ .

Por otro lado,  $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$

La ecuación canónica de la elipse es  $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$  ó bien  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

**EJEMPLO 3.** Una elipse tiene su centro en el origen de coordenadas y sus focos sobre el eje X. Las distancias de uno de los focos a los vértices son 25 y 1, respectivamente.

- a. Hallar la excentricidad de la elipse.
- b. Hallar la ecuación canónica de la elipse.

**Solución**

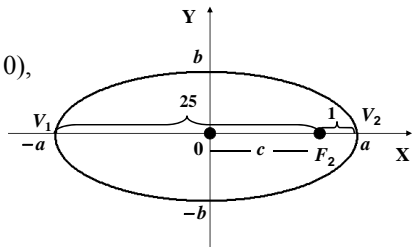
- a. Sea  $F_2 = (c, 0)$  el foco indicado y  $V_1 = (-a, 0)$ ,  $V_2 = (a, 0)$  los vértices.

Tenemos:

$$d(V_1, F_2) = d(V_1, O) + d(O, F_2) = a + c = 25,$$

$$d(F_2, V_2) = d(O, V_2) - d(O, F_2) = a - c = 1$$

Resolvemos el sistema:  $\begin{cases} a + c = 25 \\ a - c = 1 \end{cases}$  y obtenemos  $a = 13, c = 12$



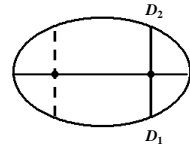
Luego, 
$$e = \frac{c}{a} = \frac{12}{13}$$

b.  $b^2 = a^2 - c^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$ .

Luego, la ecuación canónica de la elipse es:

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

**DEFINICION.** Se llama **lado recto** de una elipse a cualquiera de los segmentos que tienen sus extremos en la elipse, pasa por un foco y es perpendicular al eje mayor. Así el segmento  $\overline{D_1D_2}$  es uno de los lados rectos. El otro es el segmento punteado.



En el problema resuelto 3 probaremos que la longitud de un lado recto de las elipses expresadas mediante su ecuación canónica es

$$L = \frac{2b^2}{a}$$

**EJEMPLO 4.** Una elipse tiene su centro en el origen y uno de sus focos es el punto  $(0, 6)$ . Si la longitud de su lado recto es  $\frac{64}{5}$ , hallar la ecuación canónica de la elipse.

**Solución**

Tenemos que  $c = 6$  y  $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - 36$  (1)

Por otro lado,

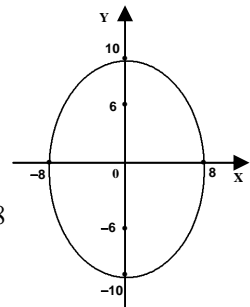
$$L = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow \frac{64}{5} = \frac{2b^2}{a} \Rightarrow b^2 = \frac{32}{5}a$$
 (2)

De (1) y (2) obtenemos:

$$a^2 - 36 = \frac{32}{5}a \Rightarrow 5a^2 - 32a - 180 = 0 \Rightarrow a = 10 \text{ y } b = 8$$

Luego, la ecuación canónica de la elipse es

$$\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1$$



**ECUACION CANONICA DE LA ELIPSE TRASLADADA**

1. La ecuación (canónica) de la elipse con **centro en  $(h, k)$** , con eje mayor paralelo al eje X y la cantidad constante  $2a$  es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \text{ donde } a \geq b > 0 \text{ y } b^2 = a^2 - c^2$$

Los focos son  $F_1 = (-c + h, k)$  y  $F_2 = (c + h, k)$ .

2. La ecuación (canónica) de la elipse con **centro en  $(h, k)$**  y con eje mayor paralelo al eje Y y la cantidad constante  $2a$  es

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1, \text{ donde } a \geq b > 0 \text{ y } b^2 = a^2 - c^2$$

Los focos son  $F_1 = (h, -c + k)$  y  $F_2 = (h, c + k)$ .

**EJEMPLO 6.** Probar que el gráfico de la siguiente ecuación es una elipse.

$$4x^2 + y^2 - 24x - 4y + 24 = 0$$

Hallar los vértices, focos, longitud del eje mayor, del eje menor. y la excentricidad.

**Solución**

Buscamos transformar esta ecuación en una ecuación canónica. Completamos cuadrados:

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 - 24x - 4y + 24 = 0 &\Leftrightarrow 4(x^2 - 6x + \quad) + (y^2 - 4y + \quad) = -24 \\ &\Leftrightarrow 4(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = -24 + 36 + 4 \\ &\Leftrightarrow 4(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1 \end{aligned}$$

De acuerdo a la parte 2 del teorema anterior, esta ecuación es la ecuación canónica de una elipse con centro en  $(h, k) = (3, 2)$  y con eje mayor paralelo al eje Y.

Tenemos que  $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$  y por lo tanto,

$$V_1 = (3, 2 - a) = (3, 2 - 4) = (3, -2). \quad V_2 = (3, 2 + a) = (3, 2 + 4) = (3, 6).$$

Por otro lado,  $b^2 = 4 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 \Rightarrow$

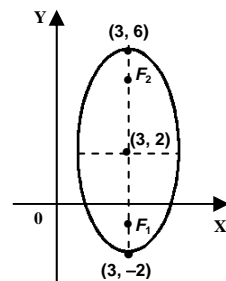
$$c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}. \text{ Luego,}$$

$$F_1 = (3, 2 - c) = (3, 2 - 2\sqrt{3}).$$

$$F_2 = (3, 2 + c) = (3, 2 + 2\sqrt{3}).$$

Longitud del eje mayor es  $2a = 2(4) = 8$

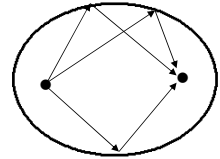
La longitud del eje menor,  $2b = 2(2) = 4$



La excentricidad es  $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

### PROPIEDAD REFLEXIVA DE LA ELIPSE

La elipse, a igual que la parábola, también tiene una propiedad reflexiva interesante. Un rayo de luz o una onda sonora que se origina en un foco, se refleja en la elipse y pasa por el otro foco. Esta propiedad la probaremos en el problema resuelto 4.



### ¿SABIAS QUE...

Conociendo el principio reflexivo de la elipse, los arquitectos han diseñado domos elípticos, como el *Salón de las Estatuas del Capitolio en Washington D. C.*, el *Tabernáculo del Mormón en Salt Lake City*, la *Catedral de San Pablo en Londres*, diseñada por el notable matemático y arquitecto Christopher Wren (1632–1723). En estos domos, un ligero murmullo en un foco es escuchado con mucha claridad en el otro foco. Por esta razón, a estos domos se los llama *galerías de murmullos*.



Tabernáculo del Mormón

**EJEMPLO 7.** El domo del Tabernáculo del Mormón en Salt Lake city tiene 250 pies de largo, 150 pies de ancho y 80 pies de altura. Las secciones longitudinales del domo son semielipses. Para obtener una grabación con fidelidad, se quiere ubicar a un locutor en un foco y al equipo de grabación en el otro foco. Hallar la ubicación de estos puntos.

#### Solución

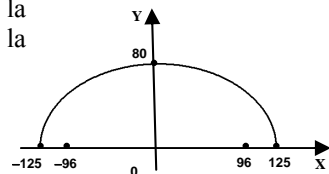
En primer lugar debemos indicar que el dato del ancho de domo sólo fue puesto para complementar la geometría del domo y que este dato no interviene en la búsqueda de la solución de nuestro problema.

Bien, tenemos que  $2a = 250 \Rightarrow a = 125$

Por otro lado,  $b = 80$ . Luego,

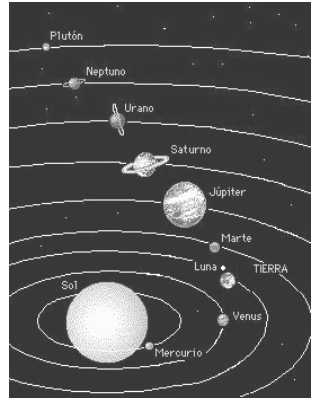
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{125^2 - 80^2} = \sqrt{9,225} \approx 96$$

El locutor debe ubicarse a 96 pies del centro. El equipo debe ubicarse también a 96 pies del centro, pero en el otro sentido.



**LA ELIPSE EN LA ASTRONOMIA**

En 1609, el astrónomo, matemático y físico alemán **Johannes Kepler** (1571–1630) publicó su obra *Astronomia Nova*, en la cual dio a conocer sus investigaciones sobre el movimiento de los planetas alrededor del sol. Kepler logró sintetizar en tres leyes la multitud de datos astronómicos logrados en miles de años de observación. Las leyes de Kepler fueron logradas empíricamente. Su demostración fue lograda por Newton un siglo después. Aquí está la primera ley.



**Primera ley Kepler o ley de las orbitas.** Cada planeta se mueve en una órbita elíptica con el sol en uno de sus focos.

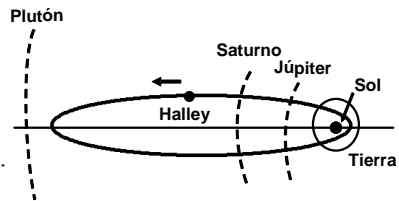
Las leyes de Kepler también gobiernan el movimiento de los cometas.

**EJEMPLO 5.** La órbita del cometa Halley es una elipse en uno de cuyos focos está el sol. La longitud del eje mayor es  $5.34 \times 10^9$  Km. y la del eje menor,  $1.36 \times 10^9$  Km.

- a. Hallar una ecuación de la órbita.
- b. Hallar la excentricidad de la órbita.
- b. La distancia mínima del cometa al centro del sol.

**Solución**

a. Tomamos un sistema de coordenadas con origen en el centro de la órbita y con el centro del sol sobre el semieje positivo del eje X.



Se tiene:  $2a = 5.34 \times 10^9 \Rightarrow a = 26.7 \times 10^8$ .

$2b = 1.36 \times 10^9 \Rightarrow b = 6.8 \times 10^8$ .

Luego, la ecuación de la órbita de cometa es:

$$\frac{x^2}{(26.7)^2 \times 10^{16}} + \frac{y^2}{(6.8)^2 \times 10^{16}} = 1, \text{ o bien } \frac{x^2}{712.89 \times 10^{16}} + \frac{y^2}{46.24 \times 10^{16}} = 1$$

b. Sea  $F = (c, 0)$  el foco de la elipse donde está el centro del sol.

Tenemos que:  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(26.7)^2 \times 10^{16} - (6.8)^2 \times 10^{16}} = 25.819 \times 10^8$

Luego, la excentricidad es  $e = \frac{c}{a} = \frac{25.819 \times 10^8}{26.7 \times 10^8} \approx 0.967$

### ¿SABIAS QUE ...

El **cometa Halley** es el cometa más conocido de nuestro sistema. Existen registros históricos que este cometa fue visto el año 240 A. C. Sin embargo, recién es reconocido como cometa el año 1758 y le dieron el nombre de Halley, en honor del astrónomo inglés **Edmond Halley** (1656–1742), amigo de Newton. El observó el cometa el año 1682 y sostuvo que éste era el mismo que había sido visto los años 1531 y 1607. Además, predijo que volverían a verse el 1758.



Cometa Halley

Efectivamente, el cometa apareció ese año Halley, para ese entonces, ya no estuvo presente para comprobar su predicción, falleció 16 años antes. Este hecho fue uno de los éxitos más convincentes de la teoría de gravitación de Newton.

La última vez que fue observado desde la tierra fue en 1986 y su próxima aparición será a mediados del año 2061.

## PROBLEMAS RESUELTOS 3.3

**PROBLEMA 1.** Una autopista de una sola vía pasa por un túnel semielíptico de 11 pies de altura y 36 pies de ancho. Una gangola de 12 pies de ancho y 10 pies de altura se acerca al túnel por el centro de la autopista. ¿Podrá atravesar el túnel sin rozarlo?

### Solución

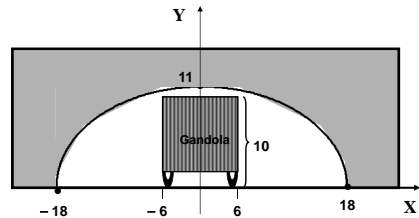
La ecuación de la elipse es  $\frac{x^2}{18^2} + \frac{y^2}{11^2} = 1$

Para  $x = 6$ :

$$\frac{y^2}{11^2} = 1 - \frac{6^2}{18^2} = \frac{11^2}{18^2} (18^2 - 6^2) \Rightarrow$$

$$y = \frac{11}{18} \sqrt{288} = \frac{11}{18} (12) \sqrt{2} \approx 10.37$$

Como  $10 < 10.37$ , la gangola pasa sin rozar el túnel.



**PROBLEMA 2.** Un satélite tiene una órbita elíptica con el centro de la tierra en unos de sus focos. La distancia máxima y mínima del satélite a la superficie terrestre son 11,620 y 1,620 kilómetros, respectivamente. El radio de la tierra es 6,380 kilómetros.

- Hallar la excentricidad de la órbita.
- Hallar la ecuación canónica de la órbita colocando un sistema de coordenadas con origen en el centro de la órbita y el centro de la tierra en el semieje positivo de la X.

**Solución**

- a. Sea  $a$  la longitud del semieje mayor de la órbita,  $r$  el radio de la tierra,  $c$  la coordenada del centro de la tierra.

Tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a + c = 11,620 + r \\ a - c = 1,620 + r \end{cases}$$

Sumando estas ecuaciones:

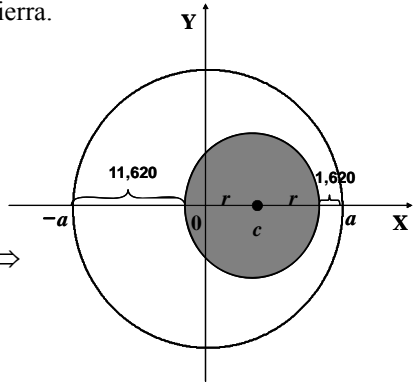
$$2a = (11,620 + 1,620) + 2r = 13,240 + 2r \Rightarrow$$

$$a = 6,620 + r = 6,620 + 6,380 = 13,000$$

Restando las ecuaciones:

$$2c = (11,620 - 1,620) = 10,000 \Rightarrow c = 5,000$$

Luego, la excentricidad de la órbita es  $e = \frac{c}{a} = \frac{5,000}{13,000} = \frac{5}{13}$



- b.  $b^2 = a^2 - c^2 = (13,000)^2 - (5,000)^2 = (12,000)^2$

Por lo tanto, la ecuación canónica de la órbita es  $\frac{x^2}{(13,000)^2} + \frac{y^2}{(12,000)^2} = 1$

**PROBLEMA 3. Longitud del lado recto.**

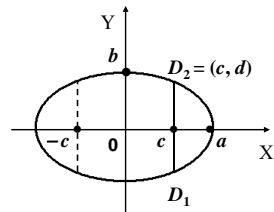
Probar que la longitud del lado recto de una elipse es  $L = \frac{2b^2}{a}$

**Solución**

Colocamos la elipse en tal forma que su centro coincida en el origen de coordenadas y con focos el eje X. En este caso, su ecuación canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Sea  $D_2 = (c, d)$  el punto extremo del lado recto que está sobre el foco de coordenadas  $(c, 0)$ .



Por estar  $D_2 = (c, d)$  en la elipse, tenemos:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{d^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow d^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - c^2) = \frac{b^2}{a^2} (b^2) \Rightarrow d = \frac{b^2}{a}$$

Luego, la longitud del lado recto es  $L = 2d = 2b^2/a$

**PROBLEMA 4. Propiedad reflexiva de la elipse**

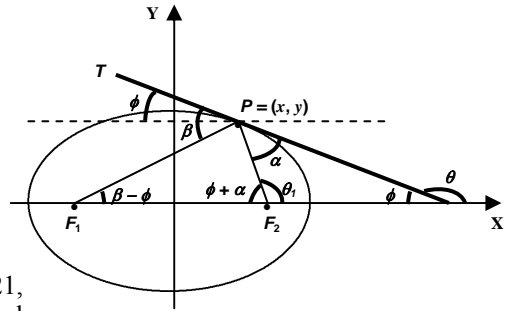
Una recta tangente a una elipse en un punto  $P$  forma ángulos congruentes con los segmentos que unen  $P$  con los focos. Esto es, de acuerdo al gráfico,  $\alpha = \beta$ .

**Solución**

Usaremos la siguiente identidad trigonométrica:

$$\tan(\pi - \phi) = -\tan \phi$$

Tomemos la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



De acuerdo al problema propuesto 21, la pendiente de la recta tangente  $T$  en el punto  $P = (x, y)$  es:

$$m = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \quad (1)$$

Pero también

$$m = \tan \theta = \tan(\pi - \phi) = -\tan \phi \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos que

$$\tan \phi = \frac{b^2 x}{a^2 y} \quad (3)$$

La pendiente del segmento que une el foco  $F_2 = (c, 0)$  con el punto  $P = (x, y)$  es:

$$\frac{y}{x - c} = \tan \theta_1 = \tan(\pi - (\phi + \alpha)) = -\tan(\phi + \alpha)$$

Luego,

$$-\frac{y}{x - c} = \tan(\phi + \alpha) = \frac{\tan \phi + \tan \alpha}{1 - \tan \phi \tan \alpha} = \frac{\frac{b^2 x}{a^2 y} + \tan \alpha}{1 - \frac{b^2 x}{a^2 y} \tan \alpha} = \frac{b^2 x + a^2 y \tan \alpha}{a^2 y - b^2 x \tan \alpha}$$

De donde obtenemos:

$$(b^2 x^2 + a^2 y^2) + (a^2 - b^2)xy \tan \alpha = a^2 cy \tan \alpha + b^2 cx$$

Pero,  $a^2 - b^2 = c^2$  y, por estar  $P = (x, y)$  en la elipse,  $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ . Luego,

$$a^2 b^2 + c^2 xy \tan \alpha = a^2 cy \tan \alpha + b^2 cx \Rightarrow \tan \alpha = \frac{b^2 cx - a^2 b^2}{c^2 xy - a^2 cy} = \frac{b^2 (cx - a^2)}{cy (cx - a^2)} \Rightarrow$$

$$\tan \alpha = \frac{b^2}{cy} \quad (4)$$

Por otro lado, la pendiente del segmento que une el foco  $F_1 = (-c, 0)$  con el punto  $P = (x, y)$  es:

$$\frac{y}{x+c} = \tan(\beta - \phi) = \frac{\tan \beta - \tan \phi}{1 + \tan \beta \tan \phi} = \frac{\tan \beta - \frac{b^2 x}{a^2 y}}{1 + \tan \beta \frac{b^2 x}{a^2 y}} = \frac{a^2 y \tan \beta - b^2 x}{a^2 y + b^2 x \tan \beta}$$

Procediendo como el caso anterior, obtenemos:

$$\tan \beta = \frac{b^2}{cy} \quad (5)$$

De (4) y (5) concluimos que  $\tan \alpha = \tan \beta$  y, por lo tanto,  $\alpha = \beta$ .

### PROBLEMAS PROPUESTOS 3.3

*En los problemas del 1 al 12, hallar la ecuación canónica de la elipse cuyos datos son indicados.*

1. Focos:  $(\pm 2, 0)$ . Vértices:  $(\pm 6, 0)$
2. Focos:  $(0, \pm 5)$ . Vértices:  $(0, \pm 8)$
3. Foco:  $(5, 2)$ . Vértices:  $(2, 2), (6, 2)$
4. Foco:  $(-4, 0)$ . Vértices:  $(-4, -2), (-4, 8)$
5. Vértices:  $(3, -1), (3, 3)$ . Pasa por  $(2, 1)$
6. Vértices:  $(\pm 5, 0)$ , Longitud del eje menor: 6
7. Vértices:  $(-1, \pm 3)$ . Longitud del eje menor: 4
8. Vértices:  $(2, -10), (2, 10)$ . Pasa por  $(6, 3)$
9. Focos:  $(\pm 2, 0)$ . Excentricidad :  $e = 2/3$
10. Vértices:  $(1, 1), (1, 7)$ . Excentricidad :  $e = 1/3$
11. Focos:  $(\pm 3, -1)$ . Longitud lado recto = 9
12. Centro:  $(-2, -2)$ . Vértice:  $(3, 2)$ . Lado recto = 4

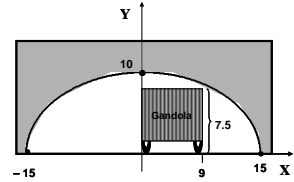
*En los problemas del 13 al 15, las gráficas de la ecuación dada es una elipse.*

a. **Completando cuadrados, hallar su ecuación canónica.**

b. **Hallar vértices y sus focos**

13.  $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y = -21$
14.  $9x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 9 = 0$
15.  $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y = 156$

16. Una autopista de dos vías pasa por un túnel semielíptico de 10 pies de altura y 30 pies de ancho. Una gándola de 9 pies de ancho y 7.5 pies de altura se acerca al túnel por su lado de la autopista. ¿Podrá atravesar el túnel sin rozarlo y sin usar parte de la otra línea de la autopista?



17. La sección trazada a lo largo de la parte más larga del Estadio Olímpico de Montreal es una elipse con eje mayor y eje menor de 480 y 280 metros, respectivamente. Hallar la ecuación canónica de esta elipse. Este estadio fue construido con motivo de las olimpiadas del año 1976. La torre inclinada que se observa, mide 175 m y es la más alta de su tipo.



18. Sea  $S$  el conjunto de puntos  $P$  del plano tales que la distancia de  $P$  al punto  $(2, 0)$  es la mitad de la distancia  $P$  a la recta  $x = 8$ . Hallar una ecuación que satisfacen los puntos de  $S$ . Identificar este conjunto.
19. Sea  $S$  el conjunto de puntos  $P$  del plano tales que la distancia de  $P$  al punto  $(0, 4)$  es la  $\frac{4}{5}$  de la distancia  $P$  a la recta  $y = \frac{25}{4}$ . Hallar una ecuación que satisfacen los puntos de  $S$ .
20. Se ha colocado un satélite que gira alrededor de la luna. Su órbita es una elipse en uno de cuyos focos está el centro lunar. Las distancias máximas y la distancia mínima a la superficie lunar son 4,522 y 522 km, respectivamente. El radio de la luna es de 1,728 km. Hallar:
- La excentricidad de la órbita.
  - Una ecuación de la órbita.
21. Sea la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  y sea  $P = (x_1, y_1)$  un punto de ella.

- a. Probar que la pendiente de la tangente a la elipse en el punto  $P = (x_1, y_1)$  es

$$m = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

*Sugerencia:* La recta  $T: y = m(x - x_1) + y_1$  pasa por  $P = (x_1, y_1)$ .  $T$  es tangente a la elipse si intersecta a ésta en un único punto. Seguir los mismos pasos del problema resuelto 6 de la sección anterior.

*Otra sugerencia:* Espera hasta que aprendas a derivar.

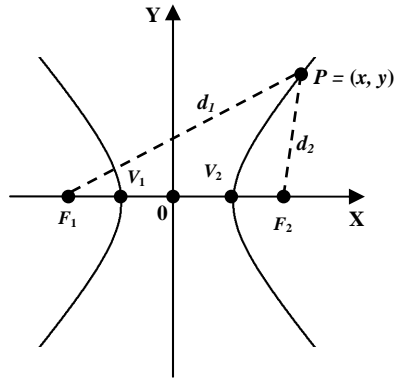
- b. Probar que la recta tangente  $T$  a la elipse en el punto  $P = (x_1, y_1)$ . Tiene por

ecuación:  $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

**SECCION 3.4**  
**LA HIPERBOLA**

**DEFINICION.** Una **hipérbola** es el conjunto de puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano es una constante. Los puntos fijos se llaman **focos**.

Se llama **eje focal** a la recta que pasa por los focos  $F_1$  y  $F_2$ . El eje focal corta a la hipérbola en dos puntos,  $V_1$  y  $V_2$ , llamados **vértices**. El segmento  $\overline{V_1V_2}$  es el **eje transverso**. El punto medio de este eje es el **centro** de la hipérbola.



Hallemos las ecuaciones canónicas de la hipérbola. Seguimos el mismo camino de la elipse. Colocamos un sistema de coordenadas con origen en el centro de la hipérbola y con eje X coincidiendo con el eje focal. Lo mismo que en la elipse, a los focos les asignamos las coordenadas:

$$F_1 = (-c, 0) \text{ y } F_2 = (c, 0), \text{ donde } c > 0$$

Sea  $2a$ , donde  $a > 0$ , la constante de la definición y sea  $P = (x, y)$  un punto de la hipérbola. Si  $d_1 = d(P, F_1)$  y  $d_2 = d(P, F_2)$ , por la definición de hipérbola se cumple que:

$$|d_1 - d_2| = 2a \tag{1}$$

En la hipérbola se cumple que:

$$a < c. \tag{2}$$

En efecto, sabemos de geometría elemental, que la diferencia de las longitudes de dos lados de un triángulo es menor que la longitud del tercer lado. Si aplicamos esta propiedad al triángulo  $F_1PF_2$ , la diferencia de las longitudes marcadas con  $d_1$  y  $d_2$  es menor que la longitud del tercer lado, que es  $d(F_1, F_2) = 2c$ . Esto es,

$$2a = |d_1 - d_2| < d(F_1, F_2) = 2c \Rightarrow a < c$$

Ahora deducimos las ecuaciones canónicas de la hipérbola. Bien, tenemos que:

$$d_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{y} \quad d_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

De la igualdad (1) obtenemos que:

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

Esta igualdad es equivalente a:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad \text{ó} \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a$$

Tomamos cada una de estas dos ecuaciones y trabajamos separadamente, pero siguiendo los mismos pasos. Ambas ecuaciones nos llevan a la misma conclusión. Aquí sólo trabajamos con la primera ecuación, dejando la otra como ejercicio para el lector.

En la primera ecuación despejamos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$-a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Nuevamente, elevando al cuadrado y simplificando:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \quad (3)$$

Pero, por (2), sabemos que  $a < c$ , y, por tanto,  $c^2 - a^2 > 0$ . Sea

$$b^2 = c^2 - a^2, \text{ donde } b > 0$$

Llevando este valor de  $c^2 - a^2$  a (3):  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

Finalmente, dividiendo entre  $a^2b^2$ :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si en esta ecuación hacemos  $y = 0$  obtenemos que  $x = \pm a$ . Esto nos dice que las coordenadas de los vértices son:

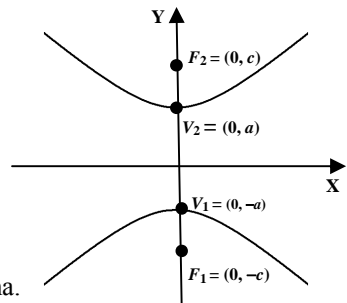
$$V_1 = (-a, 0) \quad \text{y} \quad V_2 = (a, 0)$$

Esta hipérbola no corta al eje Y. En efecto, si hacemos  $x = 0$ , obtenemos la ecuación  $y^2 = -b^2$ , la cual no tiene soluciones reales.

Si el centro de la hipérbola coincide con el origen de coordenadas, pero el eje focal coincide con el eje Y, siguiendo los mismos argumentos anteriores, obtenemos que la ecuación para esta hipérbola es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Resumimos estos resultados en el siguiente teorema.



**TEOREMA 3.3** Ecuaciones canónicas o estándar de la hipérbola.

1. La ecuación canónica de la hipérbola con centro en el origen, con eje focal sobre el eje X y la cantidad constante  $2a$  es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ donde } b > 0 \text{ y } b^2 = c^2 - a^2$$

Los focos y vértices son

$$F_1 = (-c, 0), F_2 = (c, 0), V_1 = (-a, 0) \text{ y } V_2 = (a, 0)$$

2. La ecuación canónica de la hipérbola con centro en el origen y con eje focal sobre el eje Y y la cantidad constante  $2a$  es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \text{ donde } b > 0 \text{ y } b^2 = c^2 - a^2$$

Los focos y vértices son :

$$F_1 = (0, -c) \text{ y } F_2 = (0, c), V_1 = (0, -a) \text{ y } V_2 = (0, a)$$

**OBSERVACION.**

1. En la elipse se cumple que  $a > b$ . En cambio en la hipérbola puede suceder que:

$$a > b, b > a \text{ ó } a = b$$

2. El eje focal coincide con eje de coordenadas cuya variable aparece con signo positivo en la ecuación canónica.

**EJEMPLO 1.**

Probar el gráfico de la siguiente ecuación es una hipérbola. Hallar sus vértices y sus focos.

$$9y^2 - 25x^2 = 225$$

**Solución**

Dividiendo la ecuación entre 225 y simplificando:

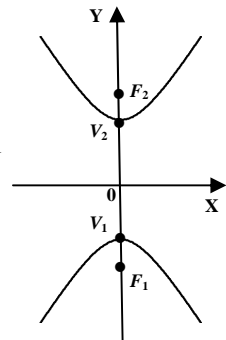
$$\frac{9y^2}{225} - \frac{25x^2}{225} = \frac{225}{225} \Rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{5^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$$

Esta ecuación es la ecuación canónica de la hipérbola con centro en el origen y con focos en el eje Y. Además,

$$a = 5, b = 3 \text{ y } c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

Luego, los vértices y focos son:

$$V_1 = (0, -5), V_2 = (0, 5), F_1 = (0, -\sqrt{34}), F_2 = (0, \sqrt{34})$$



### EXCENTRICIDAD Y LADO RECTO DE UNA HIPÉRBOLA

Para la hipérbola, los conceptos de excentricidad y lado recto son los mismos que se establecieron para la elipse. Esto es,

1. Se llama **excentricidad de una hipérbola** a cociente  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

Observar que  $e > 1$ .

2. Se llama **lado recto de una hipérbola** a cualquiera de los dos segmentos perpendiculares al eje focal, que tienen sus puntos extremos en la hipérbola y pasan por uno de los focos. Al igual que en el caso de la elipse, se prueba que la longitud del lado recto es

$$L = \frac{2b^2}{a}$$

**EJEMPLO 2.** Una hipérbola tiene su eje transverso sobre el eje X y su longitud es 18. Uno de sus focos dista 11 del centro.

- Hallar la ecuación canónica de la hipérbola.
- Hallar la excentricidad.
- Hallar la longitud del lado recto.

#### Solución

1. La ecuación canónica de esta hipérbola es de la forma

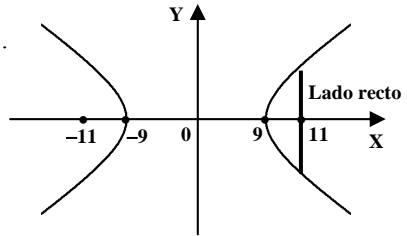
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Pero, tenemos que  $2a = 18$  y, por tanto,  $a = 9$ .

Por otro lado,

$$c = 11 \text{ y } b^2 = c^2 - a^2 = 11^2 - 9^2 = 40.$$

Luego, la ecuación buscada es  $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{40} = 1$ .



2. La excentricidad es  $e = \frac{c}{a} = \frac{11}{9}$

3. La longitud del lado recto es  $L = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(40)}{9} = \frac{80}{9}$

### ASINTOTAS DE UNA HIPÉRBOLA

Si en la ecuación  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  despejamos  $y$  obtenemos

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (1)$$

Esta ecuación no tiene soluciones en el intervalo abierto  $(-a, a)$ . Esto significa que la hipérbola está compuesta de dos **ramas** disjuntas, que corresponden al gráfico en los intervalos  $(-\infty, a]$  y  $[a, \infty)$ , respectivamente.

Si en (1), tomamos  $x \geq a$ , factorizamos  $x^2$  y lo sacamos del radical, obtenemos:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Esta igualdad nos dice que si  $x$  es muy grande, en cociente  $\frac{a^2}{x^2}$  está cerca de 0 y, por tanto, el radical está cerca de 1 y la ordenada del punto  $P = (x, y)$  de la hipérbola está cerca de la recta  $y = \frac{b}{a}x$  ó de la recta  $y = -\frac{b}{a}x$ . A la misma conclusión se llega si tomamos  $x \leq -a$ . A las rectas

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x, \text{ e les llama } \mathbf{asíntotas} \text{ de la hipérbola } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Una regla nemotécnica para hallar las asíntotas es la siguiente: En la ecuación canónica de la hipérbola, cambiar el 1 por 0 y resolver la ecuación resultante. Esto es,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \text{ ó } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{b}{a}x \text{ ó } y = -\frac{b}{a}x \end{aligned}$$

Similarmente, tomando hipérbola  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ , obtenemos que las rectas:

$$y = \frac{a}{b}x, \quad y = -\frac{a}{b}x, \text{ e les llama } \mathbf{asíntotas} \text{ de la hipérbola } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

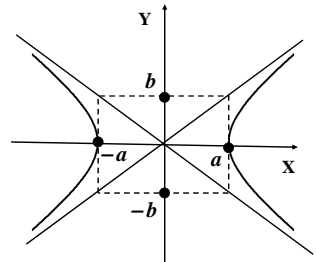
**DEFINICION.** Se llama **eje conjugado** de una hipérbola al segmento de longitud  $2b$  que perpendicular al eje transverso y tiene por punto medio el centro de la hipérbola.

En el caso de la hipérbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , el eje conjugado es el segmento  $\overline{B_1B_2}$ , donde

$$B_1 = (0, -b) \text{ y } B_2 = (0, b).$$

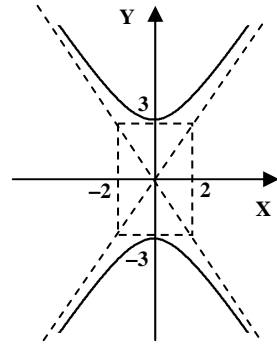
Las asíntotas ayudan para graficar la hipérbola:

Con los ejes consero y conjugado, se construye el rectángulo que indica la figura. Las diagonales de este rectángulo son las asíntotas. Se construyen las ramas de la hipérbola acercándose a estas rectas.



**EJEMPLO 3.** Dada la hipérbola  $4y^2 - 9x^2 = 36$

1. Hallar su ecuación canónica.
2. Hallar las asíntotas.
3. Graficar la hipérbola.



**Solución**

1. Dividiendo  $4y^2 - 9x^2 = 36$  entre 36:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$$

2. Aplicamos la regla nemotécnica:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{3} - \frac{x}{2}\right) \left(\frac{y}{3} + \frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{y}{3} - \frac{x}{2} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{y}{3} + \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x \quad \text{ó} \quad y = -\frac{3}{2}x$$

3. Construimos el rectángulo correspondiente determinado por el eje transversal y el eje conjugado. Trazamos las rectas diagonales, que son las asíntotas. Construimos la gráfica de la hipérbola, guiados por estas diagonales y considerando que esta hipérbola corta al eje Y.

### ECUACION CANONICA DE LA HIPERBOLA TRASLADADA

1. La **ecuación canónica de la hipérbola** con centro en  $(h, k)$ , con eje focal paralelo al eje X y la cantidad constante  $2a$  es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \text{ donde } b > 0 \text{ y } b^2 = c^2 - a^2$$

Los focos y vértices son

$$F_1 = (-c + h, k) \quad \text{y} \quad F_2 = (c + h, k), \quad V_1 = (-a + h, k) \quad \text{y} \quad V_2 = (a + h, k)$$

Sus asíntotas son:

$$y = \frac{b}{a}(x-h) + k, \quad y = -\frac{b}{a}(x-h) + k$$

2. La **ecuación canónica de la hipérbola** con centro en  $(h, k)$ , con eje focal paralelo al eje Y y la cantidad constante  $2a$  es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1, \text{ donde } b > 0 \text{ y } b^2 = c^2 - a^2$$

Los focos y vértices son :

$$F_1 = (h, -c + k) \quad \text{y} \quad F_2 = (h, c + k), \quad V_1 = (h, -a + k) \quad \text{y} \quad V_2 = (h, a + k)$$

Sus asíntotas son:

$$y = \frac{a}{b}(x-h) + k, \quad y = -\frac{a}{b}(x-h) + k$$

La excentricidad de estas hipérbolas trasladadas se define del mismo modo:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

También es fácil verificar que la longitud del lado recto de estas hipérbolas es

$$L = \frac{2b^2}{a}$$

**EJEMPLO 4.** 1. Probar que el gráfico de la siguiente ecuación es una hipérbola.

$$16x^2 - 9y^2 - 64x + 54y - 161 = 0$$

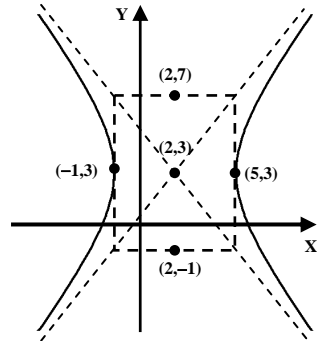
2. Hallar el centro, los vértices y los focos.
3. Hallar los extremos del eje conjugado.
4. Hallar las asíntotas.
5. Hallar la excentricidad.
6. Hallar longitud del lado recto.

**Solución**

1. Completamos cuadrados en la ecuación:

$$\begin{aligned} 16(x^2 - 4x) - 9(y^2 - 6y) &= 161 \\ 16(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 - 6y + 9) &= 161 + 64 - 81 \\ 16(x-2)^2 - 9(y-3)^2 &= 144 \\ \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

Esta ecuación es la ecuación canónica de una hipérbola con centro en (2, 3) y con eje focal paralelo al eje X.



2. Tenemos que:  $a = 3, b = 4, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ . Luego,

Centro:  $(h, k) = (2, 3)$ .

Vértices:  $V_1 = (-a+h, k) = (-3+2, 3) = (-1, 3), V_2 = (a+h, k) = (3+2+3, 3) = (5, 3)$

Focos:  $F_1 = (-c + h, k) = (-5 + 2, 3) = (-2, 3), F_2 = (c + h, k) = (5 + 2, 3) = (7, 3)$

3.  $B_1 = (h, -b + k) = (2, -4 + 3) = (2, -1), B_2 = (h, b + k) = (2, 4 + 3) = (2, 7)$

4.  $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{3} - \frac{y-3}{4}\right)\left(\frac{x-2}{3} + \frac{y-3}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{x-2}{3} - \frac{y-3}{4} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{x-2}{3} + \frac{y-3}{4} = 0 \Leftrightarrow 3y - 4x - 1 = 0 \quad \text{ó} \quad 3y + 4x - 17 = 0$$

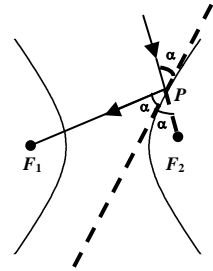
$$5. \quad e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$$

$$6. \quad L = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)^2}{3} = \frac{32}{3}$$

### PROPIEDAD REFLEXIVA DE LA HIPERBOLA

La **propiedad reflexiva para la hipérbola** dice que si emite un rayo de luz apuntando a un foco de espejo hiperbólico, el rayo se refleja en el espejo y pasa por el otro foco.

Este resultado lo probamos en el problema resuelto 5.



## PROBLEMAS RESUELTOS 3.4

**PROBLEMA 1.** Hallar la ecuación canónica de la hipérbola que tiene por focos los puntos  $(\pm 5\sqrt{2}, 0)$  y por asíntotas a las rectas  $y = \pm 2x$ .

**Solución**

La ecuación es de la forma  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  (1)

$c = 5\sqrt{2}$  y  $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 50$  (2)

Las asíntotas de la hipérbola (1) son de la forma

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

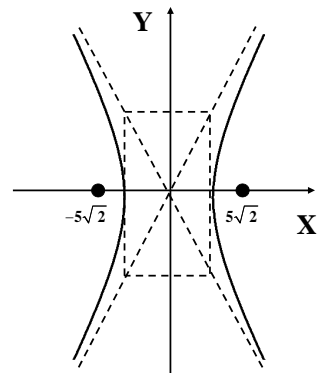
Luego,  $\frac{b}{a} = 2 \Rightarrow b = 2a$  (3)

De (2) y (3) obtenemos:

$$a^2 + (2a)^2 = 50 \Rightarrow 5a^2 = 50 \Rightarrow a^2 = 10 \quad \text{y} \quad b^2 = 40$$

Por lo tanto, la ecuación canónica de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{40} = 1$$



**PROBLEMA 2.** Hallar la ecuación canónica de la hipérbola con vértices  $V_1 = (-1, -2)$ ,  $V_2 = (-1, 8)$  y uno de sus focos,  $F = (-1, 3 + \sqrt{34})$

**Solución**

Los vértices y el foco tienen todos abscisa  $x = -1$ . En consecuencia, el eje focal es paralelo al eje Y y la ecuación de la hipérbola es de la forma:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

El centro de la hipérbola es el punto medio de los vértices. Esto es,

$$C = (h, k) = (-1, 3).$$

Por otro lado:

$$2a = 8 - (-2) = 10 \Rightarrow a = 5.$$

$$c = d(C, F) = 3 + \sqrt{34} - 3 = \sqrt{34}$$

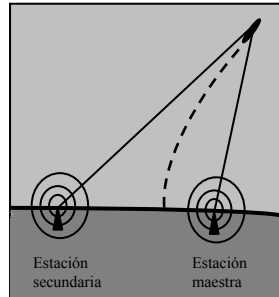
$$b^2 = c^2 - a^2 = 34 - 25 = 9$$

Luego, la ecuación canónica de la hipérbola es

$$\frac{(y-3)^2}{25} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$$

**SISTEMA DE NAVEGACION LORAN**

LORAN (**LO**ng **RA**nge Navigation) es un sistema electrónico de ayuda a la navegación. Una estación radioemisora maestra y una estación radioemisora secundaria emiten señales que pueden ser recibidas por un barco en alta mar. En general, habrá una diferencia en la distancia recorrida por las señales, lo cual se traducirá en una pequeña diferencia de tiempo en la recepción de las señales. Si el barco navega manteniendo la diferencia de tiempo constante, la diferencia de distancia también es constante, y por tanto, la ruta del barco es una hipérbola.



Si se cuenta con otro par de transmisores, se tendría otra hipérbola. El barco se encuentra en la intersección de las dos hipérbolas.

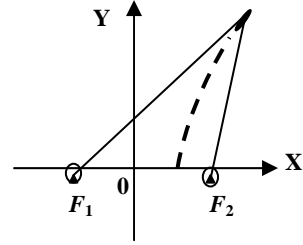
**PROBLEMA 3.** Las dos estaciones de un sistema LORAN están situadas a una distancia de 400 km entre sí a lo largo de un litoral recto. Un barco que navega en alta mar, recibe la señal de la estación maestra 0.0008 segundos antes que la señal de la estación secundaria.

1. Si el barco navega hacia el litoral manteniendo esta diferencia de tiempo, hallar una ecuación de su trayectoria.

2. ¿En qué lugar el barco tocaría tierra?
3. Si el muelle está entre las dos estaciones a 110 km. de la estación maestra, hallar la diferencia de tiempo que debe mantener el barco.

### Solución

Tomamos un sistema de coordenadas con el eje X pasando por la estación secundaria  $F_1$ , la estación maestra  $F_2$  y con origen en su punto medio.



1. La velocidad de las dos señales radioeléctricas es la misma que la velocidad de la luz: 300,000 km/seg. Luego, la diferencia constante de distancia entre las dos señales es:

$$\begin{aligned} 2a &= \text{Distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo} \\ &= 300,000 \times 0.0008 = 240 \text{ km} \Rightarrow a = 120 \end{aligned}$$

La trayectoria es la hipérbola con focos en las estaciones radioemisoras. Luego,

$$2c = 400 \Rightarrow c = 200$$

Tenemos, entonces,

$$b^2 = c^2 - a^2 = (200)^2 - (120)^2 = 25,600 = 40,000 - 14,400 = 25,600$$

En consecuencia, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{14,400} - \frac{y^2}{25,600} = 1$$

2. El barco tocaría tierra a  $c - a = 200 - 120 = 80$  km. de la estación maestra.
3. Debemos tener que:

$$c - a = 110 \Rightarrow a = c - 110 = 200 - 110 = 90 \Rightarrow 2a = 180 \text{ km.}$$

$$\text{Luego, } t = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{180}{300,000} = 0.0006 \text{ seg.}$$

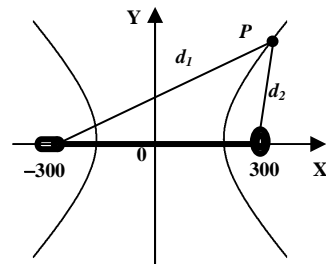
### PROBLEMA 4.

Se hace un disparo de rifle a un blanco que está a 600 m del rifle. Hallar la ecuación del conjunto de puntos  $P$  del plano desde los cuales se escucha simultáneamente el disparo y el golpe de la bala en el blanco. La velocidad del sonido es de 340 m/seg y la de la bala, es de 510 m/seg.

### Solución

Ponemos un sistema de coordenadas con el eje X pasando por los puntos donde están el rifle y el blanco, y con el origen en el punto medio de estos dos puntos. Luego, el rifle está en el punto  $F_1 = (-300, 0)$  y el blanco, en  $F_2 = (300, 0)$ .

Tomemos un punto  $P$  del conjunto indicado. Sean



$t_1$  = el tiempo que toma el sonido del rifle para llegar a  $P$ ,

$t_2$  = el tiempo que toma el sonido del golpe en el blanco para llegar a  $P$

$t_3$  = el tiempo que toma la bala en llegar al blanco.

Se tiene:

$$t_1 = t_2 + t_3 \Rightarrow t_1 - t_2 = t_3 \Rightarrow \frac{d(F_1, P)}{340} - \frac{d(F_2, P)}{340} = \frac{d(F_1, F_2)}{510} \Rightarrow$$

$$\frac{d(F_1, P)}{340} - \frac{d(F_2, P)}{340} = \frac{600}{510} \Rightarrow d(F_1, P) - d(F_2, P) = 400 = 2a$$

Esta última igualdad nos dice que los punto  $P$  del conjunto indicado está en una hipérbola de la forma  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , donde  $a = 200$

Pero,  $c = 300$  y  $b^2 = c^2 - a^2 = (300)^2 - (200)^2 = 50,000$ .

En consecuencia, los puntos donde se escucha simultáneamente el disparo y el golpe en el blanco, están en la hipérbola

$$\frac{x^2}{40,000} - \frac{y^2}{50,000} = 1$$

**PROBLEMA 5. Propiedad reflexiva de la hipérbola**

Sea  $P = (x, y)$  un punto de la hipérbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  con focos

$F_1 = (-c, 0)$  y  $F_2 = (c, 0)$ . Si  $\alpha$  y  $\beta$  son los ángulos formados por los segmentos  $F_1P$  y  $F_2P$  y la recta tangente  $T$  a la hipérbola en el punto  $P$ , entonces

$$\alpha = \beta$$

**Solución**

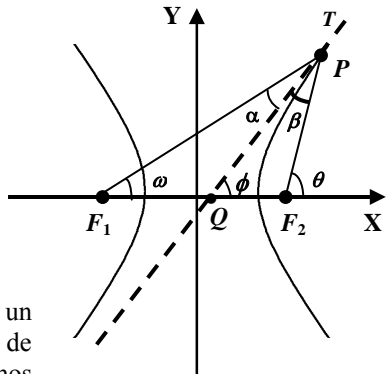
Según el problema propuesto 23,

$$\tan \phi = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Además,  $\tan \omega = \frac{y}{x+c}$  y  $\tan \theta = \frac{y}{x-c}$

Sabemos, por geometría elemental que en un triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacente. Aplicamos este resultado al triángulo  $F_1QP$ :

$$\phi = \alpha + \omega \Rightarrow \alpha = \phi - \omega \Rightarrow \tan \alpha = \tan (\phi - \omega) = \frac{\tan \phi - \tan \omega}{1 + \tan \phi \tan \omega}$$



$$= \frac{\frac{b^2x}{a^2y} - \frac{y}{x+c}}{1 + \frac{b^2x}{a^2y} - \frac{y}{x+c}} = \frac{(b^2x^2 - a^2y^2) + b^2cx}{(a^2 + b^2)xy + a^2cy} = \frac{a^2b^2 + b^2cx}{c^2xy + a^2cy} = \frac{b^2(a^2 + cx)}{cy(cx + a^2)} = \frac{b^2}{cy}$$

Esto es,  $\tan \alpha = \frac{b^2}{cy}$  (1)

En el triángulo  $QF_2P$ :

$$\theta = \beta + \phi \Rightarrow \beta = \theta - \phi \Rightarrow \tan \beta = \tan(\theta - \phi) = \frac{\tan \theta - \tan \phi}{1 + \tan \theta \tan \phi}$$

$$= \frac{\frac{y}{x-c} - \frac{b^2x}{a^2y}}{1 + \frac{y}{x-c} \frac{b^2x}{a^2y}} = \frac{(a^2y^2 - b^2x^2) + b^2cx}{xy(a^2 + b^2) - a^2cy} = \frac{-a^2b^2 + b^2cx}{c^2xy - a^2cy} = \frac{b^2(cx - a^2)}{cy(cx - a^2)} = \frac{b^2}{cy}$$

Esto es,  $\tan \beta = \frac{b^2}{cy}$  (2)

De (1) y (2) obtenemos que  $\tan \alpha = \tan \beta$  y, por tanto,  $\alpha = \beta$ .

### PROBLEMAS PROPUESTOS 3.4

*En los problemas del 1 al 15, hallar la ecuación canónica de la hipérbola que satisface los datos indicados.*

1. Focos:  $(\pm 7, 0)$ . Vértices:  $(\pm 5, 0)$ .      2. Focos:  $(\pm 13, 0)$ . Vértices:  $(\pm 5, 0)$ .

3. Focos:  $(0, \pm 6)$ . Vértices:  $(0, \pm 2)$ .      4. Focos:  $(0, \pm 15)$ . Vértices:  $(0, \pm 4)$ .

5. Focos:  $(-2, 2), (8, 2)$ . Vértices:  $(0, 2), (6, 2)$ ,

6. Un foco:  $(-3, 3)$ . Vértices:  $(-3, 0), (-3, -6)$

7. Focos:  $(-1, 2), (5, 2)$ . Un vértice:  $(4, 2)$ .

8. Focos:  $(\pm 3, 0)$ . Asíntotas:  $y = \pm 2x$

9. Focos:  $(0, \pm \sqrt{58})$ . Asíntotas:  $y = \pm \frac{5}{2}x$

- 10. Asíntotas:  $x = \pm \sqrt{3}y$ . Pasa por (6, 4).
- 11. Focos: (2, 2), (6, 2), Asíntotas:  $y = x + 2$ ,  $y = -x + 6$
- 12. Asíntotas:  $y = 2x + 1$ ,  $y = -2x + 3$ . Pasa por (0, 0)
- 13. Vértices: (-5, 3), (1, 3). Una asíntota:  $2y - x + 7 = 0$
- 14. Vértices: (-1, 3), (3, 3). Excentricidad:  $e = \frac{3}{2}$
- 15. Vértices: (-2, -2), (-2, 4). L. recto:  $L = 2$

*En los problemas del 16 al 19, completando cuadrados, hallar:*

- a. *La ecuación canónica de la hipérbola.*
- b. *Los vértices.*
- c. *Los focos.*
- d. *Las asíntotas.*

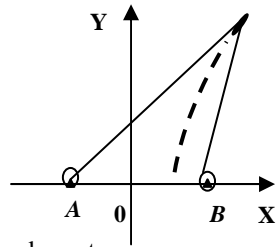
16.  $9x^2 - 16y^2 - 54x + 64y - 127 = 0$

17.  $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$

18.  $16x^2 - y^2 - 32x - 6y - 57 = 0$

19.  $4x^2 - 9y^2 - 16x + 54y - 101 = 0$

20. Dos estaciones A y B de un sistema LORAN están situadas a una distancia de 200 km. entre sí a lo largo de un litoral recto. La estación B está al oeste de A. Un barco que navega en alta mar, recibe la señal de la estación B, 0.0004 segundos antes que la señal de la estación A. La señal se desplaza a una velocidad de 300,000 km/seg.



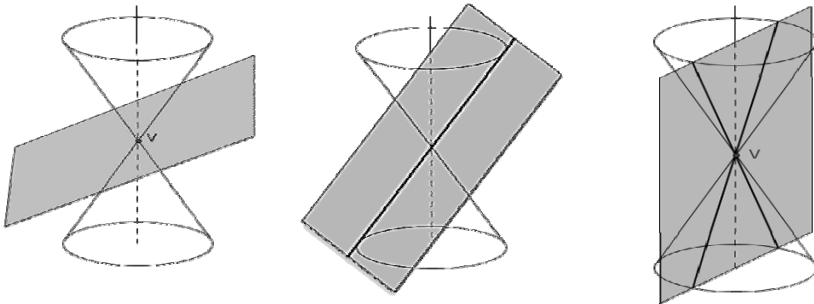
- a. Si el barco navega hacia el litoral manteniendo esta diferencia de tiempo, hallar una ecuación de su trayectoria.
  - b. ¿En qué lugar el barco tocaría tierra?
  - c. Si el muelle está entre las dos estaciones a 70 km. de la estación B, hallar la diferencia de tiempo que debe mantener el barco.
21. Dos observadores se encuentra en los puntos  $F_1 = (-200, 0)$  y  $F_2 = (200, 0)$  del plano XY. El sonido de una explosión en plano XY esa escuchada por el observador en  $F_2$ , 1 segundos antes que el observador en  $F_1$ . Hallar la ecuación de la hipérbola donde se encuentra la explosión.

22. Hallar la ecuación del conjunto de puntos del plano tales que su distancia al punto  $(-2, 1)$  es  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  de su distancia a la recta  $x = -\frac{3}{2}$ .
23. Sea la hipérbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  y sea  $P = (x_1, y_1)$  un punto de ella.
- a. Probar que la pendiente de la recta tangente a la hipérbola en el punto  $P = (x_1, y_1)$  es  $m = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$ .
- Sugerencia: La recta  $T: y = m(x - x_1) + y_1$  pasa por  $P = (x_1, y_1)$ .  $T$  es tangente a la hipérbola si intersecta a ésta en un único punto. Seguir los mismos pasos del problema resuelto 6 de la sección 3.2.*
- Otra sugerencia: Espera hasta que aprendas a derivar.*
- b. Probar que la recta tangente  $T$  a la hipérbola en el punto  $P = (x_1, y_1)$ . Tiene por ecuación:  $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

### SECCION 3.5

## LA ECUACION GENERAL DE SEGUNDO GRADO ROTACION DE EJES

En la introducción de este capítulo vimos que las cónicas se obtienen intersectando un cono circular recto con un plano. Sin embargo, **cuando el plano pasa por el vértice**, la intersección no producen una sección cónicas, sino un **punto**, una **recta** o **dos rectas**, como lo ilustra los siguientes gráficos. A estos tres resultados se los llama **secciones cónicas degeneradas**.



Las ecuaciones de las tres cónicas trasladadas, obtenidas en secciones anteriores las resumimos en el siguiente teorema.

**TEOREMA 3,4. Ecuación de una cónica trasladada,**

El gráfico de la ecuación

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , donde  $A$  y  $C$  no son ambos nulos, es una cónica o una cónica degenerada. Si no es una cónica degenerada, entonces el gráfico es

1. Una parábola si  $AC = 0$
2. Una elipse si  $AC > 0$
3. Una hipérbola si  $AC < 0$

Nuestra tarea en esta sección es estudiar la **ecuación general de segundo grado**:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

que contiene el término en  $Bxy$  con  $B \neq 0$ . Veremos que el gráfico de esta ecuación es también una cónica, la cual puede ser identificada por el discriminante de la ecuación,  $B^2 - 4AC$ . Para lograr este resultado necesitamos tratar previamente el tema de rotación de coordenadas.

**ROTACION DE COORDENADAS**

Los ejes coordenados  $X$ , e  $Y$  son rotados un ángulo agudo positivo  $\theta$ , dando como resultado un nuevo sistema de coordenadas  $X'$  y  $Y'$ .

Un cualquiera  $P$  tiene doble representación,  $(x, y)$  en el sistema antiguo y  $(x', y')$  en el nuevo. Buscamos las ecuaciones que relacionan esta doble representación.

Sea  $r$  la longitud del segmento  $\overline{OP}$  y  $\alpha$  el ángulo que forma  $\overline{OP}$  con el eje  $X'$ . Tenemos que:

$$x' = r \cos \alpha \quad y' = r \sin \alpha$$

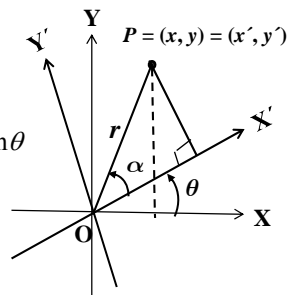
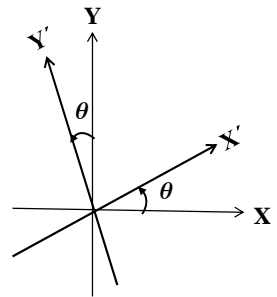
$$x = r \cos(\theta + \alpha) \quad y = r \sin(\theta + \alpha)$$

Teniendo en cuenta la fórmula del coseno de una suma:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta + \alpha) = r \cos \theta \cos \alpha - r \sin \theta \sin \alpha \\ &= (r \cos \alpha) \cos \theta - (r \sin \alpha) \sin \theta = x' \cos \theta - y' \sin \theta \end{aligned}$$

O sea,  $x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$  (1)

Similarmente,  $y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$  (2)



Si en sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) despejamos  $x'$  y  $y'$  obtenemos:

$$(3) \quad x' = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (4) \quad y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

En resumen tenemos:

**TEOREMA 3.5.** Fórmulas de rotación de ejes

Si los ejes X e Y del un plano coordenado son rotados un ángulo agudo  $\theta$  y dan lugar a los ejes  $X'$  y  $Y'$ , entonces las coordenadas  $(x, y)$  de un punto en el sistema XY y las coordenadas  $(x', y')$  en el sistema  $X' Y'$  están relacionadas por la fórmulas:

$$\text{I. } \begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

**EJEMPLO 1.** Mediante una rotación de  $45^\circ$  probar que el gráfico de  $xy = 1$  es una hipérbola.

**Solución**

$$x = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ = x' \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y')$$

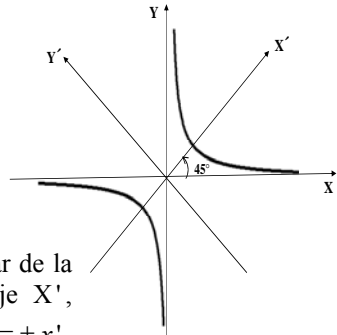
$$y = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ = x' \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y')$$

Reemplazando estos valores en la ecuación dada:

$$xy = 1 \Rightarrow \left( \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') \right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (x'^2 - y'^2) = 1 \Rightarrow \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$$

En el sistema  $X' Y'$  esta es la ecuación estándar de la hipérbola con centro en el origen y eje focal el eje  $X'$ , vértices  $(\sqrt{2}, 0)$  y  $(-\sqrt{2}, 0)$ . Las asíntotas son  $y' = \pm x'$



Ahora, buscamos una rotación que transforme la ecuación de segundo grado,

$$(i) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

en otra ecuación de segundo grado que no contenga el término en  $x'y'$ . Sea  $\theta$  el ángulo que origina tal rotación. Reemplazando, en la ecuación de segundo grado, los valores de  $x$  e  $y$  dados en el teorema anterior, tenemos:

$$A(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + B(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + C(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 + D(x'\cos\theta - y'\sin\theta) + E(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + F$$

Efectuando las operaciones indicadas y agrupando los términos, obtenemos:

$$(ii) \quad A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

en donde

$$(iii) \quad \begin{cases} A' = A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta \\ B' = 2(C - A)\sin\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ C' = A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \\ D' = D\cos\theta + E\sin\theta \\ E' = -D\sin\theta + E\cos\theta \\ F' = F \end{cases}$$

Si queremos que la ecuación (ii) carezca del término  $B'x'y'$  debemos tomar el ángulo  $\theta$  que haga  $B' = 0$ . Esto es, según la segunda igualdad de (iii):

$$B' = 2(C - A)\sin\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$

$$\Rightarrow B' = (C - A)\sin 2\theta + B\cos 2\theta = 0 \quad (\text{formulas del ángulo doble})$$

$$\Rightarrow B\cos 2\theta = (A - C)\sin 2\theta$$

$$\Rightarrow \cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

Resumimos este resultado en el siguiente teorema.

**TEOREMA 3.6.** Simplificación de la general de segundo grado

La ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ donde } B \neq 0,$$

Se transforma en una ecuación de la forma

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

Haciendo rotar los ejes un ángulo agudo  $\theta$  tal que

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

**EJEMPLO 2.** Mediante rotación de ejes, eliminar el término que contiene  $xy$  en

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 - 36 = 0$$

Identificar y graficar la curva.

**Solución**

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{8-5}{-4} = -\frac{3}{4}$$

Según el gráfico adjunto,  $\cos 2\theta = -\frac{3}{5}$

Usando las fórmulas del ángulo mitad tenemos:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1-3/5}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \text{sen} \theta = \sqrt{\frac{1-(-3/5)}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Luego, las fórmulas de rotación de ejes son:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y'), \quad y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')$$

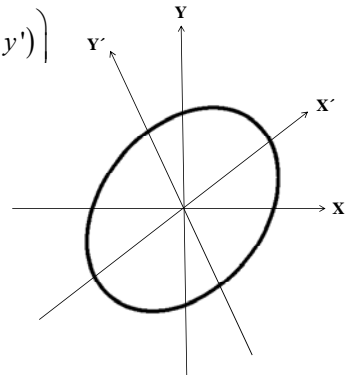
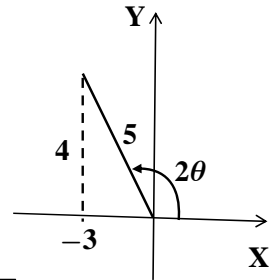
Reemplazando estos valores en la ecuación de segundo grado:

$$8\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y')\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y')\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')\right) + 5\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y')\right)^2 = 36$$

Efectuando las operaciones y simplificando:

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36 \Rightarrow \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

Vemos que la curva es una elipse.



**DEFINICION.** Se llama **discriminante** de la ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

a la expresión  $B^2 - 4AC$ .

El siguiente teorema nos dice que es suficiente conocer el valor del discriminante para identificar a la cónica, sin necesidad de rotar los ejes. La demostración la presentamos en el problema resuelto 2.

**TEOREMA 3,7.** Identificando una cónica por su discriminante.

El gráfico de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una cónica o una cónica degenerada. Si no es una cónica degenerada, entonces el gráfico es

1. Una parábola si  $B^2 - 4AC = 0$
2. Una elipse si  $B^2 - 4AC < 0$
3. Una hipérbola si  $B^2 - 4AC > 0$

**EJEMPLO 3.** Identificar la siguiente cónica mediante su discriminante

$$2x^2 - 3\sqrt{3}xy + 3y^2 + 5x - 6 = 0$$

**Solución**

Tenemos que:  $A = 2$ ,  $B = 3\sqrt{3}$  y  $C = 3$

$$B^2 - 4AC = (3\sqrt{3})^2 - 4(2)(3) = 27 - 24 = 3 > 0$$

Luego, la gráfica de la ecuación es una hipérbola.

## PROBLEMAS RESUELTOS 3.5

**PROBLEMA 1.** Sea la ecuación  $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 6\sqrt{13}x - 4\sqrt{13}y = 0$

1. Mediante una rotación de ejes verifique que la gráfica de la ecuación es una parábola.
2. Hallar la ecuación del eje de la parábola en las coordenadas XY.
3. Hallar el foco en las coordenadas X'Y' y en las coordenadas XY.
4. Hallar la ecuación de la directriz en las coordenadas XY.

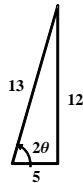
**Solución**

1. Tenemos que:

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{4-9}{-12} = \frac{5}{12} \quad \text{y} \quad \cos 2\theta = \frac{5}{13}$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1+5/13}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \text{sen } \theta = \sqrt{\frac{1-5/13}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}. \quad \text{Luego,}$$

i.  $x = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x' - 2y')$ ,    ii.  $y = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x' + 3y')$



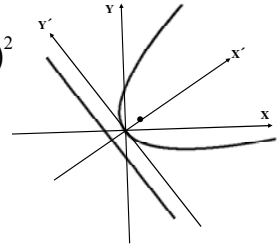
Reemplazando las ecuaciones i. y ii. en la ecuación dada:

$$\frac{4}{13}(3x'-2y')^2 - \frac{12}{13}(3x'-2y')(2x'+3y') + \frac{9}{13}(2x'+3y')^2 - 6\sqrt{13}\frac{1}{\sqrt{13}}(3x'-2y') - 4\sqrt{13}\frac{1}{\sqrt{13}}(2x'+3y') = 0$$

Efectuando las operaciones y simplificando obtenemos:

$$y'^2 = 2x',$$

que es la ecuación de una parábola con vértice el origen y con eje el eje  $X'$ .



2. El eje de la parábola, que es el eje  $X'$ , vista desde el sistema  $XY$ , es la recta que

$$\text{pasa por el origen y tiene por pendiente } m = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2/\sqrt{13}}{3/\sqrt{13}} = \frac{2}{3}.$$

Luego, su ecuación es

$$y - 0 = \frac{2}{3}(x - 0) \Rightarrow 2x - 3y = 0$$

3.  $y'^2 = 2x' \Rightarrow 4px' = 2x' \Rightarrow p = 1/2$ . Luego, el foco en el sistema  $X'Y'$ , es

$$F = (1/2, 0)$$

Las coordenadas de  $F$  en sistema  $XY$  son:

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta = \frac{1}{2} \frac{3}{\sqrt{13}} - 0 \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{3}{2\sqrt{13}}$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{13}} + 0 \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

Luego, en sistema  $XY$ ,  $F = (3/2\sqrt{13}, 1/\sqrt{13})$

4. El punto donde la directriz corta al eje  $X'$  es  $(-p, 0) = (-1/2, 0)$ . Este punto, en coordenadas  $XY$ , es  $(-3/2\sqrt{13}, -1/\sqrt{13})$ . Por otro lado, la directriz es perpendicular al eje de la parábola. La pendiente del eje de la parábola es  $2/3$ . Luego, la pendiente de la directriz es  $m' = -3/2$ . En consecuencia, la ecuación de la directriz, en el sistema  $XY$ , es

$$y - (-1/\sqrt{13}) = -\frac{3}{2}(x - (-3/2\sqrt{13})) \Rightarrow 6x + 4y = -\sqrt{13}$$

**PROBLEMA 2.** Probar el teorema 3.7.

El gráfico de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Es una cónica o una cónica degenerada. Si no es una cónica degenerada, entonces el gráfico es

1. Una parábola si  $B^2 - 4AC = 0$

2. Una elipse si  $B^2 - 4AC < 0$

3. Una hipérbola si  $B^2 - 4AC > 0$

**Solución**

Hemos visto que rotando los ejes coordenados un ángulo  $\theta$  transformamos la ecuación indicada en otra ecuación de la forma

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

Las relaciones entre los coeficientes,  $A, B, \dots$  y los coeficientes  $A', B', \dots$  están establecidas en el grupo (iii). Usando estas igualdades, efectuando los cálculos respectivos se prueba que los discriminantes de estas dos ecuaciones permanece invariante por la traslación. Esto, se cumple que:

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$$

En particular, si la rotación es la que hace  $B' = 0$ , tenemos la igualdad:

$$B^2 - 4AC = -4A'C'$$

Ahora podemos aplicar el teorema 3.4. Así:

$$B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow -4A'C' = 0 \Rightarrow A'C' = 0 \text{ y la gráfica es una parábola.}$$

$$B^2 - 4AC < 0 \Rightarrow -4A'C' < 0 \Rightarrow A'C' > 0 \text{ y la gráfica es una elipse.}$$

$$B^2 - 4AC > 0 \Rightarrow -4A'C' > 0 \Rightarrow A'C' < 0 \text{ y la gráfica es una hipérbola.}$$

**PROBLEMAS PROPUESTOS 3.5**

*En los problemas del 1 al 3 se dan las coordenadas de un punto en el sistema  $XY$ . Los ejes son rotados según el ángulo indicado. Hallar las coordenadas del punto en el sistema  $X'Y'$ .*

1.  $(1, -\sqrt{3}), 60^\circ$

2.  $(-2, 6), 45^\circ$

3.  $(-2\sqrt{3}, 4), 30^\circ$

*En los problemas del 4 y 5 se dan las coordenadas de un punto en el sistema  $X'Y'$  el cual se obtuvo al rotar el sistema  $XY$  según ángulo hincado. Hallar las coordenadas del punto en el sistema  $XY$ .*

4.  $(2 - \sqrt{3}, -1 - 2\sqrt{3})$ ,  $60^\circ$       5.  $\left(-3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, -3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $45^\circ$

*En los problemas del 6 y 7 hallar la ecuación transformada cuando los ejes  $XY$  giran el ángulo indicado. Identificar la cónica.*

6.  $2xy = -1$       7.  $x^2 + 4\sqrt{3}xy - 3y^2 = 30$

*En los problemas del 8 y 9 use el discriminante para identificar la cónica. Use una rotación de ejes para eliminar el término en  $xy$  y hallar la ecuación transformada y graficarla.*

8.  $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 5$       9.  $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 2\sqrt{13}x - 3\sqrt{13}y = 0$

10. Sea la ecuación  $13x^2 - 8xy + 7y^2 - 45 = 0$

- Mediante una rotación de ejes verifique que la gráfica de la ecuación es una elipse.
- Hallar los vértices en las coordenadas  $X'Y'$  y en las coordenadas  $XY$ .
- Hallar los focos en las coordenadas  $X'Y'$  y en las coordenadas  $XY$ .
- Hallar la recta que contiene al eje mayor en las coordenadas  $XY$ .
- Hallar la recta que contiene al eje menor en las coordenadas  $XY$ .

11. Sea la ecuación  $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0$

- Mediante una rotación de ejes verifique que la gráfica de la ecuación es una hipérbola.
  - Hallar el centro y los vértices en las coordenadas  $X'Y'$  y en las  $XY$ .
  - Hallar los focos en las coordenadas  $X'Y'$  y en las coordenadas  $XY$ .
-

# 4

---

## **FUNCIONES REALES**

---

*ARQUÍMEDES*  
(287–212 A. C.)

**4.1 FUNCIONES REALES Y SUS GRAFICAS**

**4.2 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS**

**4.3 FUNCIONES NUEVAS DE FUNCIONES  
CONOCIDAS**

**4.4 FUNCIONES INVERSAS**

**4.5 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS  
INVERSAS**

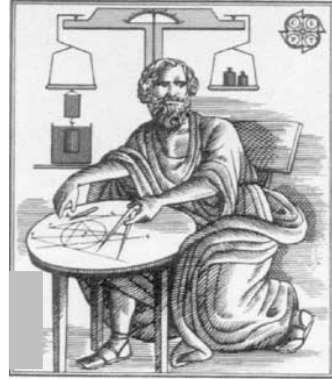
**4.6 FUNCIONES EXPONENCIALES**

**4.7 FUNCIONES LOGARITMICAS**

**4.8 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES  
EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS**

*BREVE HISTORIA DE LA FAMILIA BERNOULLI*

## Arquímedes (287–212 A. C.)



**ARQUÍMEDES** nace en Siracusa, ciudad al sur de la península itálica, que en aquel entonces formaba parte del imperio helénico. Se educó en Alejandria, centro de la ciencia de aquella época.

Los historiadores de la Matemática ponen a Arquímedes entre los tres más grandes genios que la producido el género humano en esta ciencia, siendo los otros dos el inglés Isaac Newton (1642–1727) y el alemán Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Calculó áreas de figuras planas con un método con el que se adelantó 2000 años a Newton y a Leibniz en la invención del cálculo integral.

Hierón, el rey de Siracusa, mandó a su joyero a confeccionar una corona de oro. El rey sospechaba que el joyero lo había engañado, aliando el oro con plata. Encomendó a Arquímedes la tarea de descubrir el fraude, pero sin dañar la corona. El ilustre sabio reflexionó mucho tiempo sobre el problema sin hallar la solución.

Cierta día, cuando se encontraba bañándose en una tina, observó que cuando sumergía sus piernas en el agua perdían parte de su peso. Esto fue el rayo de luz para la solución del problema: había descubierto lo que actualmente en hidrostática se llama el **Principio de Arquímedes**. Dicen que fue tal el entusiasmo que le causó este descubrimiento que salió desnudo del baño a la calle gritando: ¡Eureka!, ¡Eureka! (¡lo encontré!).



Los romanos, después de tres años de sitio, lograron apoderarse de Siracusa. Se dice que Arquímedes, absorto en la resolución de un problema, no se percató de la entrada del enemigo. Un soldado, irritado porque el sabio no le hacía caso, le atravesó su espada.



**SECCION 4.1**

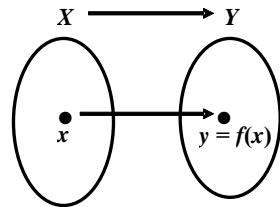
**FUNCIONES REALES Y SUS GRAFICAS**

**DEFINICION.** Una **función** es una tríada de objetos  $(X, Y, f)$ , donde  $X$  e  $Y$  son dos conjuntos y  $f$  es una regla que hace corresponder a **cada** elemento de  $X$  un **único** elemento de  $Y$ . Al conjunto  $X$  se le llama **dominio** de la función y al conjunto  $Y$ , **conjunto de llegada** de la función.

A una función  $(X, Y, f)$  se le denota más comúnmente por

$$f: X \rightarrow Y \quad \text{ó} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

y se lee: " **la función  $f$  de  $X$  en  $Y$** ".



Para indicar que a un elemento  $x$  de  $X$ ,  $f$  le hace corresponder el elemento  $y$  de  $Y$ , se escribe así:

$$y = f(x),$$

lo cual se lee "**y es igual a  $f$  de  $x$** ". También diremos que  $y$  es el valor que toma  $f$  en  $x$  ó que  $y$  es la **imagen** de  $x$  mediante  $f$ . El elemento  $x$ , en este caso, es una **preimagen** del elemento  $y$ .

A la variable que usamos para denotar los elementos del dominio se le llama **variable independiente** y a la variable que denota las imágenes, **variable dependiente**. En nuestra notación anterior,  $y = f(x)$ , **la variable independiente es  $x$  y la dependiente es  $y$** . Las letras  $x$  e  $y$ , por ser variables, pueden ser cambiadas por cualquier otro par de letras. Así, podemos escribir  $z = f(t)$ , en cuyo caso, la variable independiente es  $t$  y la dependiente es  $z$ .

El **rango** de la función  $f: X \rightarrow Y$  es el conjunto formado por todas las imágenes. Esto es,

$$\text{Rango de } f = \{ f(x) \in Y / x \in X \}$$

Al dominio y al rango de una función  $f: X \rightarrow Y$  los abreviaremos con **Dom( $f$ )** y **Rang( $f$ )**, respectivamente.

**OBSERVACION** En la definición de función hemos utilizado dos términos que merecen atención. Uno de ellos es "**cada**", el cual indica que todo elemento del dominio debe tener una imagen. El otro término es "**único**", el cual indica que todo elemento del dominio tiene exactamente una imagen.

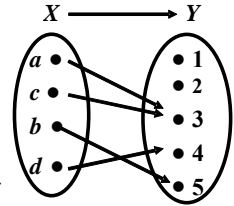
**EJEMPLO 1.** Sea la función  $f: X \rightarrow Y$ , donde  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y cuya regla  $f$  está dada por el gráfico adjunto. Se tiene:

**Dominio** =  $\text{Dom}(f) = X = \{a, b, c, d\}$

**Conjunto de llegada** =  $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

**Rango** =  $\text{Rang}(f) = \{3, 4, 5\}$

La **regla**  $f$  establece que:  $f(a) = 3, f(b) = 5, f(c) = 3, f(d) = 4$



**EJEMPLO 2.** Sea  $X$  un conjunto cualquiera. A la siguiente función se le llama **función identidad** del conjunto  $X$ .

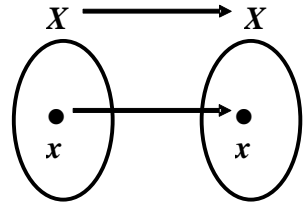
$$I_X: X \rightarrow X$$

$$I_X(x) = x$$

En este caso, el dominio, el conjunto de llegada y el rango, todos coinciden y son iguales a  $X$ . Esto es,

$$\text{Dom}(I_X) = \text{Conjunto de llegada} = \text{Rang}(I_X) = X$$

La regla  $I_X$  hace corresponder a cada elemento  $x$  el mismo elemento  $x$ .



**DEFINICION.** **Igualdad de funciones.**

Sean  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: X \rightarrow Y$  dos funciones con el mismo dominio y el mismo conjunto de llegada.

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in X$$

### FUNCIONES REALES

Las funciones que nos interesan en el curso de Cálculo son las funciones reales de variable real. Una **función real de variable real** es una función cuyo dominio y cuyo conjunto de llegada son subconjuntos de  $\mathbb{R}$ . Así, son funciones reales:

a.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

b.  $g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

c.  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x$$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

$$h(x) = 5$$

### CONVENIO PARA EL DOMNIO DE UNA FUNCION REAL

Muchas veces, con el objeto de simplificar la notación, para presentar una función real de variable real  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  daremos simplemente la regla  $f$ , prescindiendo del dominio  $X$  y del conjunto de llegada  $\mathbb{R}$ . Para esto, asumiremos la siguiente convención.

**CONVENCION.** Cuando una función real de variable real se define sólo dando la regla  $f$  ( la fórmula ) sin especificar su dominio, se supondrá que su dominio está formado por todos los números reales  $x$  para los cuales el valor  $f(x)$  esta definido y es un número real.

**EJEMPLO 3.** El dominio de la función  $f(x) = \frac{1}{x-2}$  está formado por todos los números reales excepto  $x = 2$ . Eliminamos  $x = 2$  ya que  $f(2) = \frac{1}{0}$  y la división entre 0 no existe. Luego,  
 $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

**EJEMPLO 4.** Hallar el dominio y el rango de las funciones:

1.  $f(x) = x - 3$                       2.  $g(x) = \sqrt{x-3}$

**Solución**

1. Como  $f(x) = x - 3$  está definido para todo  $x \in \mathbb{R}$ , tenemos que  $Dom(f) = \mathbb{R}$ .

Por otro lado,  $Rang(f) = \mathbb{R}$ . En efecto, dado  $y \in \mathbb{R}$ , tomamos  $x = y + 3$ . Se cumple que  $x \in \mathbb{R} = Dom(f)$  y

$$f(x) = x - 3 = (y + 3) - 3 = y.$$

2. Como la expresión subradical de  $g(x) = \sqrt{x-3}$  debe ser no negativa, tenemos:

$$x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, +\infty),$$

Esto es,  $Dom(g) = [3, +\infty)$ .

$Rang(g) = [0, +\infty)$ . En efecto, dado  $y \in [0, +\infty)$  tomamos  $x = y^2 + 3$ . Se cumple que  $x \geq 3$ , o sea  $x \in [3, +\infty)$  y

$$g(x) = \sqrt{x-3} = \sqrt{(y^2 + 3) - 3} = \sqrt{y^2} = |y| = y$$

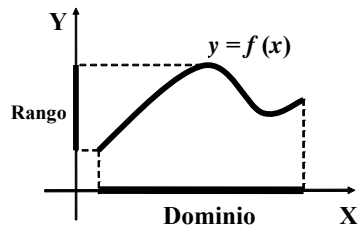
## GRAFICAS DE FUNCIONES Y CRITERIO DE LA RECTA VERTICAL

Se llama **gráfico** o **gráfica de la función**

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}$$

al conjunto:

$$G = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 / x \in X \}$$



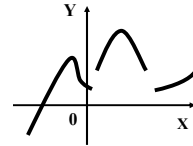
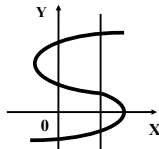
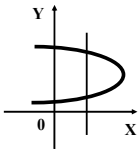
No toda curva en el plano es el gráfico de una función. Para reconocer las curvas que corresponden a gráficos de funciones se tiene el siguiente criterio geométrico:

**CRITERIO DE LA RECTA VERTICAL**

**Una curva en el plano es el gráfico de una función si y sólo si toda recta vertical corta a la curva a lo más una vez.**

La veracidad de este criterio estriba en el hecho de que si una recta vertical  $x = a$  corta a la curva dos veces, en  $(a, b)$  y en  $(a, c)$ , entonces  $a$  tiene dos imágenes,  $b$  y  $c$ ; pero esto viola la definición de función.

De acuerdo a este criterio, de las siguientes curvas, sólo la última representa a una función:



**EJEMPLO 5.** Graficar y hallar el dominio y rango de la función

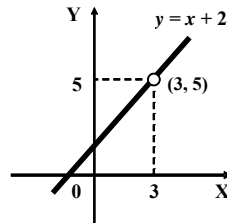
$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$$

**Solución**

Es claro que  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$ .

Por otro lado, factorizando el numerador tenemos que:

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = x + 2$$



Luego, la función  $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$  es igual a la función lineal  $y = x + 2$ , excepto en el punto  $x = 3$ , en el cual  $f$  no está definida. En consecuencia, el rango de  $f$  es igual al rango de  $y = x + 2$  menos el número  $y = 3 + 2 = 5$ . Esto es,

$$\text{Rang}(f) = \mathbb{R} - \{5\}$$

**FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS**

Algunas funciones son definidas por partes, como en los dos siguientes ejemplos.

**EJEMPLO 6.** Graficar y hallar el dominio y rango la función **parte entera**:

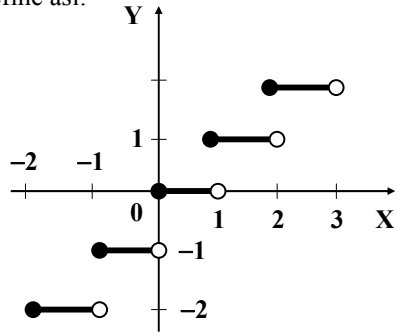
$$f(x) = [x] = n, \text{ si } n \leq x < n + 1, \text{ donde } n \text{ es un entero.}$$

A esta función también se la llama función **máximo entero** o, simplemente, **función escalera**.

**Solución**

En términos más explícitos, esta función se define así:

$$[x] = \begin{cases} -2, & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -1, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2, & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



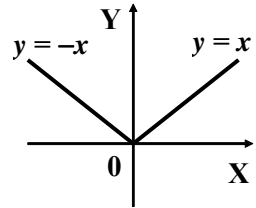
Dominio:  $\mathbb{R}$ . Rango:  $\mathbb{Z}$ .

**EJEMPLO 7.** Graficar y hallar el dominio y rango de la **función valor absoluto**

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Solución**

EL gráfico de esta función está conformado por dos semirrectas: La semirrecta  $y = x, x \geq 0$ , a la derecha del eje Y y la semirrecta  $y = -x, x < 0$ , a la izquierda del eje Y.



Dominio:  $\mathbb{R}$  Rango:  $[0, \infty)$

**FUNCIONES PARES E IMPARES Y SIMETRÍA**

1. Una función  $f$  es **par** si, para todo  $x$  en el dominio de  $f$ , se cumple que:

$$f(-x) = f(x)$$

2. Una función  $f$  es **impar** si, para todo  $x$  en el dominio de  $f$ , se cumple que:

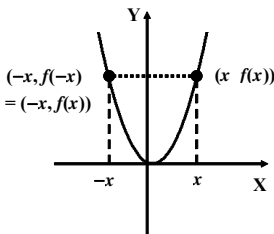
$$f(-x) = -f(x)$$

**EJEMPLO 8.** a. Probar que  $f(x) = x^2$  es par. Graficar la función.

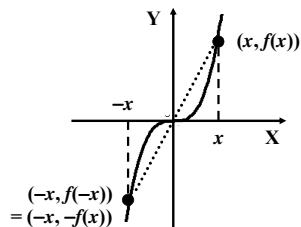
b. Probar que  $f(x) = x^3$  es impar. Graficar la función.

**Solución**

a.  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$



b.  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$



Se ve que:

- a. Una función  $f$  es par  $\Leftrightarrow$  el gráfico de  $f$  es simétrico respecto al eje  $Y$ .
- b. Una función  $f$  es impar  $\Leftrightarrow$  el gráfico de  $f$  es simétrico respecto al origen.

El término de función **par** o **impar** está inspirado en el siguiente resultado:

La función  $f(x) = x^n$  es par si  $n$  es par, y es impar si  $n$  es impar.

### FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

**DEFINICION.** Sea  $f$  una función definida en un intervalo  $I$ .

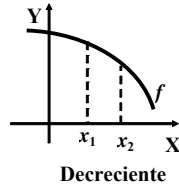
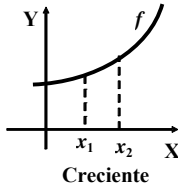
1.  $f$  es creciente en  $I$  si  $\forall x_1, x_2 \in I$  se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \forall x_1, x_2 \in I$$

2.  $f$  es decreciente en  $I$  si  $\forall x_1, x_2 \in I$  se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

3.  $f$  es monótona en  $I$  si  $f$  es o bien creciente o decreciente en  $I$ .



La función  $f(x) = x^2$ , dada en el ejemplo anterior, es decreciente en el intervalo  $(-\infty, 0]$  y es creciente en el intervalo  $[0, +\infty)$ . En cambio, la otra función  $f(x) = x^3$ , es creciente en todo su dominio, que es  $\mathbb{R}$ .

### BREVE CATALOGO DE FUNCIONES

#### LAS FUNCIONES CONSTANTES

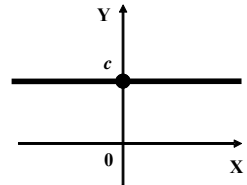
Sea  $c$  un número real fijo. La función

$$f(x) = c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

es una **función constante**.

Su dominio es todo  $\mathbb{R}$  y su rango es el conjunto unitario  $\{c\}$ .

Su gráfico es la recta horizontal con ordenada en el origen  $c$ .

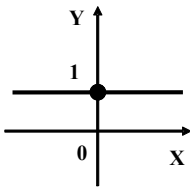


### FUNCION POTENCIA

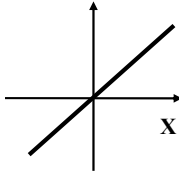
La **función potencia** es la función  $f(x) = x^\alpha$ , donde  $\alpha$  es una constante.

**EJEMPLO 9.** Si  $\alpha = 0$ , tenemos la función constante 1. Si  $\alpha = 1$ , tenemos la función identidad de  $\mathbb{R}$ . Si  $\alpha = 2$  ó  $\alpha = 3$  tenemos las funciones cuyas gráficas son una parábola o la parábola cúbica, respectivamente.

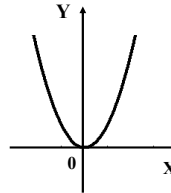
a.  $f(x) = x^0 = 1$



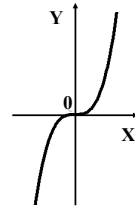
b.  $f(x) = x^1 = x$



c.  $f(x) = x^2$



d.  $f(x) = x^3$



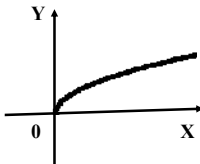
Observe la diferencia de las gráficas entre  $n$  par y  $n$  impar.

**EJEMPLO 10.** Si  $\alpha = \frac{1}{n}$ , donde  $n$  es un número natural no nulo, tenemos la

**función raíz enésima:**  $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

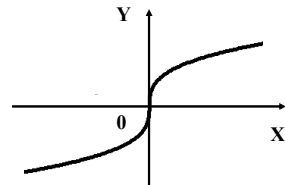
A continuación presentamos los casos  $n = 2$  y  $n = 3$

$f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ ,



$\text{Dom}(f) = \text{Rang}(f) = [0, +\infty)$

$f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$



$\text{Dom}(f) = \text{Rang}(f) = \mathbb{R}$

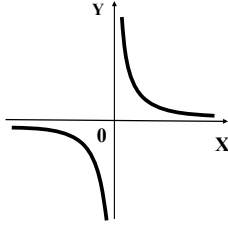
**EJEMPLO 11.** Si  $\alpha = -n$ , donde  $n$  es un número natural no nulo, tenemos la función:

$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ .

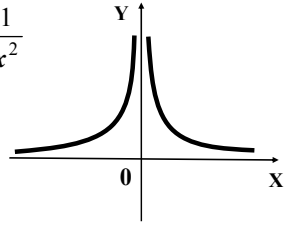
$\text{Dom}(f) = \text{Rang}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

A continuación presentamos los casos  $n = 1$  y  $n = 2$ .

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$



La gráfica de  $f(x) = 1/x^n$  se parece a la de  $f(x) = 1/x$  si  $n$  es impar; y a la gráfica de  $f(x) = 1/x^2$  si  $n$  es par.

### FUNCION POLINOMICA

Una **función polinómica** o **función polinomial de grado  $n$**  o, simplemente, **polinomio de grado  $n$** , es una función de la forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde  $n$  es un número natural y  $a_0, a_1, \dots, a_n$  son números reales siendo  $a_n \neq 0$ . Estos números son los coeficientes de la función polinómica.

A las funciones polinómicas de grado 1, 2, 3:

$$p(x) = ax + b, \quad p(x) = ax^2 + bx + c, \quad p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

se les conoce más usualmente con los nombres de **función lineal**, **función cuadrática** y **función cúbica**, respectivamente. Una función polinómica de grado 0 es una función constante. El gráfico de una función lineal es una recta no vertical y el gráfico de una función cuadrática es una parábola con eje paralelo al eje  $Y$ .

### FUNCION RACIONAL

Una **función racional** es cociente de dos polinomios:  $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ .

Así,  $r(x) = \frac{2-3x+8x^2}{4-x^2}$  es una función racional.

El dominio de una función racional es  $\mathbb{R}$  menos el conjunto de puntos donde el denominador se anula. Así el dominio de la función racional anterior es  $\mathbb{R} - \{2, -2\}$

### FUNCIONES ALGEBRAICAS

Una función  $f$  es **algebraica** si ésta puede construirse usando operaciones algebraicas (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y extracción de raíces), comenzando con polinomios. Los polinomios y las funciones racionales son, automáticamente, funciones algebraicas. Otros ejemplos:

a.  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

b.  $g(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{x}}$

## FUNCIONES TRANSCENDENTES

Las funciones que no son algebraicas son llamadas **funciones trascendentes**. Entre éstas tenemos a las funciones trigonométricas y sus inversas, las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas. La siguiente sección la dedicamos a las funciones trigonométricas. De las funciones trigonométricas inversas y de funciones exponenciales y logarítmicas nos ocuparemos un poco más adelante.

---

## FUNCIONES COMO MODELOS MATEMATICOS

Muchas relaciones que aparecen en las distintas ciencias o en la vida cotidiana se expresan (son modeladas) mediante funciones. Veamos algunos ejemplos.

**EJEMPLO 12.** Una fábrica que produce cierto artículo obtiene una utilidad de 300 dólares por unidad cuando la producción no excede las 800 unidades. La utilidad decrece 2 dólares por cada unidad que sobrepasa los 800.

- a. Expresar la utilidad  $U(x)$  de la fábrica como función de los  $x$  artículos producidos.
- b. Hallar la utilidad si se producen 1200 unidades.

### Solución

a. Si  $0 \leq x \leq 800$ , la utilidad es  $U(x) = 300x$

Si  $x > 800$ , el exceso sobre 800 es  $x - 800$  y la utilidad por unidad ha decrecido en:

$$2(x - 800) = 2x - 1,600$$

Por lo tanto:

$$\text{Utilidad por unidad} = 300 - (2x - 1,600) = 1,900 - 2x \quad y$$

$$\begin{aligned} U(x) &= (\text{utilidad por las primeras 800}) + (\text{utilidad por las que exceden 800}) \\ &= 300(800) + (1,900 - 2x)(x - 800) = -2x^2 + 3,500x - 1,280,000 \end{aligned}$$

En resumen, la utilidad al producir  $x$  artículos es:

$$U(x) = \begin{cases} 300x, & \text{si } 0 \leq x \leq 800 \\ -2x^2 + 3,500x - 1,280,000, & \text{si } x > 800 \end{cases}$$

b.  $U(1,200) = -2(1,200)^2 + 3,500(1,200) - 1,280,000$   
 $= -2,880,000 + 4,200,000 - 1,280,000 = 40,000$

---

**EJEMPLO 13.** De un tronco de madera, que tiene una sección circular de 3 dm. de radio, se quiere obtener un tablón de sección rectangular. Expresar el área del rectángulo en términos de su base.

**Solución**

Sean  $x$ ,  $h$  y  $A$  la base, la altura y el área del rectángulo, respectivamente. Se tiene:

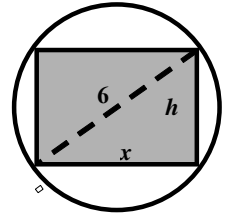
$$A = xh \tag{1}$$

Ahora, expresamos la altura  $h$  en términos de  $x$ , la longitud de la base. Para esto, observamos que el diámetro punteado del círculo divide al rectángulo en dos triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 6 dm. Usando el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$h = \sqrt{6^2 - x^2} \tag{2}$$

Luego, si  $A(x)$  es el área del rectángulo, de (1) y (2) obtenemos:

$$A(x) = x\sqrt{36 - x^2}$$



**EJEMPLO 14.**

Un fabricante de envases construye cajas sin tapa utilizando láminas cuadradas de 72 cm. de lado. A cada lámina se recorta un pequeño cuadrado en cada esquina y luego se doblan las aletas para formar los lados de la caja. Si  $x$  es la longitud del lado del pequeño cuadrado recortado, expresar:

- a. El volumen de la caja en términos de  $x$ .
- b. El área de la caja (sin la tapa) en términos de  $x$ .

**Solución**

a. Tenemos que:

$$\text{Volumen} = (\text{área de la base})(\text{altura})$$

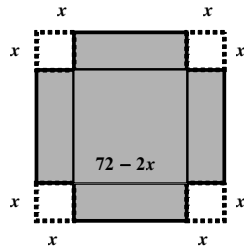
La base de la caja es un cuadrado de lado  $72 - 2x$ .

Luego, su área es  $(72 - 2x)^2$ .

La altura de la caja es  $x$ .

En consecuencia, el volumen de la caja es:

$$V = (72 - 2x)^2(x) = x(72 - 2x)^2$$



b. El área de la caja es igual al área del cuadrado inicial menos el área de los 4 cuadrados recortados. Luego, si  $A(x)$  es el área de la caja, entonces

$$A(x) = (72)^2 - 4x^2 = 5,184 - 4x^2$$

**EJEMPLO 15.**

Se desea construir un estanque de  $16 \text{ m}^3$  de capacidad. La base debe ser un rectángulo cuyo largo es el doble de su ancho. Las paredes laterales deben ser perpendiculares a la base. El  $\text{m}^2$  de la base cuesta 80 dólares y  $\text{m}^2$  de las paredes laterales, 50 dólares. Expresar el costo del tanque como función del ancho de la base.

**Solución**

Sea  $x$  la medida del ancho de la base,  $h$  la altura del tanque y  $C(x)$  su costo, en dólares.

La base tiene una longitud de  $2x$  y un área de  $2x(x) = 2x^2$ . Luego,

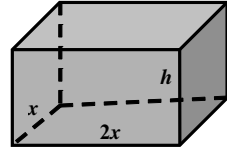
$$\text{Costo de la base} = 80(2x^2) = 160x^2. \quad (1)$$

El tanque debe tener  $16 \text{ m}^3$ . Luego,

$$16 = V = (\text{largo})(\text{ancho})(\text{altura}) = 2x(x)h = 2x^2h$$

Despejando  $h$ :

$$h = \frac{16}{2x^2} = \frac{8}{x^2}$$



El área de las 4 paredes laterales es:

$$2xh + 2(2x)h = 6xh = 6x \left( \frac{8}{x^2} \right) = \frac{48}{x}$$

Luego,

$$\text{Costo de las paredes laterales} = 50 \left( \frac{48}{x} \right) = \frac{240}{x} \quad (2)$$

Sumando (1) y (2) obtenemos el costo del tanque:

$$C(x) = 160x^2 + \frac{240}{x} \text{ miles de dólares.}$$

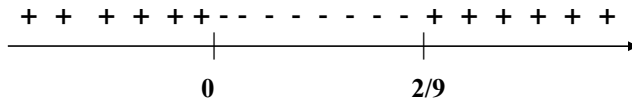
## PROBLEMAS RESUELTOS 4.1

**PROBLEMA 1.** Hallar el dominio y rango de la función  $f(x) = \sqrt{9 - 2/x}$

**Solución**

**Dominio:**

$$x \in \text{Dom}(f) \Leftrightarrow 9 - \frac{2}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{9x - 2}{x} \geq 0$$



$$\text{Luego, } \text{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup [2/9, +\infty).$$

**Rango:**

$$y \in \text{Rang}(f) \Leftrightarrow \exists x \in \text{Dom}(f) \text{ tal que } f(x) = y \Leftrightarrow \exists x \in \text{Dom}(f) \text{ tal que } \sqrt{9 - 2/x} = y$$

Despejamos  $x$  en términos de  $y$ :

$$\sqrt{9 - 2/x} = y \Leftrightarrow 9 - \frac{2}{x} = y^2 \wedge y \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} = 9 - y^2 \wedge y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{9-y^2} \wedge y \geq 0$$

Mirando la igualdad:  $x = \frac{2}{9-y^2}$ , vemos que podemos encontrar  $x$  si el denominador,  $9-y^2$ , es distinto de 0, ó sea cuando  $y \neq 3$  ó  $y \neq -3$ .

$$\text{Luego, } y \in \text{Rang}(f) \Leftrightarrow (y \neq 3 \text{ ó } y \neq -3.) \wedge y \geq 0 \Leftrightarrow y \in [0, +\infty) - \{3\}.$$

$$\text{En consecuencia, } \text{Rang}(f) = [0, +\infty) - \{3\}.$$

**PROBLEMA 2.** Hallar el dominio, el rango y graficar la **función sierra**:

$$S(x) = x - [x]$$

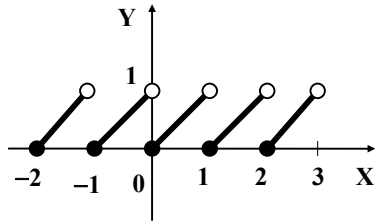
**Solución**

**Dominio:**  $\mathbb{R}$

Analicemos a la función  $S$  en cada intervalo de la forma  $[n, n + 1)$ :

$$n \leq x < n + 1 \Rightarrow [x] = n \Rightarrow$$

$$S(x) = x - n \text{ y } S(n) = n - n = 0$$



Esto nos dice que en cada intervalo  $[n, n + 1)$   $S$  es la recta  $y = x - n$ , que tiene pendiente 1 y pasa por el punto:  $(n, S(n)) = (n, 0)$ .

Luego, el **rango** de  $S$  es el intervalo **[0, 1)**.

**PROBLEMA 3.** Hallar la función lineal  $f(x) = ax + b$  que cumple las condiciones:

$$1. f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad 2. f(-2) = -6$$

**Solución**

Usando la condición (1) obtenemos:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \Rightarrow a(x + y) + b = (ax + b) + (ay + b) \Rightarrow$$

$$ax + ay + b = ax + b + ay + b \Rightarrow b = b + b \Rightarrow b = 0$$

$$\text{Luego, } f(x) = ax.$$

Ahora, usamos la condición (2):

$$f(-2) = -6 \Rightarrow a(-2) = -6 \Rightarrow a = 3$$

En consecuencia, la función lineal buscada es:  $f(x) = 3x$

**PROBLEMA 4.** Una fábrica, para envasar alimentos, necesita potes de aluminio con tapa, que tengan la forma de un cilindro circular recto y un volumen de  $250\pi \text{ cm}^3$ . Expresar la cantidad (área) de aluminio que tiene cada pote como función del radio de la base.

**Solución**

Sean  $r$  el radio de la base,  $h$  la altura y  $A$  el área total de las paredes del pote. El área es la suma de las áreas de las dos bases, que es  $2\pi r^2$ , más el área de la superficie lateral, que es  $2\pi rh$ . Luego,

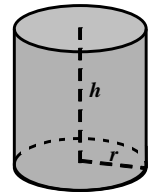
$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad (1)$$

Por otro lado, el volumen del cilindro circular recto es  $V = \pi r^2 h$ . En nuestro caso, como  $V = 250\pi$ , tenemos que

$$\pi r^2 h = 250\pi \Rightarrow r^2 h = 250 \Rightarrow h = \frac{250}{r^2}$$

Reemplazando este valor de  $h$  en (1):

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{250}{r^2} = 2\pi \left( r^2 + \frac{250}{r^2} \right)$$



### PROBLEMAS PROPUESTOS 4.1

1. Dada la función  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ , encontrar:

- a.  $f(3)$       b.  $f(1 + \sqrt{x})$       c.  $f(2+h) - f(2)$       d.  $f(a+h) - f(a)$

2. Dada la función  $g(x) = x + \frac{(x-2)^2}{4}$ , encontrar:

- a.  $g(2)$ ,      b.  $g(a+2)$ ,      c.  $g(a+h) - g(a)$

*En los problemas del 3 al 8 hallar el dominio y el rango de la función dada.*

3.  $f(x) = \sqrt{x-9}$       4.  $g(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{3}$       5.  $h(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$

6.  $u(x) = \sqrt[3]{x-2}$       7.  $f(x) = \frac{x^2-4}{x}$       8.  $y = \sqrt{x(x-2)}$

*En los problemas del 9 al 14 hallar el dominio de la función dada.*

9.  $g(x) = \frac{6}{\sqrt{9-x} - 2}$       10.  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4} - 2}$       11.  $y = \sqrt{4 - \frac{1}{x}}$

12.  $y = \frac{1}{4 - \sqrt{1-x}}$       13.  $y = \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$       14.  $y = \sqrt[4]{\frac{x+5}{x-3}}$

*En los problemas 15 y 16, hallar el dominio, el rango y graficar la función:*

$$15. g(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1, & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \qquad 16. f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x-2}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

17. Probar que:

a. Si el gráfico de  $f$  es simétrico respecto al eje Y, entonces  $f$  es par.

b. Si el gráfico de  $f$  es simétrico respecto al origen, entonces  $f$  es impar.

18. Si  $f(x+1) = (x-3)^2$ , hallar  $f(x-1)$ .

19. Hallar la función cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx$  tal que  $f(x) - f(x-1) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

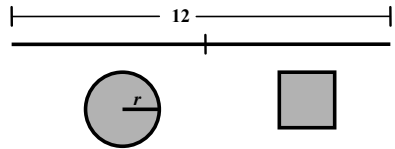
20. Un hotel tiene 40 habitaciones. El gerente sabe que cuando el precio por habitación es de 30 dólares todas las habitaciones son alquiladas, pero por cada 5 dólares de aumento una habitación se desocupa. Si el precio de mantenimiento de una habitación ocupada es de 4 dólares, expresar la ganancia del hotel como función del número  $x$  de habitaciones alquiladas.

21. Cuando la producción diaria no sobrepasa de 1,000 unidades de cierto artículo, se tiene una utilidad de Bs. 4,000 por artículo; pero si el número de artículos producidos excede los 1,000, la utilidad, para los excedentes, disminuye en Bs. 10 por cada artículo que excede los 1,000. Expresar la utilidad diaria del productor como función del número  $x$  de artículos producidos.

22. Una finca está sembrada de mangos a razón de 80 plantas por hectárea. Cada planta produce un promedio de 960 mangos. Por cada planta adicional que se siembre, el promedio de producción por planta se reduce en 10 mangos. Expresar la producción  $p(x)$  de mangos por hectárea como función del número  $x$  de plantas de mango sembradas por hectárea.

23. Para enviar cierto tipo de cajas por correo la administración exige que éstas sean de base cuadrada y que la suma de sus dimensiones (largo + ancho + altura) no supere los 150 cm. Expresar el volumen de la caja, con máxima suma de sus lados, como función de la longitud del lado  $x$  de la base.

24. Un alambre de 12 m. de largo se corta en dos pedazos. Con uno de ellos se forma una circunferencia y con el otro un cuadrado. Expresar el área encerrada por estas dos figuras como función del radio  $r$  de la circunferencia.

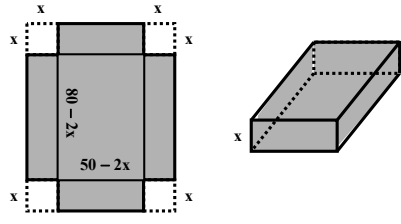


25. Un triángulo isósceles tiene 36 cm. de perímetro. Expresar el área del triángulo como función de la longitud  $x$  de uno de los lados iguales.

26. Una ventana de 7 m. de perímetro tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Expresar el área de la ventana como función del ancho  $x$ .

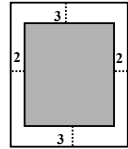


27. Un fabricante de envases construye cajas sin tapa utilizando láminas de cartón rectangulares de 80 cm. de largo por 50 cm. de ancho. Para formar la caja, de las cuatro esquinas de cada lámina se recorta un pequeño cuadrado y luego se doblan las aletas, como indica la figura.



Expresar el volumen del envase como función de la longitud  $x$  del lado del cuadrado cortado.

28. Se quiere imprimir un libro, en el cual cada página tenga 3 cm. de margen superior, 3 cm. de margen inferior y 2 cm. de margen a cada lado. El texto escrito debe ocupar un área de  $252 \text{ cm}^2$ .



Expresar el área de cada página como función del ancho  $x$  del rectángulo impreso.

## SECCION 4.2

# FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

### LAS FUNCIONES SEÑO Y COSENO

Sea  $C$  la circunferencia unitaria de centro en el origen,

$$x^2 + y^2 = 1,$$

a la que llamaremos **Circunferencia Trigonométrica**.

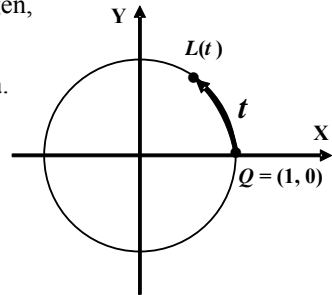
En primer lugar definimos una función:

$$L: \mathbb{R} \rightarrow C.$$

Para esto fijamos el punto  $Q = (1, 0)$ , el que será nuestro punto de referencia.

Sea  $t \in \mathbb{R}$ . Si  $t = 0$ , entonces

$$L(0) = Q = (1, 0)$$



Si  $t > 0$  comenzando en el punto  $Q = (1, 0)$ , nos movemos sobre la circunferencia  $C$  en sentido antihorario hasta formar un arco de longitud  $t$ . El punto final de este arco es  $L(t)$ . Si  $t < 0$ , comenzando en el mismo punto  $Q = (1, 0)$ , nos movemos sobre la circunferencia en sentido horario hasta formar un arco de longitud  $|t|$ . El punto final de éste es  $L(t)$ . Así,

$$L(\pi/2) = (0, 1) \quad \text{y} \quad L(-\pi/2) = (0, -1)$$

Considerando que la longitud de  $C$  es  $2\pi$ , se tiene que:

$$L(t + 2\pi) = L(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Además,  $2\pi$  es el menor número positivo que cumple esta igualdad. Es decir,  $L$  es periódica con periodo  $2\pi$ . En general, una función  $f$  es **periódica**, si existe un número real  $k > 0$  tal que:

$$f(t + k) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

El **menor número  $k$**  que cumple esta condición es el **período** de la función.

**DEFINICION.** Llamamos **función seno** y **función coseno** a las funciones:

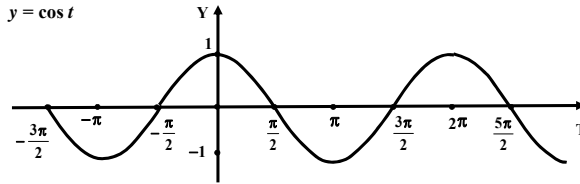
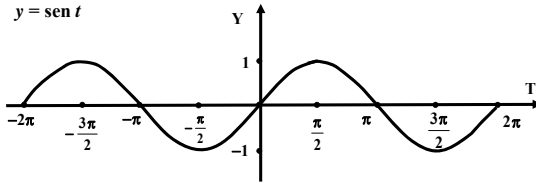
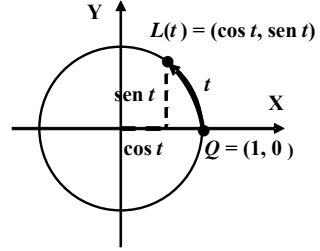
**sen:**  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , **sen**( $t$ ) = ordenada de  $L(t)$

**cos:**  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , **cos**( $t$ ) = abscisa de  $L(t)$

Es decir,

$$L(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

Escribiremos  $\cos t$  y  $\sin t$ , en lugar de  $\cos(t)$  y  $\sin(t)$



Vemos que la circunferencia unitaria juega un papel importante en la definición en la definición del seno y coseno. Por esta razón, a las funciones trigonométricas también se les llama **funciones circulares**.

**TEOREMA 4.1** Para cualquier número real  $t$  se cumple:

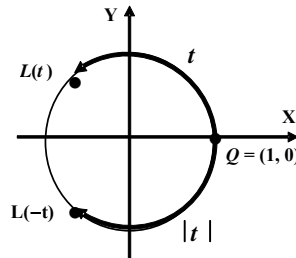
1.  $\sin(t + 2\pi) = \sin t$ ,  $\cos(t + 2\pi) = \cos t$

2.  $\sin(-t) = -\sin t$ ,  $\cos(-t) = \cos t$

3.  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$

4.  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

5.  $|\sin t| \leq 1$ ,  $|\cos t| \leq 1$



**Demostración**

- Esta propiedad es consecuencia directa de la periodicidad de la función  $L$ .
- Esta identidad es consecuencia de que los puntos

$$L(t) = (\cos t, \sin t) \text{ y } L(-t) = (\cos(-t), \sin(-t))$$

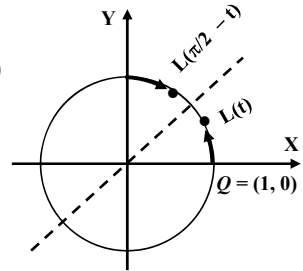
son simétricos respecto al eje X ( figura anterior).

- Los puntos:

$$L(t) = (\cos t, \sin t) \text{ y}$$

$$L(\pi/2 - t) = (\cos(\pi/2 - t), \sin(\pi/2 - t))$$

son simétricos respecto a la diagonal  $y = x$ , por tanto, sus coordenadas se intercambian.



- El punto  $L(t) = (\cos t, \sin t)$  está en la circunferencia trigonométrica. Por lo tanto,

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

- Como  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ , se tiene que  $\sin^2 t \leq 1$  y  $\cos^2 t \leq 1$ . Extrayendo raíz cuadrada a estas dos desigualdades obtenemos lo deseado.

La propiedad (1) nos dice que las funciones seno y coseno son periódicas. Se puede probar que el periodo es  $2\pi$ . La propiedad (2) nos dice que el seno es una función impar y que el coseno es par.

**EJEMPLO 1.** Hallar todos los  $t \in \mathbb{R}$  tales que:

- $\sin t = 0$ .
- $\cos t = 0$ .

**Solución**

$$1. \sin t = 0 \Leftrightarrow L(t) = (1, 0) \text{ ó } L(t) = (-1, 0)$$

$$\Leftrightarrow t = 2n\pi \text{ ó } t = \pi + 2n\pi, \forall n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

$$2. \cos t = 0 \Leftrightarrow L(t) = (0, 1) \text{ ó } L(t) = (0, -1)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ ó } t = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi, \forall n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

## LAS OTRAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Las restantes funciones trigonométricas: **tangente**, **cotangente**, **secante** y **cosecante**, a las que abreviamos con **tan**, **cot**, **sec** y **cosec**, respectivamente, las definimos en términos de las funciones seno y coseno.

**DEFINICION.**

a.  $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$

b.  $\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$

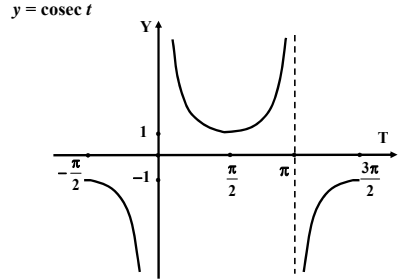
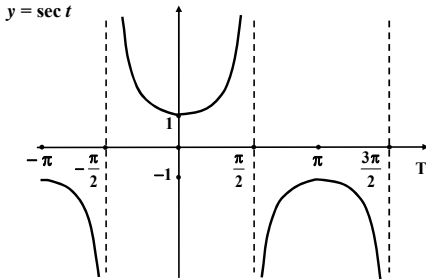
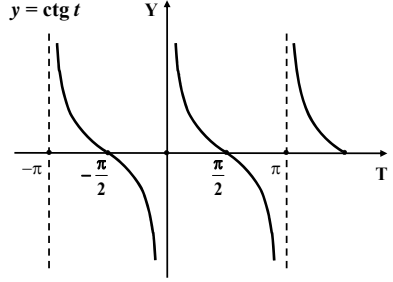
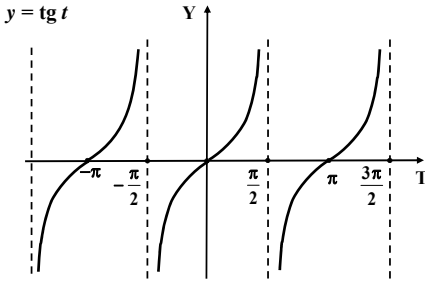
c.  $\sec t = \frac{1}{\cos t}$

d.  $\text{cosec } t = \frac{1}{\sin t}$

De acuerdo a los resultados del ejemplo anterior tenemos que:

1.  $\text{Dom}(\tan) = \text{Dom}(\sec) = \{ t \in \mathbb{R} / t \neq \pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z} \}$

2.  $\text{Dom}(\cot) = \text{Dom}(\text{cosec}) = \{ t \in \mathbb{R} / t \neq n\pi, n \in \mathbb{Z} \}$



**EJEMPLO 2.** Hallar el valor que toman las funciones trigonométricas en  $t = -9\pi$ .

**Solución**

Tenemos que  $L(-9\pi) = L(-\pi + 2(-4)\pi) = L(-\pi) = (-1, 0)$ .

Luego,

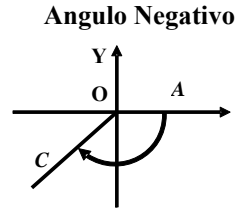
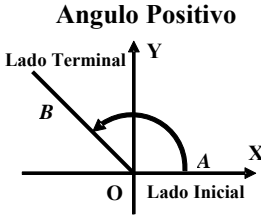
a.  $\text{sen}(-9\pi) = 0$       b.  $\text{cos}(-9\pi) = -1$       c.  $\tan(-9\pi) = \frac{\text{sen}(-9\pi)}{\text{cos}(-9\pi)} = \frac{0}{-1} = 0$

d.  $\cot(-9\pi)$  no está definida      e.  $\sec(-9\pi) = \frac{1}{\text{cos}(-9\pi)} = \frac{1}{-1} = -1$

f.  $\text{cosec}(-9\pi)$  no está definida

### ANGULOS ORIENTADOS

Diremos que un ángulo está en **posición normal** si su vértice coincide con el origen del sistema de coordenadas y uno de sus lados, al que llamaremos **lado inicial**, coincide con el semieje positivo de las X. El otro lado es el **lado terminal**. La figura adjunta muestra al ángulo  $\sphericalangle AOB$  en posición normal. El lado inicial es  $\overline{OA}$  y el lado Terminal  $\overline{OB}$ .



El concepto de ángulo dado en Geometría no es satisfactorio para el Cálculo. Es necesario que a cada ángulo lo consideremos generado por una rotación y obtener, de este modo, un **ángulo orientado**. Así, el ángulo orientado  $\sphericalangle AOB$  se obtiene por la rotación del lado inicial  $\overline{OA}$  hasta el lado terminal  $\overline{OB}$ . Un ángulo orientado es **positivo** si la rotación es antihoraria (contraria a las agujas del reloj) y es **negativo** si la rotación es horaria. El ángulo orientado  $\sphericalangle AOB$  adjunto es positivo, mientras que el ángulo  $\sphericalangle AOC$  es negativo. El punto A del lado inicial, al rotar describe un arco que tiene cierta longitud. Convenimos en considerar esta longitud positiva si la rotación es antihoraria, y negativa si la rotación es horaria.

Es claro que para un ángulo cualquiera existe otro ángulo en posición normal al cual es congruente. Por esta razón, no perderemos generalidad si nos concentramos en estudiar los ángulos en posición normal.

Los ángulos se miden en grados o en radianes (rad.). En el Cálculo se simplifican las fórmulas si se trabaja con radianes. Por esta razón el Cálculo adopta este tipo de medida.

**DEFINICION.** Si un ángulo central (con vértice en el centro) subtiende un arco de longitud  $s$  sobre una circunferencia de radio  $r$ , entonces el ángulo mide

$$\theta = \frac{s}{r} \text{ radianes} \quad (1)$$

Si un ángulo subtiende un arco igual a la circunferencia completa, entonces el ángulo mide:

$$\frac{2\pi r}{r} \text{ radianes} = 2\pi \text{ rad.}$$

Luego,  $360^\circ = 2\pi \text{ rad.}$  ó, simplificando,

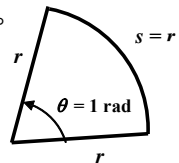
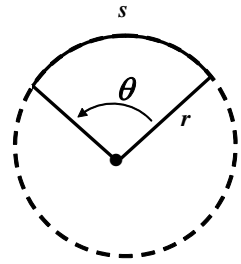
$$180^\circ = \pi \text{ rad.} \quad (2)$$

De donde

$$(3) \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad.} \approx 0.017 \text{ rads.} \quad (4) \quad 1 \text{ rad.} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3^\circ$$

Para tener una idea geométrica de un ángulo de 1 rad. tomemos un ángulo central  $\theta$  que subtiende un arco de longitud igual a un radio.

Se tiene, por (1),



$$\theta = \frac{r}{r} = 1 \text{ rad.}$$

Es decir, un ángulo mide 1 rad. si subtiende un arco de longitud igual al radio.

**EJEMPLO 3.** Hallar la longitud del arco subtendido por un ángulo central de  $\theta = 1.8$  radianes en una circunferencia de 12 cm. de radio.

**Solución**

$$s = \theta r = 1.8(12 \text{ cm.}) = 21.6 \text{ cm.}$$

Usaremos (3) y (4) para convertir grados en radianes y radianes en grados, respectivamente.

**EJEMPLO 4.** Expresar: a.  $60^\circ$  en radianes    b.  $-\frac{5}{2}\pi$  radianes en grados

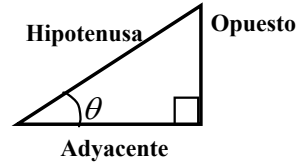
**Solución**

a.  $60^\circ = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$                       b.  $-\frac{5}{2}\pi \text{ rad} = -\frac{5}{2}\pi\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = -450^\circ$

### FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS

Hemos definido las funciones trigonométricas de números reales. Sin embargo, en la trigonometría elemental las funciones trigonométricas se definen para un ángulo agudo de un triángulo rectángulo como las siguientes razones:

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \frac{\text{Op}}{\text{Hip}} & \text{cos } \theta &= \frac{\text{Ady}}{\text{Hip}} \\ \text{tan } \theta &= \frac{\text{Op}}{\text{Ady}} & \text{cot } \theta &= \frac{\text{Ady}}{\text{Op}} \\ \text{sec } \theta &= \frac{\text{Hip}}{\text{Ady}} & \text{cosec } \theta &= \frac{\text{Hip}}{\text{Op}} \end{aligned}$$



Debemos reconciliar estos dos puntos de vista.

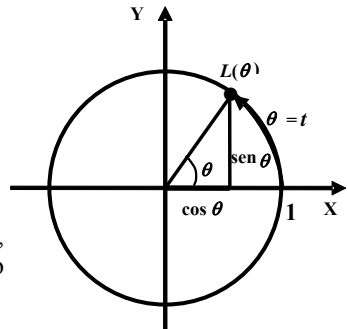
**DEFINICION.** Si un ángulo orientado  $\theta$  tiene  $t$  radianes, entonces:

$$\text{sen } \theta = \text{sen } t$$

Si la medida del ángulo está dada en grados, convertimos los grados en radianes. Así, si el ángulo tiene  $A^\circ$  que equivalen a  $t$  radianes, entonces

$$\text{sen}(A^\circ) = \text{sen } t.$$

Con las demás funciones trigonométricas se procede de igual forma.



Ahora, tomemos el círculo trigonométrico, un ángulo central  $\theta$  medido en radianes ( $\theta$  radianes) y el arco de longitud  $t$  que éste subtende. De acuerdo a la fórmula (1) se tiene que:

$$\theta = \frac{t}{1} = t,$$

Es decir, en el **círculo trigonométrico**, se cumple que:

**La medida del ángulo en radianes es igual a la longitud del arco subtendido.**

Ahora, mirando la figura anterior vemos que la definición de las funciones trigonométricas mediante el triángulo rectángulo (definición antigua) coincide con la dada mediante la circunferencia trigonométrica (definición nueva) Así:

$$\begin{aligned} \text{(Definición antigua) } \operatorname{sen} \theta &= \frac{\text{Op}}{\text{Hip}} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1} \\ &= \operatorname{sen} \theta = \text{ordenada de } L(\theta) \text{ (definición nueva)} \end{aligned}$$


---

Aplicando las fórmulas que nos dan los dos siguiente teorema se deducen fácilmente la gran mayoría de las identidades trigonométricas que aparecen en la correspondiente tabla al final del libro.

**TEOREMA 4.2** Leyes de los senos y ley de los cosenos

1, Ley de los senos

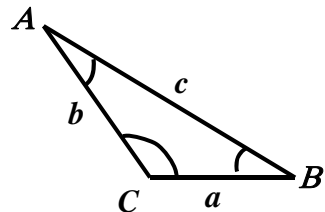
$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

2, Ley de los cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



**Demostración**

Para la ley de los cosenos ver el problema resuelto 5

---

**TEOREMA 4.3** Formulas de Adición y Sustracción

1.  $\operatorname{sen} (x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$
2.  $\cos (x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
3.  $\operatorname{sen} (x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$
4.  $\cos (x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

$$5. \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$6. \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

**Demostración**

Ver el problema resuelto 6.

**ANGULO DE INCLINACION**

Se llama **ángulo de inclinación** de una recta no horizontal al menor ángulo positivo que forma la recta con el semieje positivo de las X. A las rectas horizontales les asignamos como ángulo de inclinación al ángulo de medida 0.

Es claro que si la medida del ángulo de inclinación es  $\alpha$  radianes, entonces

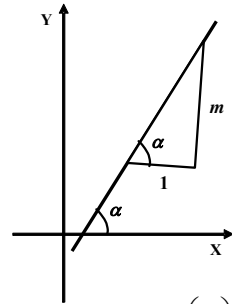
$$0 \leq \alpha < \pi$$

Si  $L$  es una recta no vertical de pendiente  $m$  y ángulo de inclinación  $\alpha$ , entonces

$$m = \tan \alpha$$

En efecto, mirando el triángulo de la figura, tenemos que:

$$\tan \alpha = \frac{\text{Op}}{\text{Ady}} = \frac{m}{1} = m$$



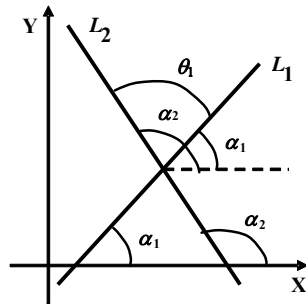
Si la recta es vertical, su ángulo de inclinación mide  $\frac{\pi}{2}$  Rad. Pero  $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$  no está definida. Este resultado concuerda con el hecho de que las rectas verticales no tienen pendiente.

**ANGULO ENTRE DOS RECTAS**

Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos rectas que se cortan y que tienen ángulo de inclinación  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , respectivamente. En el punto de intersección de estas rectas se forman dos ángulos suplementarios. Uno de ellos es:

$$\theta_1 = \begin{cases} \alpha_2 - \alpha_1, & \text{si } \alpha_2 \geq \alpha_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2, & \text{si } \alpha_1 \geq \alpha_2 \end{cases}$$

y el otro es  $\theta_2 = \pi - \theta_1$



De estos dos ángulos, si las rectas no son perpendiculares, sólo uno es agudo. El siguiente teorema nos dice como calcular este ángulo agudo.

**TEOREMA 4.4** Sean  $L_1$  y  $L_2$  dos rectas no verticales y no perpendiculares, con pendientes  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente. Si  $\theta$  es el ángulo agudo entre  $L_1$  y  $L_2$ , entonces

$$\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$$

**Demostración**

El ángulo agudo  $\theta$  es  $\theta_1$  si  $\tan \theta_1 \geq 0$  ó es  $\theta_2$  si  $\tan \theta_2 \geq 0$ .

Sea  $\alpha_1$  el ángulo de inclinación de  $L_1$  y  $\alpha_2$  el de  $L_2$ . Supongamos que  $\alpha_2 \geq \alpha_1$ .

Se tiene:  $\theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$ ,  $\theta_2 = \pi - \theta_1$ ,  $\tan \alpha_2 = m_2$  y  $\tan \alpha_1 = m_1$ .

Usando las identidades trigonométricas 25 y sabiendo que la función tangente tiene periodo  $\pi$ , obtenemos:

$$\tan \theta_1 = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$\tan \theta_2 = \tan(\pi - \theta_1) = \tan(-\theta_1) = -\tan \theta_1 = -\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Luego, 
$$\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$$

**EJEMPLO 5.** Hallar los ángulos entre las rectas:

$$L_1: 9y - 2x - 30 = 0, \quad L_2: 3y - 8x + 12 = 0$$

**Solución**

La pendiente de  $L_1$  es  $m_1 = \frac{2}{9}$  y la de  $L_2$  es  $m_2 = \frac{8}{3}$

Si  $\theta$  es el ángulo agudo entre las rectas, entonces

$$\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{8/3 - 2/9}{1 + (2/9)(8/3)} \right| = \left| \frac{72 - 6}{27 + 16} \right| = \left| \frac{66}{43} \right| = \frac{66}{43}$$

Luego,  $\theta = \arctan\left(\frac{66}{43}\right) \approx 0.993 \text{ rads.} \approx 56^\circ 54' 54''$

El otro ángulo es  $\theta' = \pi - 0.993 = 2.1486 \text{ rads.} \approx 123^\circ 5' 6''$

## PROBLEMAS RESUELTOS 4.2

**PROBLEMA 1.** La figura adjunta está conformada por un triángulo isósceles y un semicírculo. Los lados congruentes del triángulo miden 10 cm. y forman el ángulo  $\theta$ . Hallar una función que exprese el área  $A$  de la figura en términos del ángulo  $\theta$ .

**Solución**

Si  $A_1$  es el área del semicírculo y  $A_2$  la del triángulo, entonces

$$A = A_1 + A_2$$

Hallemos  $A_1$ :

El radio del semicírculo es  $r = 10 \operatorname{sen}(\theta/2)$ . Luego,

$$A_1 = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi [10 \operatorname{sen}(\theta/2)]^2 = 50\pi \operatorname{sen}^2(\theta/2)$$

Hallemos  $A_2$ :

La base  $b$  y la altura  $h$  del triángulo están dadas por:

$$b = 2r = 2(10 \operatorname{sen}(\theta/2)) = 20 \operatorname{sen}(\theta/2), \quad h = 10 \operatorname{cos}(\theta/2).$$

Luego,

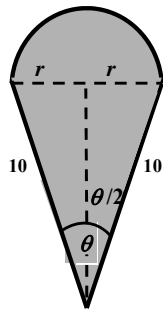
$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} [20 \operatorname{sen}(\theta/2)] [10 \operatorname{cos}(\theta/2)] \\ &= 50 [2 \operatorname{sen}(\theta/2) \operatorname{cos}(\theta/2)] = 50 \operatorname{sen} \theta \quad (\text{Ident. Trigo. 27}) \end{aligned}$$

Ahora hallamos  $A$ :

$$A = A_1 + A_2 = 50\pi \operatorname{sen}^2(\theta/2) + 50 \operatorname{sen} \theta = 50 [\pi \operatorname{sen}^2(\theta/2) + \operatorname{sen} \theta]$$

Esto es,

$$A = 50 [\pi \operatorname{sen}^2(\theta/2) + \operatorname{sen} \theta]$$

**PROBLEMA 2.**

Probar que las funciones tangente, cotangente y cosecante son impares y que la función secante es par. Es decir, probar que:

a.  $\tan(-t) = -\tan t$

b.  $\cot(-t) = -\cot t$

c.  $\sec(-t) = \sec t$

d.  $\operatorname{cosec}(-t) = -\operatorname{cosec} t$

**Solución**

Sólo probaremos las partes (a) y (c). Para las otras se procede en forma similar.

$$\text{a. } \tan(-t) = \frac{\operatorname{sen}(-t)}{\operatorname{cos}(-t)} = \frac{-\operatorname{sen} t}{\operatorname{cos} t} = -\frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{cos} t} = -\tan t \quad \text{c. } \sec(-t) = \frac{1}{\operatorname{cos}(-t)} = \frac{1}{\operatorname{cos} t} = \sec t$$

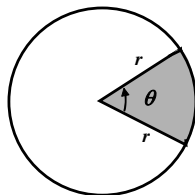
**PROBLEMA 3.**

Probar que el área  $A$  de un sector circular correspondiente a un ángulo de  $\theta$  radianes en una circunferencia de radio  $r$  es

$$A = \frac{1}{2} \theta r^2$$

**Solución**

Es claro que en una misma circunferencia, las áreas de dos sectores circulares son proporcionales a las medidas de los ángulos centrales correspondientes.



De acuerdo a este resultado y al hecho de que el círculo total es un sector circular de  $2\pi$  radianes, tenemos que la razón entre el área  $A$  y el área total del círculo ( $\pi r^2$ ) es la misma que la razón entre  $\theta$  y  $2\pi$ . Esto es,

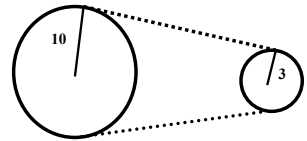
$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\theta r^2$$

**PROBLEMA 4.** Los dos piñones que enlaza la cadena de una bicicleta tienen 10 cm. y 3 cm. de radio, respectivamente.

- Si el piñón grande (el de los pedales) gira a razón de 75 revoluciones por minuto. ¿A cuántas revoluciones por minuto gira el piñón pequeño (el del caucho)?
- Si los ruedas de la bicicleta tienen un radio de 45 cm. ¿A qué velocidad se desplaza ésta?

**Solución**

- La circunferencia del borde del piñón grande tiene una longitud de  $2\pi(10)$  cm. Luego, en un minuto, cualquier punto de esta circunferencia hace un recorrido de  $2\pi(10)(75)$  cm. por minuto. Por otro lado, la longitud de la circunferencia exterior del piñón pequeño es  $2\pi(3)$  cm. Luego, el piñón pequeño debe hacer:



$$\frac{2\pi(10)(75)}{2\pi(3)} = 250 \text{ revoluciones por minuto.}$$

- La rueda trasera de la bicicleta, al igual que el piñón pequeño, gira a razón de 250 revoluciones por minuto, lo que da un recorrido de:

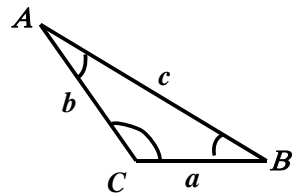
$$2\pi(45)(250) \text{ cm/min.} = 22,500\pi \text{ cm/min.} \approx 706.86 \text{ m/min.}$$

**PROBLEMA 5.** Probar la ley de los cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



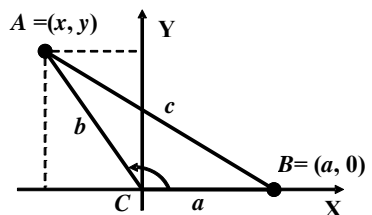
**Solución**

Probaremos la tercera igualdad. Para probar las otras se procede en forma similar.

Tomamos un sistema de coordenadas en tal forma que el ángulo  $C$  quede en posición normal y el lado  $a$  descanse sobre el eje  $X$ . Sea  $A = (x, y)$

Tenemos que  $y = b \sin C$  y  $x = b \cos C$

Aplicando la fórmula de distancia para los vértices del lado  $c$ :



$$\begin{aligned}
 c^2 &= (x-a)^2 + (y-0)^2 \\
 &= (b \cos C - a)^2 + (b \operatorname{sen} C - 0)^2 \\
 &= b^2 \cos^2 C - 2ab \cos C + a^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 C \\
 &= a^2 + b^2(\cos^2 C + \operatorname{sen}^2 C) - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - 2ab \cos C
 \end{aligned}$$

**PROBLEMA 6.** Probar las fórmulas aditivas dadas en el teorema

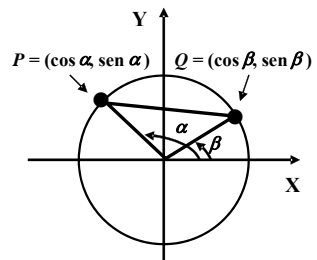
1.  $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$
2.  $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
3.  $\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$
4.  $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
5.  $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
6.  $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

### Solución

Probaremos solamente 1, 3, 4 y 5. Las otras fórmulas se prueban en forma similar. Comenzamos probando 4.

4. Calculamos longitud del segmento  $\overline{PQ}$  del gráfico adjunto de dos maneras:

$$\begin{aligned}
 (d(P, Q))^2 &= (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \alpha)^2 \\
 &= (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + (\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta) \\
 &\quad - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \\
 &= 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta
 \end{aligned}$$



Por otro lado, aplicando la ley de los cosenos:

$$\begin{aligned}
 (d(P, Q))^2 &= (d(O, P))^2 + (d(O, Q))^2 - 2(d(O, P))(d(O, Q))\cos(\alpha - \beta) \\
 &= 2 - 2\cos(\alpha - \beta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Luego, } 2 - 2\cos(\alpha - \beta) &= 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \Rightarrow \\
 \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta
 \end{aligned}$$

3. La parte 3 del teorema 4.1 dice:  $\operatorname{sen} t = \cos[\pi/2 - t]$  y  $\cos t = \operatorname{sen}[\pi/2 - t]$ .

Luego,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x-y) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x-y)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - (-y)\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(-y) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{sen}(-y) \\ &= \operatorname{sen}x\cos y - \cos x\operatorname{sen}y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1. \operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen}(x - (-y)) = \operatorname{sen}x\cos(-y) - \cos x\operatorname{sen}(-y) \\ &= \operatorname{sen}x\cos y + \cos x\operatorname{sen}y \\ &= \operatorname{sen}x\cos y - \cos x\operatorname{sen}y \end{aligned}$$

$$5. \tan(x+y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\operatorname{sen}x\cos y + \cos x\operatorname{sen}y}{\cos x\cos y - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}$$

Dividiendo el numerador y el denominador entre  $\cos x \cos y$ :

$$\tan(x+y) = \frac{\operatorname{sen}x/\cos x + \operatorname{sen}y/\cos y}{1 - (\operatorname{sen}x/\cos x)(\operatorname{sen}y/\cos y)} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 4.2

1. Sin usar calculadora hallar:

a.  $\cot \frac{5\pi}{3}$ ,   b.  $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}$ ,   c.  $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ,   d.  $\sec\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ ,   e.  $\operatorname{cosec}\left(-\frac{241\pi}{6}\right)$ .

2. Hallar todos los  $\alpha \in \mathbb{R}$  tales que:

a.  $\tan \alpha = 0$    b.  $\cot \alpha = 0$    c.  $\sec \alpha = 0$    d.  $\operatorname{cosec} \alpha = 0$    e.  $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Probar que:

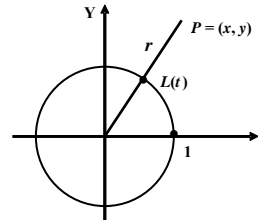
a.  $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$    b.  $\sec(\alpha + \pi) = -\sec \alpha$    c.  $\operatorname{cosec}(\alpha + \pi) = -\operatorname{cosec} \alpha$ .

4. Probar que:

a.  $\cos(n\pi) = (-1)^n$    b.  $\cos(\alpha + n\pi) = (-1)^n \cos \alpha$    c.  $\operatorname{sen}(\alpha + n\pi) = (-1)^n \operatorname{sen} \alpha$ .

5. Sea  $P = (x, y) \neq (0, 0)$  un punto del plano que está a una distancia  $r$  del origen. Si  $L(t)$  es el punto de intersección del rayo  $\overline{OP}$  con la circunferencia unitaria, probar que

a.  $\operatorname{sen} t = \frac{y}{r}$    b.  $\cos t = \frac{x}{r}$    c.  $\tan t = \frac{y}{x}$ ,  $x \neq 0$



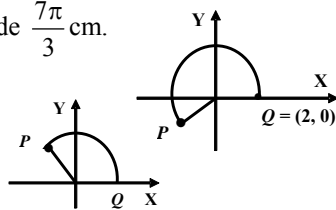
6. Hallar el valor de  $\operatorname{sen}(-23\pi/2)\cos(31\pi)$

7. Si  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , simplificar:

a.  $\operatorname{sen}(2\alpha + \beta + \gamma)$

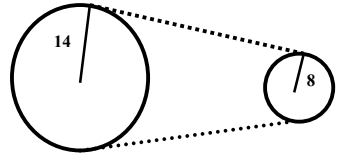
b.  $\operatorname{sen}(2\alpha + \beta + \gamma) + \operatorname{sen}(\beta + \gamma)$

8. Sabiendo que el periodo de  $y = \operatorname{sen} x$  es  $2\pi$  y el de  $y = \operatorname{cot} x$  es  $\pi$ , hallar el periodo de las funciones:  
 a.  $f(x) = \operatorname{sen}(\lambda x)$ , donde  $\lambda$  es una constante mayor que 0.    b.  $g(x) = \operatorname{cot}(2x)$ .
9. Una circunferencia tiene un radio de 18 cm. Hallar la medida en radianes de un ángulo determinado por un arco de longitud  
 a. 6 cm.    b. 11.8 cm.    c.  $6\pi$  cm.
10. Hallar la longitud de un arco subtendido en una circunferencia de 9 cm de radio por un ángulo central de:  
 a.  $\frac{\pi}{6}$  radianes    b.  $\frac{5}{4}\pi$  radianes    c.  $50^\circ$ .
11. La distancia entre dos puntos  $A$  y  $B$  sobre la tierra se mide a lo largo de la circunferencia que pasa por  $A$  y  $B$  y tiene por centro  $C$ , el centro de la tierra. Si el radio de la tierra es, aproximadamente, 6,367 Km., hallar la distancia entre  $A$  y  $B$  si el ángulo  $\sphericalangle ACB$  es de  
 a.  $1^\circ$     b.  $30^\circ$     c.  $45^\circ$     d.  $80^\circ 45'$ .
12. En el problema anterior, si el ángulo  $\sphericalangle ACB$  mide  $1'$  (un minuto), entonces la distancia entre  $A$  y  $B$  es de una milla náutica. ¿Cuántos Km. tiene una milla náutica?
13. ¿Cuántos radianes gira el minutero de un reloj en un lapso de 20 minutos?
14. Hallar la medida en grados de un ángulo que es suplemento de un ángulo de  $\frac{\pi+1}{2}$  radianes.
15. Dos ángulos internos de un triángulo miden  $\frac{\pi+1}{2}$  y  $\frac{\pi-1}{2}$  radianes. Hallar la medida, en grados, del tercer ángulo.
16. En la figura, el arco  $\widehat{QP}$  tiene una longitud de  $\frac{7\pi}{3}$  cm.  
 Hallar el punto  $P$ .
17. En la figura, el radio de la circunferencia es 3 cm. y la longitud del arco  $\widehat{QP}$  es  $2\pi$ . Hallar  $P$ .
18. El lado terminal de un ángulo orientado en posición normal es el rayo  $\overline{OP}$ , donde  $O$  es el origen y  $P = (-2, 6)$ . Si la medida de este ángulo es  $\alpha$  radianes, hallar el valor de:  $(\operatorname{sen} \alpha - 3\cos \alpha)(\tan \alpha)(\sec \alpha)$
19. Hallar el valor de: a.  $\frac{\operatorname{sen}(-750^\circ)}{\cos(-150^\circ)}$     b.  $\frac{\cos(-1,290^\circ)}{\tan(7,515^\circ)}$
20. Hallar el valor de  $\left(\cos \frac{11\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{26\pi}{4}\right) \left(\tan \frac{\pi}{6} + \cos \frac{14\pi}{3}\right)$
21. Hallar la longitud del lado de un polígono regular de  $n$  lados inscrito en una circunferencia de radio  $r$ .

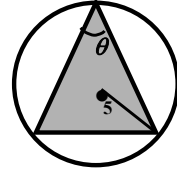


22. El caucho de un automóvil tiene un diámetro de 60 cm. ¿A cuántas revoluciones por minuto gira el caucho cuando el automóvil viaja a 90 Km. por hora?

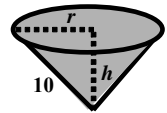
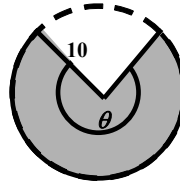
23. Una banda enlaza a dos poleas, como indica la figura. Los radios de las poleas son de 8 cm. y 14 cm., respectivamente. ¿A cuántas revoluciones por segundo gira la polea pequeña cuando la grande gira a razón de 28 revoluciones por segundo?



24. Un triángulo isósceles se inscribe en un círculo de radio 5 cm. Hallar una función que exprese el perímetro  $P$  del triángulo en términos del ángulo  $\theta$ .



25. De una lámina circular de radio 10 cm. se corta un sector para construir una copa cónica. Hallar una función que exprese el volumen de la copa en términos del ángulo central  $\theta$ .



El volumen del cono es:  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

26. El ángulo de inclinación de una recta que no interseca el segundo cuadrante es de  $\frac{\pi}{4}$  rad. Hallar su ecuación sabiendo que su distancia al origen es de 4.

27. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas:  $3x + 2y = 0$  y  $5x - y + 7 = 0$ .

28. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $Q = (2, 1)$  y forma un ángulo de  $\pi/4$  rads. con la recta  $3y + 2x + 4 = 0$  ( dos soluciones).

29. Los puntos  $(6, 2)$  y  $(-1, 3)$  son dos vértices opuestos de un cuadrado. Hallar las ecuaciones de las rectas donde están los lados del cuadrado.

SECCION 4.3

NUEVAS FUNCIONES DE FUNCIONES CONOCIDAS

GRAFICAS NUEVAS DE GRAFICAS CONOCIDAS

Conociendo el gráfico de una función  $y = f(x)$ , podemos obtener, mediante simples transformaciones geométricas, los gráficos de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{cccc}
 y = f(x) + c, & y = f(x) - c, & y = f(x + c), & y = f(x - c), \\
 y = -f(x), & y = f(-x), & y = cf(x), & y = f(cx),
 \end{array}$$

donde  $c$  es una constante positiva.

Las transformaciones sugeridas son de tres tipos:

1. **Traslaciones verticales y horizontales.**
2. **Reflexiones.**
3. **Estiramiento y compresión.**

### TRASLACIONES VERTICALES Y HORIZONTALES

Sea  $c > 0$ . Para obtener la gráfica de:

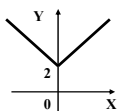
1.  $y = f(x) + c$ , **trasladar** la gráfica de  $y = f(x)$   $c$  unidades hacia **arriba**.
2.  $y = f(x) - c$ , **trasladar** la gráfica de  $y = f(x)$   $c$  unidades hacia **abajo**.
3.  $y = f(x + c)$ , **trasladar** la gráfica de  $y = f(x)$   $c$  unidades a **la izquierda**.
4.  $y = f(x - c)$ , **trasladar** la gráfica de  $y = f(x)$   $c$  unidades a **la derecha**.

**EJEMPLO 1.** Utilizando la gráfica de la función  $y = |x|$ , graficar las funciones:

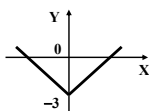
a.  $y = |x| + 2$     b.  $y = |x| - 3$     c.  $y = |x - 1|$     d.  $y = |x + 2|$

**Solución**

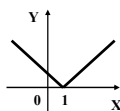
a.  $y = |x| + 2$



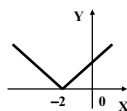
b.  $y = |x| - 3$



c.  $y = |x - 1|$



d.  $y = |x + 2|$



### REFLEXIONES

Para obtener la gráfica de:

1.  $y = -f(x)$ , **reflejar** la gráfica de  $y = f(x)$  **en el eje X**.
2.  $y = f(-x)$ , **reflejar** la gráfica de  $y = f(x)$  **en el eje Y**.

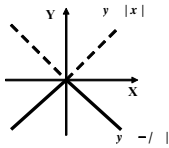
**EJEMPLO 2.** Utilizando las gráficas de  $y = |x|$  y la de la  $y = \sqrt{x}$ , graficar las siguientes funciones:

a.  $y = -|x|$     b.  $y = \sqrt{-x}$

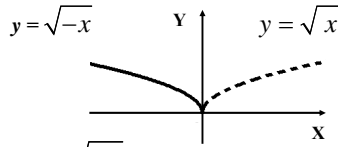
**Solución**

a. La gráfica de  $y = -|x|$  se obtiene reflejando en el eje X la gráfica de  $y = |x|$

b. La gráfica de  $y = \sqrt{-x}$  se obtiene reflejando en el eje Y la gráfica de  $y = \sqrt{x}$



a.  $y = -|x|$



b.  $y = \sqrt{-x}$

**ESTIRAMIENTO Y COMPRESION**

Sea  $c$  una constante positiva:  $c > 0$ .

1. Para obtener la gráfica de  $y = cf(x)$ , modificar **verticalmente** (alargar o comprimir) con factor  $c$  la gráfica de  $y = f(x)$ . Esta modificación es un **alargamiento** si  $c > 1$  y es una **compresión** si  $0 < c < 1$ .
2. Para obtener la gráfica de  $y = f(cx)$ , modificar **horizontalmente** (comprimir o alargar) con factor  $1/c$  la gráfica de  $y = f(x)$ . Esta modificación es una **compresión** si  $c > 1$  y es un **alargamiento** si  $0 < c < 1$ .

Una argumentación sobre la validez de estos criterios verla en problema resuelto 6.

**EJEMPLO 3.** Utilizando las gráfica de  $y = \sqrt{1-x^2}$  graficar las funciones

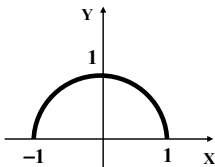
a.  $g(x) = 2\sqrt{1-x^2}$

b.  $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$

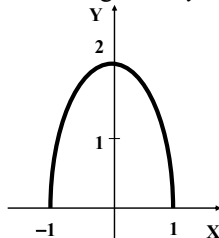
**Solución**

La gráfica de  $y = \sqrt{1-x^2}$  es la parte superior de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$

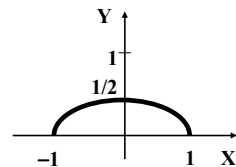
- a. En este caso  $c = 2 > 1$ . Luego, la gráfica de  $g(x) = 2\sqrt{1-x^2}$  se obtiene estirando verticalmente con factor  $c = 2$  la gráfica  $y = \sqrt{1-x^2}$
- b. En este caso  $c = 1/2 < 1$ . La gráfica de  $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$  se obtiene comprimiendo verticalmente con factor  $c = 1/2$  la gráfica  $y = \sqrt{1-x^2}$



$y = \sqrt{1-x^2}$



a.  $g(x) = 2\sqrt{1-x^2}$



b.  $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$

**EJEMPLO 4.** Utilizando las gráfica de  $y = \sqrt{1-x^2}$  graficar las funciones

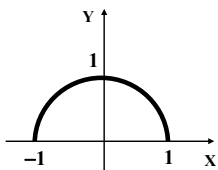
a.  $g(x) = \sqrt{1-4x^2}$

b.  $h(x) = \sqrt{1-x^2/4}$

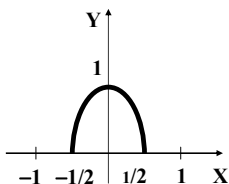
**Solución**

a. Tenemos que  $g(x) = \sqrt{1-4x^2} = \sqrt{1-(2x)^2}$ . Luego, por la regla 2, para el caso  $c = 2$ , concluimos que la gráfica de  $g(x) = \sqrt{1-4x^2}$  se obtiene comprimiendo horizontalmente con factor  $c = 1/2$  la gráfica  $y = \sqrt{1-x^2}$

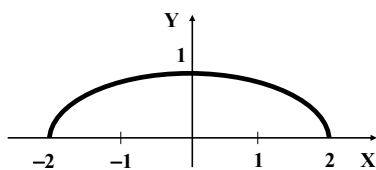
b. Tenemos que  $h(x) = \sqrt{1-x^2/4} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}x\right)^2}$ . Luego, por la regla 2, para el caso  $c = 1/2$  la gráfica de  $h(x) = \sqrt{1-x^2/4}$  se obtiene estirando horizontalmente con factor  $\frac{1}{c} = \frac{1}{1/2} = 2$  la gráfica  $y = \sqrt{1-x^2}$



$y = \sqrt{1-x^2}$



a.  $g(x) = \sqrt{1-4x^2}$



b.  $h(x) = \sqrt{1-x^2/4}$

## ALGEBRA DE FUNCIONES

Dadas las funciones reales,  $f$  y  $g$ , la suma  $f + g$ , la diferencia  $f - g$ , el producto de un número  $r$  por una función  $rf$  y el cociente  $\frac{f}{g}$  se definen así:

**DEFINICION.** Sean  $f$  y  $g$  funciones reales y  $r$  un número real.

a.  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ,  $\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ .

b.  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ ,  $\text{Dom}(f - g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ .

c.  $(fg)(x) = f(x)g(x)$ ,  $\text{Dom}(fg) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ .

d.  $(rf)(x) = rf(x)$ ,  $\text{Dom}(rf) = \text{Dom}(f)$ .

e.  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ,  $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{x / g(x) = 0\}$ .

**EJEMPLO 5.** Si  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \sqrt{9-x^2}$  y  $r = 5$ , hallar las funciones:

a.  $f + g$     b.  $f - g$     c.  $fg$     d.  $rf$     e.  $f/g$

**Solución**

Hallemos los dominios de  $f$  y de  $g$ :

$$x \in \text{Dom}(f) \Leftrightarrow x \geq 0. \text{ Luego, } \text{Dom}(f) = [0, +\infty).$$

$$x \in \text{Dom}(g) \Leftrightarrow 9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3.$$

Luego,  $\text{Dom}(g) = [-3, 3]$ .

La intersección de estos dominios es:

$$\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = [0, +\infty) \cap [-3, 3] = [0, 3].$$

Ahora,

a.  $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{9 - x^2}$ , con dominio =  $[0, 3]$ .

b.  $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{9 - x^2}$ , con dominio =  $[0, 3]$ .

c.  $(fg)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x}\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9x - x^3}$ , con dominio =  $[0, 3]$ .

d.  $(5f)(x) = 5f(x) = 5\sqrt{x}$ , con dominio =  $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$

e.  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{9 - x^2}} = \sqrt{\frac{x}{9 - x^2}}$ , con dominio =  $[0, 3] - \{3\} = [0, 3)$

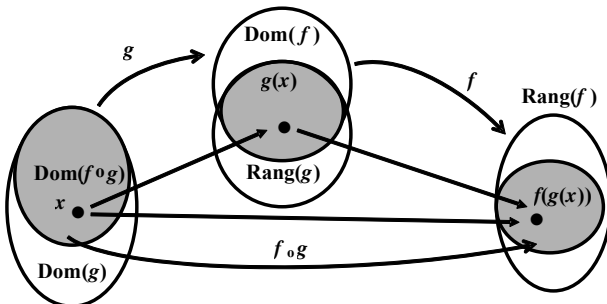
**COMPOSICION DE FUNCIONES**

**DEFINICION.** Dadas dos funciones  $f$  y  $g$ , se llama **función compuesta** de  $f$  y  $g$  a la función  $f \circ g$  definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom}(g) / g(x) \in \text{Dom}(f)\}$$

Observar que para que se pueda tener la compuesta  $f \circ g$ , el rango de  $g$  debe intersectar al dominio de  $f$ .



En el caso de que la regla de la compuesta  $(f \circ g)(x)$  sea una fórmula, entonces

$$\text{Dom}(f \circ g) = \text{Dom}(g) \cap \{x / (f \circ g)(x) \text{ es un número real}\}$$

**EJEMPLO 6.** Si  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  y  $g(x) = \frac{1}{x}$  hallar, con sus respectivos dominios,

a.  $f \circ g$       b.  $g \circ f$       c.  $g \circ g$       d.  $f \circ f$

**Solución**

a.  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1/x) = \sqrt{1-(1/x)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

Tenemos que  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{0\}$  y

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \text{ es un número real} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

En consecuencia,

$$\text{Dom}(f \circ g) = (\mathbb{R} - \{0\}) \cap ((-\infty, -1] \cup [1, \infty)) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

b.  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{1-x^2}) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ es un número real} \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$$

En consecuencia,  $\text{Dom}(g \circ f) = [-1, 1] \cap (-1, 1) = (-1, 1)$

c.  $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(1/x) = \frac{1}{1/x} = x$

$(g \circ g)(x) = x$  está definida en todo  $\mathbb{R}$ . En consecuencia

$$\text{Dom}(g \circ g) = (\mathbb{R} - \{0\}) \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} - \{0\}$$

d.  $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2} = \sqrt{x^2} = |x|$

$(f \circ f)(x) = |x|$  está definida en todo  $\mathbb{R}$ . En consecuencia

$$\text{Dom}(f \circ f) = [-1, 1] \cap \mathbb{R} = [-1, 1].$$

**OBSERVACION.** La composición de funciones no es conmutativa. Esto es,

$$(g \circ f) \neq (f \circ g).$$

En efecto, según el ejemplo anterior, tenemos que:

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \neq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (f \circ g)(x)$$

**EJEMPLO 7.** Si  $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ,  $g(x) = x^3$  y  $h(x) = x - 2$ , hallar:

- a.  $f \circ g \circ h$                       b.  $f \circ h \circ g$                       c.  $h \circ g \circ f$

**Solución**

a.  $(f \circ g \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f(g(x - 2)) = f((x - 2)^3) = \frac{(x - 2)^3}{1 + (x - 2)^3}$

b.  $(f \circ h \circ g)(x) = (f \circ h)(g(x)) = f(h(g(x))) = f(h(x^3)) = f(x^3 - 2) = \frac{x^3 - 2}{1 + x^3 - 2} = \frac{x^3 - 2}{x^3 - 1}$

c.  $(h \circ g \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h\left(g\left(\frac{x}{1+x}\right)\right) = h\left(\left(\frac{x}{1+x}\right)^3\right)$   
 $= \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - 2 = \frac{x^3}{(1+x)^3} - 2$

**EJEMPLO 8.** Si  $F(x) = \frac{-5}{\sqrt{x^2 - 3}}$ , hallar tres funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$  tales que

$$F = f \circ g \circ h$$

**Solución**

Si  $f(x) = \frac{-5}{x}$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$  y  $h(x) = x^2 - 3$ , se tiene:

$$(f \circ g \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f(g(x^2 - 3)) = f(\sqrt{x^2 - 3}) = \frac{-5}{\sqrt{x^2 - 3}}$$

Estas funciones no son únicas. Las siguientes funciones también satisfacen el requerimiento:

$$f(x) = \frac{-5}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = x - 3 \quad \text{y} \quad h(x) = x^2$$

## PROBLEMAS RESUELTOS 4.2

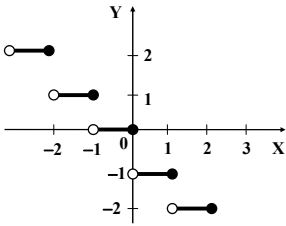
**PROBLEMA 1.** Usando la gráfica de  $y = [x]$  (ejemplo 6 sección 4.1) y usando las técnicas de la transformación, bosquejar la gráfica de

- a.  $y = [-x]$                                       b.  $y = [x/2]$

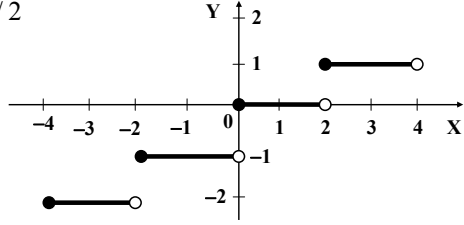
**Solución**

a. El gráfico de  $y = [-x]$  se obtiene reflejando en el eje Y el gráfico de  $y = [x]$ .

b. La gráfica de  $y = [x/2]$  se obtiene de la gráfica de  $y = [x]$ , alargándola horizontalmente con factor  $\frac{1}{c} = \frac{1}{1/2} = 2$ .



a.  $y = [-x]$



b.  $y = [x/2]$

**PROBLEMA 2.** Usando las técnicas de la transformación de gráficas, bosquejar

la gráfica de  $y = -\sqrt{\frac{1}{2}x} + 3$

**Solución**

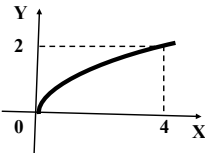
**Paso 1.** Tomamos la gráfica de  $y = \sqrt{x}$ , que es ya conocida.

**Paso 2.** Construimos la gráfica de  $y = \sqrt{x/2}$ , la cual se obtiene de la gráfica de  $y = \sqrt{x}$  alargándola horizontalmente con factor  $\frac{1}{c} = \frac{1}{1/2} = 2$

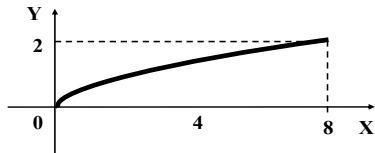
**Paso 3.** Construimos la gráfica de  $y = -\sqrt{x/2}$ , la cual se obtiene de la gráfica de  $y = \sqrt{x/2}$  reflejándola en el eje X.

**Paso 4.** Construimos la gráfica de  $y = -\sqrt{x/2} + 3$ , la cual se obtiene de la gráfica de  $y = -\sqrt{x/2}$ , trasladándola 3 unidades hacia arriba.

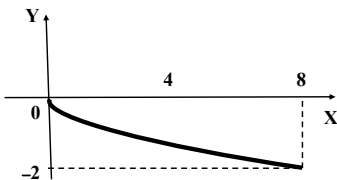
1.  $y = \sqrt{x}$



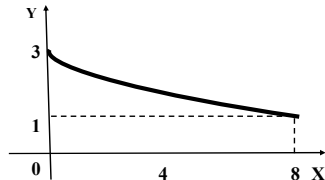
2.  $y = \sqrt{x/2}$



3.  $y = -\sqrt{x/2}$



4.  $y = -\sqrt{x/2} + 3$



**PROBLEMA 3.** Teniendo en cuenta la gráfica de  $y = \cos x$  y usando las técnicas de la transformación de gráficas, bosquejar la gráfica de:

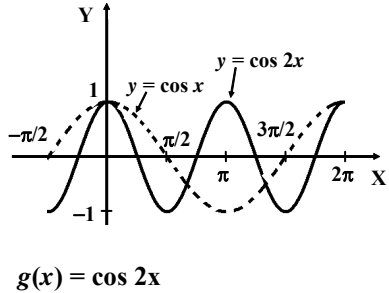
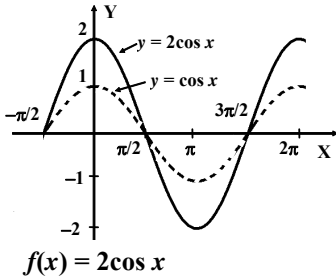
a.  $f(x) = 2\cos x$

b.  $g(x) = \cos 2x$

**Solución**

a. La gráfica de la función  $f(x) = 2\cos x$  se obtiene de la gráfica de  $y = \cos x$ , estirándola verticalmente, con un factor de 2.

b. La gráfica de  $g(x) = \cos 2x$  se obtiene de la gráfica de  $y = \cos x$ , comprimiéndola horizontalmente, con un factor de  $\frac{1}{2}$ .



Observar que el periodo de  $g(x) = \cos 2x$  es  $\pi$ , que es la mitad del periodo de  $y = \cos x$ . En general, el periodo de  $y = \cos cx$  es  $\frac{2\pi}{c}$ .

**PROBLEMA 4.** Sea la función  $h(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{4-x^2}$

a. Hallar el dominio de  $h$ .

b. Hallar dos funciones  $f$  y  $g$  tales que  $h = g \circ f$

**Solución**

a. Para que  $\sqrt{4-x^2}$  sea real debemos tener que  $4-x^2 \geq 0$ . Además, como  $4-x^2$  aparece como un denominador, debemos exigir que  $4-x^2 \neq 0$ . Uniendo las dos condiciones debemos tener que:

$$4-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Luego, el dominio de  $h$  es el intervalo  $(-2, 2)$ .

b. Si  $f(x) = 4-x^2$  y  $g(y) = \sqrt{y} + \frac{1}{y}$ , tenemos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4-x^2) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{4-x^2} = h(x)$$

**PROBLEMA 5.** Sea  $g(x) = x - 1$  y  $h(x) = x^2$ .

a. Hallar una función  $p$  tal que  $g \circ p = h$

b. Hallar una función  $f$  tal que  $f \circ g = h$

**Solución**

$$\text{a. } g \circ p = h \Rightarrow g(p(x)) = h(x) \Rightarrow p(x) - 1 = x^2 \Rightarrow p(x) = x^2 + 1$$

$$\text{b. } f \circ g = h \Rightarrow f(g(x)) = h(x) \Rightarrow f(x-1) = x^2$$

$$\text{Luego, } f(x) = f(x+1-1) = f((x+1)-1) = (x+1)^2$$

**PROBLEMA 6.** Sean  $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$  y  $g(x) = \sqrt{16-x^2}$ .

Hallar la función  $g \circ f$  con su correspondiente dominio.

**Solución**

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = \sqrt{16 - \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{1}{(x^2-1)^2}}$$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \quad \text{y}$$

$$(g \circ f)(x) \text{ está definida} \Leftrightarrow 16 - \frac{1}{(x^2-1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 16(x^2-1)^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 4|x^2-1| \geq 1 \Leftrightarrow |x^2-1| \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2-1 \leq -\frac{1}{4} \vee \frac{1}{4} \leq x^2-1$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq \frac{3}{4} \vee \frac{5}{4} \leq x^2 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \frac{\sqrt{5}}{2} \leq |x|$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \vee x \leq -\sqrt{5}/2 \vee x \geq \sqrt{5}/2$$

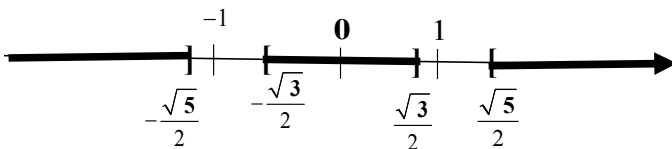
$$\Leftrightarrow x \leq -\sqrt{5}/2 \vee -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \vee x \geq \sqrt{5}/2$$

Luego,  $(g \circ f)(x)$  está definido en el conjunto

$$B = (-\infty, -\sqrt{5}/2] \cup [-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2] \cup [\sqrt{5}/2, \infty)$$

Por último,

$$\text{Dom}(g \circ f) = \text{Dom}(f) \cap B = B = (-\infty, -\sqrt{5}/2] \cup [-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2] \cup [\sqrt{5}/2, \infty)$$



**PROBLEMA 7.** Justificar el criterio de estiramiento y compresión de una gráfica.

**Solución**

- Tomemos cualquier punto  $(x, f(x))$  del gráfico de  $y = f(x)$ . Si a la **ordenada** de este punto lo multiplicamos por  $c$ , obtenemos el punto  $(x, cf(x))$ , que está en la gráfica de  $y = cf(x)$ . Pero multiplicar sólo las ordenadas de los puntos  $(x, f(x))$  por  $c$  significa alargar (si  $c > 1$ ) o comprimir (si  $c < 1$ ) verticalmente con factor  $c$  la gráfica de  $y = f(x)$ .
- Tomemos cualquier punto  $(x, f(x))$  del gráfico de  $y = f(x)$ . Si a la **abscisa** de este punto lo multiplicamos por  $1/c$ , obtenemos el punto  $(x/c, f(x))$ . Si hacemos  $z = x/c$ , tenemos que  $x = cz$  y  $(x/c, f(x)) = (z, f(cz))$ , que está en la gráfica de  $y = f(cx)$ . Pero multiplicar las abscisas de los puntos  $(x, f(x))$  por  $1/c$  significa comprimir (si  $c > 1$ ) o alargar (si  $c < 1$ ) horizontalmente con factor  $1/c$  la gráfica de  $y = f(x)$ .

**PROBLEMAS PROPUESTOS 4.3**

- Usando la gráfica de  $f(x) = x^3$ , bosquejar los gráficos de:
  - $y = x^3 - 3$
  - $y = (x-1)^3$
  - $y = -x^3 + 1$
  - $y = -(x-1)^3 + 1$
- Usando la gráfica de  $f(x) = \frac{1}{x}$ , bosquejar los gráficos de:
  - $y = \frac{1}{x} - 2$
  - $y = \frac{1}{x-2}$
  - $y = -\frac{1}{x}$
  - $y = \frac{1}{x-2} + 5$
- Usando la gráfica de  $y = [x]$ , bosquejar el gráfico de:
  - $y = -[x]$
  - $y = [2x]$
  - $y = \frac{1}{2}[x]$
- Utilizando la gráfica de la función  $y = \text{sen } x$  y las técnicas de traslación y reflexión, graficar la función  $y = 1 - \text{sen}(x - \pi/2)$
- Considerando la gráfica  $y = \text{cos } x$  y usando las técnicas de la transformación de gráficas, bosquejar la gráfica de  $y = -3\text{cos } 4x$ .
  - ¿Cuál es el periodo de  $y = -3\text{cos } 4x$ ?

*En los problemas 6, 7 y 8 hallar  $f + g, f - g, fg$  y  $f/g$  con sus dominios.*

6.  $f(x) = \frac{1}{1-x}, g(x) = \sqrt{2-x}$       7.  $f(x) = \sqrt{16-x^2}, g(x) = \sqrt{x^2-4}$

8.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, g(x) = \sqrt[3]{x}$

En los problemas 9, 10 y 11 hallar el dominio de la función dada.

$$9. f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x-4} \quad 10. f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} \quad 11. g(x) = \frac{\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2}}{x^2-9}$$

En los problemas del 12 al 16 hallar  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $f \circ f$  y  $g \circ g$ , con sus respectivos dominios.

$$12. f(x) = x^2 - 1, g(x) = \sqrt{x}$$

$$13. f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x-4}$$

$$14. f(x) = x^2 - x, g(x) = \frac{1}{x}$$

$$15. f(x) = \frac{1}{1-x}, g(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$16. f(x) = \sqrt{x^2 - 1}, g(x) = \sqrt{1-x}$$

En los problemas 17 y 18 hallar  $f \circ g \circ h$ .

$$17. f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \frac{1}{x}, h(x) = x^2 - 1 \quad 18. f(x) = \sqrt[3]{x}, g(x) = \frac{x}{1+x}, h(x) = x^2 - x$$

$$19. \text{ Si } f(x) = \frac{1}{1-x}, \text{ hallar, con su respectivo dominio, } f \circ f \circ f.$$

En los problemas del 20 al 23 hallar dos funciones  $f$  y  $g$  tales que  $F = f \circ g$ .

$$20. F(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$21. F(x) = -3 + \sqrt{x}$$

$$22. F(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$$

$$23. F(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

En los problemas 24, 25 y 26 hallar  $f, g$  y  $h$  tales que  $F = f \circ g \circ h$ .

$$24. F(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$25. F(x) = \sqrt[3]{x^2 + |x| + 1}$$

$$26. F(x) = \sqrt[4]{\sqrt{x} - 1}$$

$$27. \text{ Si } f(x) = 2x + 3 \text{ y } h(x) = 2x^2 - 4x + 5, \text{ hallar una función } g \text{ tal que } f \circ g = h.$$

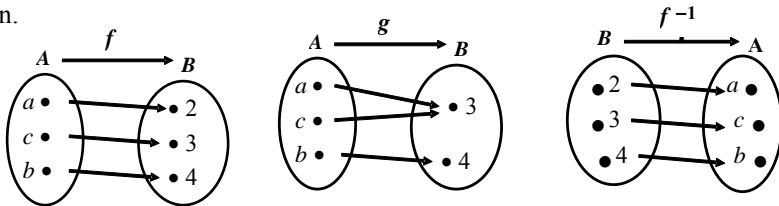
$$28. \text{ Si } f(x) = x - 3 \text{ y } h(x) = \frac{1}{x-2}, \text{ hallar una función } g \text{ tal que } g \circ f = h.$$

## SECCION 4.4

### FUNCION INVERSA

Sea  $f: A \rightarrow B$  una función con dominio  $A$  y rango  $B$ .  $f$  asigna a cada elemento  $x$  de  $A$  un único elemento  $y$  de  $B$ . En caso de ser posible, queremos invertir a  $f$ ; es decir, a cada  $y$  de  $B$  regresararlo, sin ambigüedad, al elemento  $x$  de  $A$  de donde provino. A esta nueva función, con dominio  $B$  y rango  $A$ , se la llama función inversa de  $f$  y se denota por  $f^{-1}$ .

No todas las funciones tienen inversa. Así, de las dos funciones  $f$  y  $g$  dadas a continuación, sólo  $f$  tiene inversa. La función  $g$  no la tiene debido a que el elemento 3 proviene de dos elementos de  $A$ ,  $a$  y  $c$ . La función inversa de  $g$  tendría que asignar estos dos elementos a 3, pero esto no es posible porque viola la definición de función.

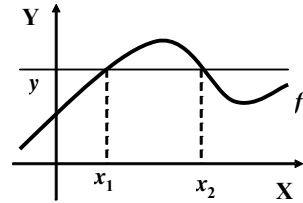


Las funciones, como  $f$ , que elementos distintos del dominio asignan valores distintos del rango, se llaman funciones inyectivas.

**DEFINICION.** Una función  $f: A \rightarrow B$  es **inyectiva** o **función uno a uno** si  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Es decir, si a elementos distintos del dominio, son asignados elementos distintos del rango.

Para determinar si una función real de variable real  $f$  es inyectiva contamos con el criterio de la recta horizontal, que es similar al criterio de la recta vertical usado para determinar si el gráfico de una ecuación corresponde al gráfico de una función.



Si una recta horizontal corta al gráfico de  $f$  en dos puntos, como indica la figura, entonces existen dos puntos  $x_1$  y  $x_2$  del dominio de  $f$  tales que  $y = f(x_1) = f(x_2)$ . Esto implica que  $f$  no es inyectiva. Esta deducción nos ilustra el criterio antes mencionado:

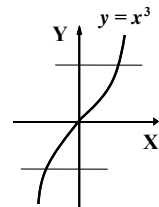
**CRITERIO DE LA RECTA HORIZONTAL.**

Una función real de variable real  $f$  es inyectiva si y sólo si toda recta horizontal corta al gráfico de  $f$  a lo más en un punto.

**EJEMPLO 1.** Mostrar que la función  $f(x) = x^3$  es inyectiva.

**Solución**

Toda recta horizontal corta al gráfico de  $f(x) = x^3$  exactamente en un punto. Luego, el criterio de la recta horizontal nos dice que esta función es inyectiva.

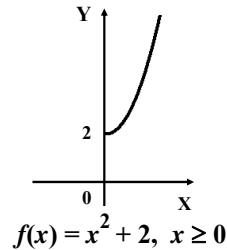
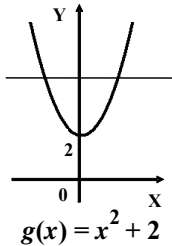


**EJEMPLO 2.** a. Mostrar que la función  $g(x) = x^2 + 2$  no es inyectiva.

b. Restringir el dominio de  $g$  para obtener una nueva función  $f$  que sea inyectiva.

**Solución**

- a. Aplicando el criterio de la recta horizontal vemos que existen rectas horizontales que cortan al gráfico de  $g(x) = x^2 + 2$  en más de un punto.
- b. Sea  $f$  la restricción de  $g$  a  $[0, +\infty)$ . Esto es,  $f(x) = x^2 + 2$ , con  $x \geq 0$ . Esta función es inyectiva



**EJEMPLO 3.** Si  $f$  es monótona, entonces  $f$  es inyectiva.

Si  $f$  monótona, sea si es  $f$  creciente o decreciente, entonces toda recta horizontal cortará al gráfico de  $f$  a lo más una vez. Luego, el criterio de la recta horizontal nos asegura que  $f$  es inyectiva.

**DEFINICION.** Sea  $f: A \rightarrow B$  una función inyectiva de dominio  $A$  y rango  $B$ . Se llama **función inversa de  $f$**  a la función

$$f^{-1}: B \rightarrow A \text{ tal que}$$

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x) \quad (1)$$

La expresión (1) anterior es equivalente a

$$f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in A \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in B \quad (2)$$

En efecto, si en  $x = f^{-1}(y)$  reemplazamos  $y = f(x)$ , obtenemos  $x = f^{-1}(f(x))$ .

Similarmente, si en  $y = f(x)$ , reemplazamos  $x = f^{-1}(y)$ , obtenemos  $y = f(f^{-1}(y))$ .

**OBSERVACION.** No confundir  $f^{-1}(y)$ , con el cociente  $\frac{1}{f(x)}$ . Para evitar

ambigüedades, al cociente lo escribiremos así:  $[f(x)]^{-1}$

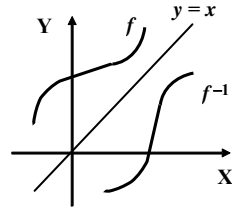
### ESTRATEGIA PARA HALLAR LA INVERSA DE UNA FUNCION

**Paso 1.** Resolver la ecuación  $y = f(x)$  para  $x$  en términos de  $y$ :  $x = f^{-1}(y)$ .

**Paso 2.** En  $x = f^{-1}(y)$ , intercambiar  $x$  por  $y$  para obtener, finalmente,  $y = f^{-1}(x)$ .

**GRAFICA DE LA FUNCION INVERSA.**

En vista del paso 2 donde se intercambia a  $x$  por  $y$ , la gráfica de la función inversa se obtiene reflejando la gráfica de  $y = f(x)$  en la diagonal  $y = x$ .



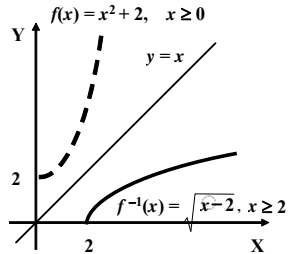
**EJEMPLO 4.** Hallar la función inversa de  $f(x) = x^2 + 2, x \geq 0$ . Graficarla.

**Solución**

**Paso 1.**  $y = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = y - 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y - 2}$

Como  $x \geq 0$ , tenemos  $x = \sqrt{y - 2}$

**Paso 2.** En  $x = \sqrt{y - 2}$  intercambiamos  $x$  por  $y$  obtenemos:  $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2}, x \geq 2$



**EJEMPLO 5.** Sea la función  $g(x) = \frac{4x + 7}{2x + 5}$ .

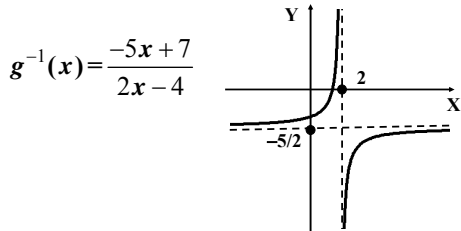
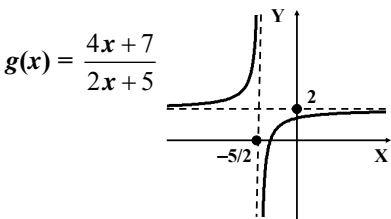
- a. Hallar el dominio de  $g$ .
- b. Hallar la función inversa  $g^{-1}$ .

**Solución**

a. Debemos tener que  $2x + 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5/2$ . Luego,  $\text{Dom}(g) = \{ x / x \neq -5/2 \}$

**b. Paso 1.**  $y = \frac{4x + 7}{2x + 5} \Rightarrow 2xy + 5y = 4x + 7 \Rightarrow 2xy - 4x = -5y + 7$   
 $\Rightarrow x(2y - 4) = -5y + 7 \Rightarrow x = \frac{-5y + 7}{2y - 4}, y \neq 2$

**Paso 2.** Intercambiamos  $x$  por  $y$  obtenemos:  $g^{-1}(x) = \frac{-5x + 7}{2x - 4}, x \neq 2$



Teniendo en cuenta que la gráfica de  $f^{-1}$  se obtiene reflejando en la diagonal principal la gráfica de  $f$ , se deduce los siguientes resultados:

- a. Si  $f$  es creciente, entonces  $f^{-1}$  es creciente.
- b. Si  $f$  es decreciente, entonces  $f^{-1}$  es decreciente

## PROBLEMAS PROPUESTOS 4.4

*Hallar la función inversa de cada una de las siguientes funciones. Graficarla.*

1.  $f(x) = 2x + 1$
2.  $g(x) = x^2 - 1, x \geq 0$
3.  $h(x) = x^3 + 2$
4.  $k(x) = \frac{1}{x} - 1$
5.  $f(x) = \sqrt{16 - 2x}$
6.  $g(x) = \frac{5x - 15}{3x + 7}$
7. Probar formalmente que:
  - a. Si  $f$  es creciente, entonces  $f^{-1}$  es creciente.
  - b. Si  $f$  es decreciente, entonces  $f^{-1}$  es decreciente

### SECCION 4.5

## FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

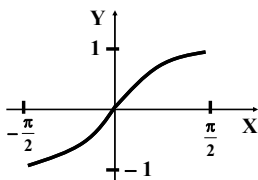
Las funciones trigonométricas no son inyectivas. Restringiremos el dominio de cada una de ellas para conseguir esta propiedad y, de este modo, lograr una función inversa. Estas funciones restringidas y sus respectivas inversas las presentamos a continuación.

### FUNCION SENO INVERSA O ARCOSEN

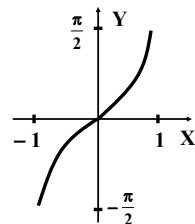
$$\text{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\text{sen}^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

$$y = \text{sen}^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \text{sen } y, \quad -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$$



$$y = \text{sen } x$$



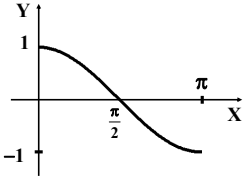
$$y = \text{sen}^{-1} x$$

**FUNCION COSENO INVERSA O ARCCOS**

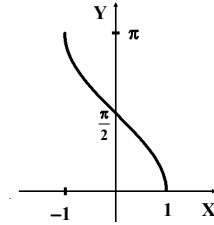
$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

$\cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

$y = \cos^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \cos y, \quad 0 \leq y \leq \pi$



$y = \cos x$



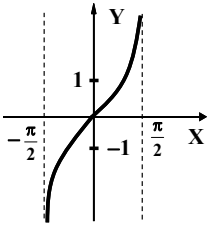
$y = \cos^{-1} x$

**FUNCION TANGENTE INVERSA O ARCTAN**

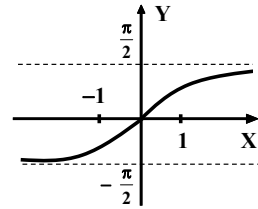
$\tan : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$

$\tan^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$

$y = \tan^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \tan y, \quad -\pi/2 < y < \pi/2$



$y = \tan x$



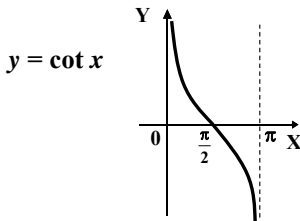
$y = \tan^{-1} x$

**FUNCION COTANGENTE INVERSA O ARCCOT**

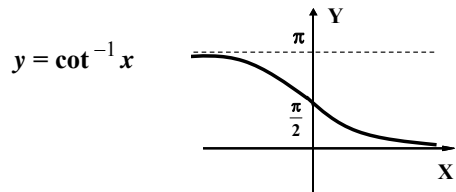
$\cot : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$

$\cot^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$

$y = \cot^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \cot y, \quad 0 < y < \pi$



$y = \cot x$

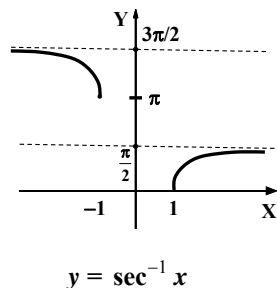
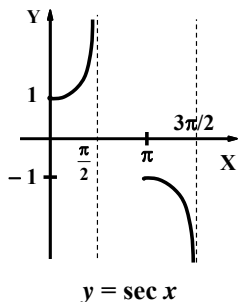


$y = \cot^{-1} x$

### FUNCION SECANTE INVERSA O ARCSEC

$$\sec: [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2) \rightarrow \mathbb{R} - (-1, 1) \quad \sec^{-1}: \mathbb{R} - (-1, 1) \rightarrow [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$$

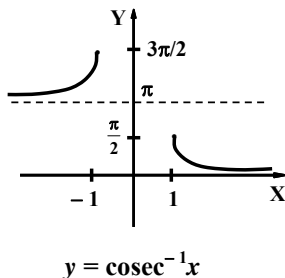
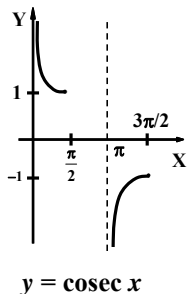
$$y = \sec^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \sec y, \quad 0 \leq y < \pi/2 \quad \text{ó} \quad \pi \leq y < 3\pi/2$$



### LA FUNCION COSECANTE INVERSA O ARCCOSEC

$$\text{cosec}: (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2] \rightarrow \mathbb{R} - (-1, 1). \quad \text{cosec}^{-1}: \mathbb{R} - (-1, 1) \rightarrow (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2]$$

$$y = \text{cosec}^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \text{cosec } y, \quad 0 < y \leq \pi/2 \quad \text{ó} \quad \pi < y \leq 3\pi/2$$



**OBSERVACION.** Algunos autores restringen la secante a  $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$  en

lugar de  $[0, \pi/2\pi[ \cup ] , 3\pi/2)$ , como lo hemos hecho nosotros. La escogencia nuestra tiene la ventaja que simplifica la fórmula de la derivada de la función  $y = \sec^{-1} x$ , ya que evita la aparición de un valor absoluto. Sucede un caso similar para la cosecante.

#### EJEMPLO 1.

$$\text{a. } \sec^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad \text{ya que } \sec \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$$

b.  $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$ , ya que  $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  y  $0 \leq \frac{3\pi}{4} \leq \pi$

c.  $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ , ya que  $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$  y  $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

d.  $\cot^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$ , ya que  $\cot\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$  y  $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{6} < \pi$

e.  $\operatorname{cosec}^{-1}(2) = \frac{\pi}{6}$ , ya que  $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$  y  $0 < \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$

## PROBLEMAS RESUELTOS 4.5

**PROBLEMA 1.** Hallar a.  $\sin\left(\tan^{-1}(1/2)\right)$       b.  $\tan\left(\sec^{-1}(-5/3)\right)$

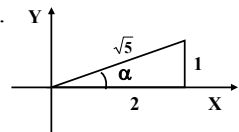
**Solución**

a. Sea  $\alpha = \tan^{-1}(1/2)$ . Luego,  $\tan \alpha = 1/2$ , y  $0 < \alpha < \pi/2$ .

Con estos valores, tomando en cuenta la definición de  $\tan \alpha$ , construimos el triángulo rectángulo adjunto.

Vemos que:

$$\sin\left(\tan^{-1}(1/2)\right) = \sin \alpha = 1/\sqrt{5}$$

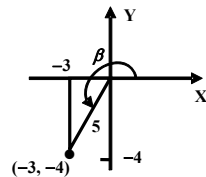


b. Sea  $\beta = \sec^{-1}(-5/3)$ .

Luego,  $\sec \beta = -5/3$  y  $\pi \leq \beta < 3\pi/2$ .

Ahora,

$$\tan\left(\sec^{-1}(-5/3)\right) = \tan \beta = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$



**PROBLEMA 2.** Si  $-1 \leq x \leq 1$ , expresar en términos de  $x$ :

a.  $\cot(\sin^{-1}x)$

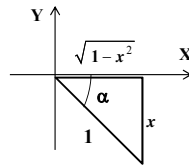
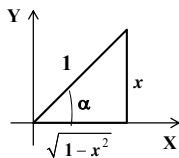
b.  $\sec(\sin^{-1}x)$

**Solución**

Sea  $\alpha = \sin^{-1}x$ . Luego,  $\sin \alpha = x$ , donde  $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$

Observando que  $\sin \alpha = \frac{x}{1}$ , construimos el primer triángulo rectángulo si  $x > 0$  ó el segundo, si  $x < 0$ . Allí,  $x$  corresponde al cateto opuesto y 1 a la hipotenusa. El otro cateto, aplicando el teorema de Pitágoras, es  $\pm \sqrt{1-x^2}$ . De estos dos valores,

tomamos el positivo:  $\sqrt{1-x^2}$ , porque esta raíz corresponde a  $\cos \alpha$  y  $\cos \alpha > 0$  cuando  $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ .



Ahora,

a.  $\cot(\sin^{-1}x) = \cot \alpha = \sqrt{1-x^2}/x$ , si  $x \neq 0$  ó  $\cot(\sin^{-1}x) = 0$ , si  $x = 0$

b.  $\sec(\sin^{-1}x) = \sec \alpha = 1/\sqrt{1-x^2}$

**PROBLEMA 3.** Hallar, sin calculadora, el valor de

$$\sin[\cot^{-1}(-5/12) - \cos^{-1}(3/5)]$$

**Solución**

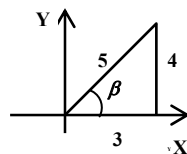
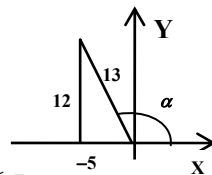
Sea  $\alpha = \cot^{-1}(-5/12)$ . Luego,  $\cot \alpha = -5/12$  y  $\pi/2 < \alpha < \pi$

Sea  $\beta = \cos^{-1}(3/5)$ . Luego,  $\cos \beta = 3/5$  y  $0 < \beta < \pi/2$

Ahora,

$$\sin[\cot^{-1}(-5/12) - \cos^{-1}(3/5)]$$

$$= \sin[\alpha - \beta] = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} - \frac{-5}{13} \cdot \frac{4}{5} = \frac{56}{65}$$



**PROBLEMA 4.** Resolver la ecuación  $\tan^{-1}(2x-3) = 1$

**Solución**

$$\tan^{-1}(2x-3) = 1 \Leftrightarrow 2x-3 = \tan(1)$$

Mediante una calculadora hallamos que  $\tan(1) = 1.5574077$ . Luego,

$$2x-3 = 1.5574077 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(1.5574077 + 3) = 2.787038$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 4.5

En los problemas del 1 al 9 evaluar las expresiones indicadas sin usar calculadora.

1.  $\sin^{-1}(\sqrt{3}/2)$

2.  $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$

3.  $\cos^{-1}(-1)$

4.  $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$                       5.  $\cot^{-1}(-1)$                       6.  $\operatorname{cosec}^{-1}(-2)$

7. Dado  $y = \sin^{-1}(1/3)$  hallar el valor exacto de  
 a.  $\cos y$                       b.  $\tan y$                       c.  $\cot y$                       d.  $\sec y$                       e.  $\operatorname{cosec} y$

8. Dado  $y = \sec^{-1}(\sqrt{5}/2)$ , hallar el valor exacto de  
 a.  $\sin y$                       b.  $\cos y$                       c.  $\tan y$                       d.  $\cot y$                       e.  $\operatorname{cosec} y$

9. Dada  $y = \tan^{-1}(-3)$  hallar el valor exacto de  
 a.  $\sin y$                       b.  $\cos y$                       c.  $\cot y$                       d.  $\sec y$                       e.  $\operatorname{cosec} y$

*En los problemas del 10 al 13 hallar el valor exacto de la expresión indicada.*

10.  $\sin(\cos^{-1}(\sqrt{3}/2))$                       11.  $\operatorname{cosec}(\tan^{-1}(-2))$   
 12.  $\sin(\tan^{-1}(-3/4))$                       13.  $\tan(\sin^{-1}(-3/4))$

*En los problemas 14 y 15 hallar el valor exacto de la expresión indicada*

14.  $\sin^{-1}(\cos(-\pi/6))$                       15.  $\tan^{-1}(\tan(4\pi/3))$ .

*En los problemas del 16 al 19 hallar el valor exacto de la expresión indicada.*

16.  $\cos(\sin^{-1}(1/3) + \tan^{-1}(1/3))$                       17.  $\sin(2 \cos(1/3))$   
 18.  $\tan(2 \sin^{-1}(-\sqrt{3}/2))$                       19.  $\cos((1/2) \sin^{-1}(5/13))$

*En los problemas del 20 al 23 hallar las expresiones algebraicas correspondientes*

20.  $\sin(\tan^{-1}(x))$                       21.  $\tan(\sin^{-1}(x))$   
 22.  $\sin(\cos^{-1}(x/2))$                       23.  $\cos((1/2) \cos^{-1}(x))$

*Resolver las siguientes ecuaciones:*

24.  $\sin^{-1}(x/2) = -\frac{1}{2}$                       25.  $\sin^{-1}\sqrt{2x} = \cos^{-1}x$

26.  $\tan^2 x + 9 \tan x - 12 = 0$  y  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

## SECCION 4.6

## FUNCIONES EXPONENCIALES

## LEYES DE LOS EXPONENTES

Recordemos que el conjunto de los números reales está conformado por la unión de dos conjuntos disjuntos: El conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales. Un número real es racional si y sólo si éste tiene una expresión decimal periódica. En cambio, un número real es irracional si y sólo si éste tiene una expresión decimal infinita no periódica.

Queremos definir  $a^x$ , donde  $a$  es un número real positivo y  $x$  es cualquier número real. Para  $x$  racional ya lo hemos hecho. La dificultad aparece cuando  $x$  es irracional. Aquí tenemos que recurrir al concepto de límite, pero este es un concepto que todavía no se ha estudiado. Sin embargo, trataremos de presentar una presentación intuitiva. Veamos, en primer lugar, el caso de  $a^x$ , cuando  $x$  es un racional.

Sea  $a$  un **número real positivo** y  $x$  un **número irracional**.

1. Si  $x = n$ , donde  $n$  es un entero positivo, entonces

$$a^x = a^n = \underbrace{a a \dots a}_n$$

2. Si  $x = 0$ ,  $a^0 = 1$

3. Si  $x = -n$ ,  $n$  es un entero positivo, entonces  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

4. Si  $x = m/n$ , donde  $m$  y  $n$  son enteros positivos, entonces

$$a^x = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

**EJEMPLO 1.**

a.  $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

b.  $4^0 = 1$

c.  $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

d.  $4^{5/2} = \left(4^{1/2}\right)^5 = \left(\sqrt{4}\right)^5 = (2)^5 = 32$

Ahora veamos el significado de  $a^x$  cuando  $x$  es **irracional**. Lo hacemos mediante el caso particular de  $2^\pi$ . El número  $\pi$  es uno de los números irracionales más conocidos, que apareció en la Geometría, en el estudio de la circunferencia.

El número  $\pi$  tiene un desarrollo decimal infinito no periódico. Sus 30 primeras cifras son:

$$\pi = 3.141596253589793238462643383279\dots$$

Considerando esta expansión decimal de  $\pi$  construimos las dos siguientes sucesiones de números racionales:

1) 3.1 3.14 3.141 3.1415 . . . y 2) 3.2, 3.15 3.142 3.1416 . . .

Los términos de la primera sucesión se aproximan a  $\pi$  por la izquierda (menores que  $\pi$ ). Los términos de la segunda sucesión se aproximan a  $\pi$  por la derecha (mayores que  $\pi$ ).

Ahora, las sucesiones anteriores, permiten aproximarnos a  $2^\pi$  por la izquierda y por la derecha, con las siguientes potencias racionales:

$$3.1 < \pi < 3.2 \quad \Rightarrow \quad 2^{3.1} < 2^\pi < 2^{3.2}$$

$$3.14 < \pi < 3.15 \quad \Rightarrow \quad 2^{3.14} < 2^\pi < 2^{3.15}$$

$$3.141 < \pi < 3.142 \quad \Rightarrow \quad 2^{3.141} < 2^\pi < 2^{3.142}$$

$$3.1415 < \pi < 3.1416 \quad \Rightarrow \quad 2^{3.1415} < 2^\pi < 2^{3.1416}$$

Se prueba, haciendo uso de las propiedades básicas de los números reales, que existe un único número real que es mayor que todos los números:

$$2^{3.1} < 2^{3.14} < 2^{3.141} < 2^{3.1415} \dots$$

y menor que los números:

$$\dots 2^{3.1416} < 2^{3.142} < 2^{3.15} < 2^{3.2}$$

A este único real se lo denota por  $2^\pi$ .

Algunas calculadoras nos dicen que

$$2^\pi = 8.824977827$$

Este proceso anterior que nos permitió definir a  $2^\pi$  podemos repetirlo para definir  $a^x$ , donde  $a$  es cualquier número real positivo y  $x$  cualquier número irracional.

El siguiente teorema resume las propiedades de los exponentes. La demostración de estas propiedades, para el caso de exponente racional, no es de gran dificultad. Sin embargo, para el caso de exponentes irracionales, la situación no es simple. Por esta razón, al teorema sólo lo enunciamos, omitiendo la demostración.

**TEOREMA 4.1**    **Leyes de los Exponentes**

Sean  $a$  y  $b$  números reales positivos, y sean  $x$  e  $y$  números reales cualesquiera. Se cumple que:

- |   |                             |                        |
|---|-----------------------------|------------------------|
| 1. $a^0 = 1$                                      | 2. $a^1 = a$                | 3. $a^x a^y = a^{x+y}$ |
| 4. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$                    | 5. $(a^x)^y = a^{xy}$       | 6. $(ab)^x = a^x b^x$  |
| 7. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ | 8. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ |                        |

**EJEMPLO 2.**

$$\text{a. } \frac{3^{3/2}}{\sqrt{3}} = \frac{3^{3/2}}{3^{1/2}} = 3^{(3/2) - (1/2)} = 3^{2/2} = 3$$

$$\text{b. } \left(3^{2/3} \times 3^{1/6}\right)^6 = 3^{(2/3)6} \times 3^{(1/6)6} = 3^4 \times 3^1 = 3^{4+1} = 3^5 = 243$$

**LAS FUNCIONES EXPONENCIALES****DEFINICION.**

Sea  $a$  un número real tal que  $a > 0$  y  $a \neq 1$ . La **función exponencial con base  $a$**  es la función

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

$$f(x) = a^x$$

**EJEMPLO 3.**

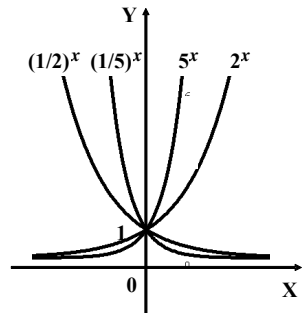
El dibujo adjunto muestra los gráficos de:

$$1. y = 2^x$$

$$2. y = 5^x$$

$$3. y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$$

$$4. y = \left(\frac{1}{5}\right)^x = 5^{-x}$$



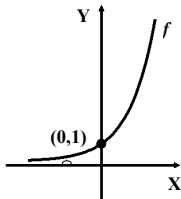
Todas las gráficas pasan por el punto  $(0, 1)$ .

En la definición de la función  $f(x) = a^x$  se ha eliminado la base  $a = 1$  ya que, en este caso,  $f(x) = 1^x = 1$ , es la recta horizontal  $y = 1$ , la cual tiene un comportamiento muy simple y muy distinto a los casos cuando  $a \neq 1$ .

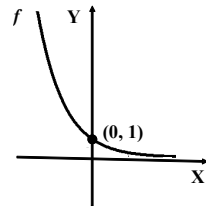
**PROPIEDADES DE LA FUNCION EXPONENCIAL**

La función exponencial  $f(x) = a^x$  tiene las siguientes propiedades:

1. Es **creciente** si  $a > 1$  y es **decreciente** si  $0 < a < 1$ .



$$f(x) = a^x, \text{ donde } a > 1$$



$$f(x) = a^x, \text{ donde } 0 < a < 1$$

2. **Dominio:**  $\mathbb{R}$ , **rango:**  $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ .

3. Es **inyectiva**

4. La gráfica de  $f$  corta al eje Y en  $(0, 1)$ , ya que  $a^0 = 1$ .

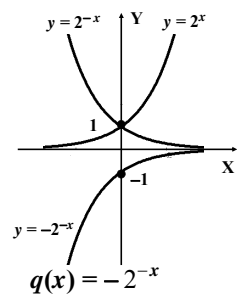
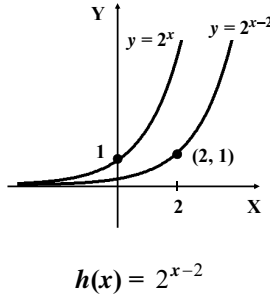
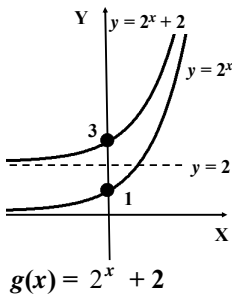
**EJEMPLO 4.**

Mediante la técnica de traslación y reflexión, y teniendo en cuenta el gráfico  $f(x) = 2^x$ , dada en el ejemplo 3, esbozar el gráfico de:

1.  $g(x) = 2^x + 2$       2.  $h(x) = 2^{x-2}$       3.  $q(x) = -2^{-x}$

**Solución**

- Vemos que  $g(x) = 2^x + 2 = f(x) + 2$ . Luego, el gráfico de  $g(x) = 2^x + 2$  se obtiene trasladando verticalmente el gráfico de  $f(x) = 2^x$  2 unidades hacia arriba.
- Vemos que  $h(x) = 2^{x-2} = f(x-2)$ . Luego, el gráfico de  $h(x) = 2^{x-2}$  se obtiene trasladando horizontalmente 2 unidades hacia la derecha el gráfico de  $f(x) = 2^x$ .
- Vemos que  $q(x) = -2^{-x} = -f(-x)$ . Luego, el gráfico de  $q(x)$  se obtiene en dos pasos. Se refleja la gráfica de  $f$  en el eje Y. Luego, este se refleja en el eje X.



**EL NUMERO  $e$**

Se demuestra que los números irracionales son más abundantes que los racionales. Sin duda, este es un resultado que choca con nuestra intuición.

Existen dos números irracionales famosos: El número  $\pi$  y el numero  $e$ . El primero juega un papel fundamental en la Geometría y en la Trigonometría y el segundo, en el Cálculo. A esta alturas, sin contar en nuestro haber con el concepto límite, no podemos dar una formulación precisa del número  $e$ . Por ahora sólo diremos que un número irracional cuyas 21 primeras cifras de su expresión decimal, son

$$e \approx 2.71828182845904523536 \dots$$

El nombre de  $e$  para este número fue dado por Leonardo Euler, probablemente por ser la primera letra de la palabra exponencial.

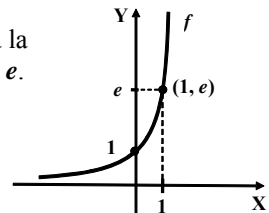
**LA FUNCION EXPONENCIAL NATURAL**

**DEFINICION.**

Se llama **función exponencial natural** a la función exponencial con base el número  $e$ . Esto es, a la función

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = e^x$$

Como  $e > 1$ , la función exponencial natural es creciente.



## PROBLEMAS RESUELTOS 4.6

**PROBLEMA 1.** Simplificar las siguientes expresiones:

$$\text{a. } \frac{e^{3/2}}{\sqrt{e}} \qquad \text{b. } \left[ \frac{1}{8} (8^{2/3}) \right]^3 \qquad \text{c. } \frac{(9^{4/5})^{5/8}}{\left( \frac{8}{27} \right)^{2/3}}$$

**Solución**

$$\text{a. } \frac{e^{3/2}}{\sqrt{e}} = \frac{e^{3/2}}{e^{1/2}} = e^{3/2 - 1/2} = e^{2/2} = e$$

$$\text{b. } \left[ \frac{1}{8} (8^{2/3}) \right]^3 = \left( \frac{1}{8} \right)^3 (8^{2/3})^3 = \left( \frac{1^3}{8^3} \right) (8^2) = \frac{8^2}{8^3} = \frac{1}{8}$$

$$\text{c. } \frac{(9^{4/5})^{5/8}}{\left( \frac{8}{27} \right)^{2/3}} = \frac{9^{20/40}}{\left( \frac{2^3}{3^3} \right)^{2/3}} = \frac{9^{1/2}}{\frac{2^{(3)(2/3)}}{3^{(3)(2/3)}}} = \frac{3}{\frac{2^2}{3^2}} = \frac{3(3^2)}{2^2} = \frac{27}{4}$$

**PROBLEMA 2.** Si  $h(x) = 3^{5x}$ , hallar  $x$  tal que  $h(x) = 81$ .

**Solución**

Como  $81 = 3^4$ , debemos hallar el  $x$  tal que  $3^{5x} = 3^4$ . Igualando los exponentes:

$$5x = 4 \Rightarrow x = 4/5$$

**PROBLEMA 3.** Si  $f(x) = e^{kx}$  y  $f(1) = 3$ , hallar  $f(5)$

**Solución**

Si  $f(1) = 3$ , entonces  $e^k = 3$ . Luego  $f(5) = e^{k(5)} = (e^k)^5 = 3^5 = 243$

**PROBLEMA 4.** Te ofrecen un trabajo que dura exactamente 18 días. Te dan a elegir entre dos formas de pago:

a. 2,500 de dólares al final de los 18 días.

b. 1 céntimo de dólar por el primer día, 2 céntimos por el segundo, 4 céntimos por el tercero y, en general,  $2^{n-1}$  céntimos por el día  $n$ .

¿Cuál de las dos formas de pago te beneficia más?

**Solución**

Te sorprenderá saber que la segunda forma conviene más. En efecto:

El primer día recibe 1 céntimo y el último día ( $n = 18$ ) se recibe  $2^{18-1} = 2^{17}$  céntimos. Si  $S$  es la suma total de todas los céntimos que se reciben, se tiene:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{17} \quad (1)$$

Para hallar esta suma  $S$ , multiplicamos la igualdad anterior por la razón 2:

$$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{18} \quad (2)$$

Restando la igualdad (1) de la (2) obtenemos:

$$S = 2^{18} - 1 = 262,143 \text{ céntimos} = 2,621.43 \text{ dólares.}$$

### PROBLEMAS PROPUESTOS 4.6

*En los ejercicios del 1 al 7 calcular el valor de las expresiones dadas:*

- |                                      |  |                  |                  |
|--------------------------------------|--|------------------|------------------|
| 1. $(81)^{1/4}$                      | 2. $8^{4/3}$                           | 3. $(25)^{3/2}$  | 4. $(25)^{-3/2}$ |
| 5. $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2/3}$ | 6. $\left(\frac{27}{16}\right)^{-1/2}$ | 7. $(0,01)^{-1}$ |                  |

*En los ejercicios del 8 al 13 simplificar las expresiones dadas:*

- |  |                                       |  |
|--|---------------------------------------|--|
| 8. $\left(\frac{e^7}{e^3}\right)^{-1}$ | 9. $\frac{3^3 3^5}{(3^4)^3}$          | 10. $\frac{5^{1/2} (5^{1/2})^5}{5^4}$              |
| 11. $\frac{2^{-3} 2^5}{(2^4)^{-3}}$    | 12. $\frac{(2^4)^{1/3}}{16(2^{7/3})}$ | 13. $\frac{(2^{1/3} 3^{2/3})^3}{3^{5/2} 3^{-1/2}}$ |

*En los ejercicios del 14 al 19 resolver las ecuaciones dadas.*

- |                          |   |                          |
|--------------------------|---|--------------------------|
| 14. $2^{2x-1} = 8$       | 15. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 27$ | 16. $8\sqrt[3]{2} = 4^x$ |
| 17. $(3^{2x} 3^2)^4 = 3$ | 18. $e^{-6x+1} = e^3$                     | 19. $e^{x^2-2x} = e^3$   |

En los ejercicios del 20 al 28 esbozar los gráficos de las funciones dadas. En todos ellos, excepto el 25 y 27, use las técnicas de traslación y reflexión.

20.  $y = e^{x+2}$

21.  $y = -2e^x + 1$

22.  $y = e^{-x}$

23.  $y = e^{-x} + 2$

24.  $y = 2 - e^{-x}$

25.  $y = 3^x$

26.  $y = 3^{-x+2}$

27.  $y = 4^x$

28.  $y = -4^{-x-1}$

29. Si  $g(x) = Ae^{-kx}$ ,  $g(0) = 9$  y  $g(2) = 5$ , hallar  $g(6)$ .

30. Si  $h(x) = 30 - Pe^{-kx}$ ,  $h(0) = 10$  y  $h(3) = -30$ , hallar  $h(12)$ .

## SECCION 4.7

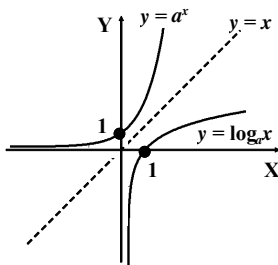
## FUNCIONES LOGARITMICAS

**DEFINICION.**

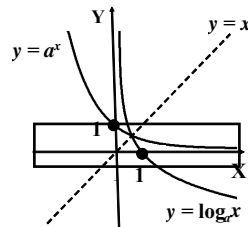
Sea  $a > 0$  y  $a \neq 1$ . Se llama **función logaritmo de base  $a$** , y se denota por  $\log_a$ , a la función inversa de la función exponencial

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) = a^x,$$

$$\text{Esto es, } \log_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \log_a = f^{-1}$$



$$y = \log_a(x), \quad a > 1$$



$$y = \log_a(x), \quad 0 < a < 1$$

Por ser  $y = \log_a(x)$  la función inversa de  $y = a^x$  se tiene que:

$$(1) \quad a^{\log_a(x)} = x \quad \text{y} \quad (2) \quad \log_a(a^x) = x$$

Las propiedades (1) y (2) equivalen a la siguiente proposición:

$$(3) \quad \log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Esta última equivalencia nos dice que  $\log_a(x)$  es el exponente y al cual debe elevar la base  $a$  para obtener el número  $x$ .

Como  $a^1 = a$  y  $a^0 = 1$ , se tiene que:

$$(4) \log_a(a) = 1 \quad \text{y} \quad (5) \log_a(1) = 0$$

Muchas veces escribiremos  $y = \log_a x$  (sin los paréntesis) en lugar de  $\log_a(x)$ .

**EJEMPLO 1**

a.  $\log_4 64 = \log_4(4^3) = 3$

b.  $\log_7 \sqrt{7} = \log_7(7^{1/2}) = \frac{1}{2}$

c.  $\log_5\left(\frac{1}{5}\right) = \log_5(5^{-1}) = -1$

d.  $\log_{10} 0.001 = \log_{10} \frac{1}{1,000} = \log_{10} 10^{-3} = -3$

**PROPIEDADES DE LA FUNCION LOGARITMO**

La función logaritmo  $y = \log_a x$  tiene las siguientes propiedades:

1. Es creciente si  $a > 1$  y decreciente si  $0 < a < 1$ .
2. Dominio =  $\mathbb{R}^+$ , rango =  $\mathbb{R}$ .
3. Es biyectiva.
4. La gráfica de  $y = \log_a x$  corta al eje X en  $(1, 0)$ . No corta al eje Y.

**TEOREMA 4.2**

**Leyes de los Logaritmos**

Si  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $u > 0$ ,  $v > 0$  y  $n$  es un real, entonces

1.  $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$  (Logaritmo de un producto)

2.  $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$  (Logaritmo de un cociente)

3.  $\log_a u^n = n \log_a u$  (Logaritmo de una potencia)

**Demostración**

1. Si  $x = \log_a u$  e  $y = \log_a v$ , entonces

$$u = a^x, v = a^y \quad \text{y} \quad uv = a^x a^y = a^{x+y}$$

Aplicando  $\log_a$  a la última igualdad y usando la propiedad (2) de la definición de la función logaritmo:

$$\log_a(uv) = \log_a(a^{x+y}) = x + y = \log_a u + \log_a v$$

Las pruebas de 2 y 3 son similares a la dada para 1, y se dejan como ejercicios.

**EJEMPLO 2.** Sean  $x, y, z$  números reales positivos. Expresar en términos de los logaritmos de  $x, y, z$  las siguientes expresiones:

$$\text{i. } \log_a \left( \frac{x^4 \sqrt{z}}{y^3} \right) \qquad \text{ii. } \log_a \sqrt[7]{\frac{x^2}{y^3 z^4}}$$

**Solución**

$$\text{i. } \log_a \left( \frac{x^4 \sqrt{z}}{y^3} \right) = \log_a \left( \frac{x^4 z^{1/2}}{y^3} \right) = \log_a (x^4 z^{1/2}) - \log_a y^3 \quad (\text{por 2})$$

$$= \log_a x^4 + \log_a z^{1/2} - \log_a y^3 \quad (\text{por 1})$$

$$= 4 \log_a x + \frac{1}{2} \log_a z - 3 \log_a y \quad (\text{por 3})$$

$$\text{ii. } \log_a \sqrt[7]{\frac{x^2}{y^3 z^4}} = \log_a \left( \frac{x^2}{y^3 z^4} \right)^{1/7} = \frac{1}{7} \log_a \left( \frac{x^2}{y^3 z^4} \right) \quad (\text{por 3})$$

$$= \frac{1}{7} \left[ \log_a x^2 - \log_a (y^3 z^4) \right] \quad (\text{por 2})$$

$$= \frac{1}{7} \left[ \log_a x^2 - \log_a y^3 - \log_a z^4 \right] \quad (\text{por 1})$$

$$= \frac{2}{7} \log_a x - \frac{3}{7} \log_a y - \frac{4}{7} \log_a z \quad (\text{por 3})$$

**EJEMPLO 3** Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\text{a. } 2^{8x-1} = 64 \qquad \text{b. } 2 \log_9(4x) = 1$$

**Solución**

a. Aplicamos  $\log_2$  a ambos miembros:

$$\log_2 (2^{8x-1}) = \log_2 64 \Rightarrow \log_2 (2^{8x-1}) = \log_2 (2^6) \Rightarrow$$

$$(8x-1) \log_2 2 = 6 \log_2 2 \Rightarrow 8x-1 = 6 \Rightarrow x = \frac{7}{8}$$

$$\text{b. } 2 \log_9(4x) = 1 \Rightarrow \log_9(4x) = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x = 9^{1/2} \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

### LA FUNCION LOGARITMO NATURAL

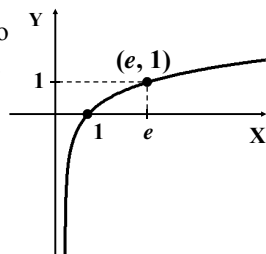
La función **logaritmo natural** es la función logaritmo con base  $e$ . A esta función se lo denota por  $y = \ln x$ . O sea,

$$\ln x = \log_e x$$

La función  $y = \ln x$  es la inversa de la función exponencial  $y = e^x$ . Por lo tanto:

$$(1) e^{\ln x} = x \quad \text{y} \quad (2) \ln e^x = x$$

o, equivalentemente,



$$(3) \quad y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x$$

Como  $e^1 = e$ , tenemos que  $\ln e = 1$

**EJEMPLO 4.** Resolver la ecuación  $3^{2x+1} = 5^{3x-1}$

**Solución**

A ambos miembros de la ecuación aplicamos  $\ln$ :

$$\begin{aligned} \ln 3^{2x+1} &= \ln 5^{3x-1} \Rightarrow (2x+1) \ln 3 = (3x-1) \ln 5 \Rightarrow \\ 2x \ln 3 + \ln 3 &= 3x \ln 5 - \ln 5 \Rightarrow 2x \ln 3 - 3x \ln 5 = -\ln 5 - \ln 3 \\ &\Rightarrow x(2 \ln 3 - 3 \ln 5) = -(\ln 5 + \ln 3) \\ &\Rightarrow x = -\frac{\ln 5 + \ln 3}{2 \ln 3 - 3 \ln 5} \approx 1.03 \end{aligned}$$

**OBSERVACION.** Los logaritmos más usuales son los naturales (base  $e$ ) y los decimales (base 10). Tratándose de los logaritmos decimales, es común omitir la base y escribir, simplemente,  $\log x$  en lugar de  $\log_{10} x$ .

**CAMBIO DE BASE LOGARITMICA Y EXPONENCIAL**

La siguiente igualdad nos permite expresar una función logarítmica de cualquier base en términos de la función logaritmo natural.

**TEOREMA 4.3** Cambio de Base Logarítmica.

Si  $x > 0$  entonces

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

**Demostración**

$$\begin{aligned} y = \log_a x \Rightarrow a^y &= x \Rightarrow \ln a^y = \ln x \Rightarrow y \ln a = \ln x \\ \Rightarrow y &= \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \end{aligned}$$

**COROLARIO.**

$$\log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

**Demostración**

En la fórmula del teorema tomar  $x = e$ . Considerar que  $\ln e = 1$ .

**EJEMPLO 5.** Hallar: a.  $\log_5 e$  b.  $\log_4 19$

**Solución**

a. De acuerdo al corolario:

$$\log_5 e = \frac{1}{\ln 5} = \frac{1}{1.6094379} = 0.609437912$$

b. De acuerdo al teorema anterior:

$$\log_4 19 = \frac{\ln 19}{\ln 4} = \frac{2.944438979}{1.386294361} = 2.123963757$$

**TEOREMA 4.4** Cambio de base Exponencial.

Si  $a > 0$  y  $a \neq 1$ , entonces

$$a^x = e^{x \ln a}$$

**Demostración**

Sabemos que  $a = e^{\ln a}$ . Luego,  $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$

**¿SABIAS QUE . . .**

Uno de los famosos matemáticos que estudió las funciones exponenciales fue **Johann Bernoulli** (1627–1748), conocido como el **Arquímedes de su época**. Se planteó el problema de hallar el área bajo la curva

$$y = x^x, \text{ desde } x=0 \text{ a } x=1$$



**Johann Bernoulli**

Usando la identidad  $x^x = e^{x \ln x}$  encontró que esa área se podía representar mediante la serie

$$\frac{1}{1^1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^n} \dots$$

Su padre, sus hermanos, sus hijos y sus nietos conforman una brillante cadena de matemáticos notables. Al final de esta sección describiremos, con más detalles, a esta dinastía.

**PROBLEMAS RESUELTOS 4.7**

**PROBLEMA 1.** Resolver las siguientes ecuaciones:

a.  $\log_{27} 4x = 2/3$

b.  $3^{2x-1} = 81$

**Solución**

a.  $\log_{27} 4x = 2/3 \Rightarrow 4x = 27^{2/3} \Rightarrow 4x = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9 \Rightarrow x = 9/4$

b. Tomando  $\log_3$  a ambos lados de la ecuación:

$$\log_3 3^{2x-1} = \log_3 81 \Rightarrow 2x - 1 = \log_3 (3^4) \Rightarrow 2x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5/2$$

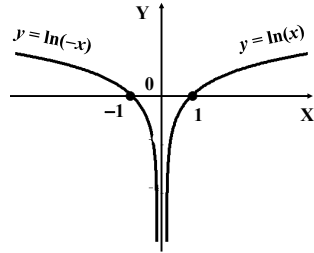
**PROBLEMA 2.** Graficar la función  $y = \ln |x|$ .

**Solución**

De la definición de  $|x|$  tenemos que:

$$y = \ln |x| = \begin{cases} \ln x, & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En consecuencia, el gráfico de  $y = \ln |x|$



se compone de dos gráficos: El de  $y = \ln x, x > 0$  y el de  $y = \ln(-x), x < 0$ . Al primero lo conocemos y el segundo se obtiene del primero reflejándolo en el eje Y.

## PROBLEMAS PROPUESTOS 4.7

*En los ejercicios del 1 al 8 calcular el valor de la expresión, sin usar tablas ni calculadora.*

1.  $\log_2 \left( \frac{1}{64} \right)$

2.  $\log_{1/2} \left( \frac{1}{16} \right)$

3.  $\log_{1/3} (81)$

4.  $\log_{100} (0,1)$

5.  $e^{\ln 3}$

6.  $e^{2\ln 3}$

7.  $e^{(\ln 3)/2}$

8.  $e^{3\ln 2 - 2\ln 3}$

*En los ejercicios del 9 al 19, resolver la ecuación dada.*

9.  $\log_x (25) = \frac{1}{2}$

10.  $\log_4 (x^2 - 6x) = 2$

11.  $\log x + \log (2x - 8) = 1$

12.  $-3\ln x = a$

13.  $\frac{k}{20} - \ln x = 1$

14.  $4 \ln x = \frac{1}{2} \ln x + 7$

15.  $3 \ln (\ln x) = -12$

16.  $3e^{-1.2x} = 14$

17.  $3^{x-1} = e^3$

18.  $3^x 2^{3x} = 64$

19.  $(3^x)^2 = 16 \sqrt{2^x}$

En los problemas del 20 al 27 usar las técnicas de graficación (traslaciones y reflexiones) para bosquejar la gráfica de las funciones indicadas.

20.  $y = \ln(x - 2)$

21.  $y = \ln(-x)$

22.  $y = \ln(x + 3)$

23.  $y = 4 - \ln x$

24.  $y = 4 - \ln(x + 3)$

25.  $y = 2 - \ln|x|$

26.  $y = 3 + \log x$

27.  $y = 3 + \log(x + 3)$

En los problemas del 28 al 31 escribir la expresión indicada en términos de los logaritmos de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

28.  $\log \frac{a^2 b}{c}$

29.  $\log \frac{\sqrt{b}}{a^2 c^3}$

30.  $\ln \left( \frac{1}{a} \sqrt{\frac{c^3}{b}} \right)$

31.  $\ln^5 \sqrt{\frac{a^2}{bc^4}}$

En los problemas del 32 al 34 escribir la expresión dada como un solo logaritmo de coeficiente 1.

32.  $3 \ln x + \ln y - 2 \ln z$

33.  $2 \log a + \log b - 3(\log z + \log x)$

34.  $\frac{3}{4} \ln a + 3 \ln b - \frac{3}{2} \ln c$

35. Expresar cada una de las siguientes funciones en la forma  $y = Ae^{kt}$ :

a.  $y = (5)3^{0.5t}$

b.  $y = 6(1.04)^t$

## SECCION 4.8

### APLICACIONES DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

Algunos fenómenos de las ciencias naturales, ciencias sociales y ciencias económicas son modelados mediante las funciones exponenciales o logarítmicas. Veamos algunos casos simples, como el crecimiento de poblaciones y decaimiento radioactivo.

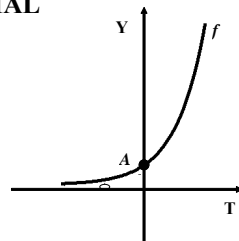
#### CRECIMIENTO ESPONENCIAL

Sea  $f(t)$  una función donde la variable independiente  $t$  representa al tiempo. Se dice que  $f(t)$  crece exponencialmente, si se cumple que:

$$f(t) = A a^{kt},$$

donde  $a > 1$ ,  $A$  y  $k$  son constantes positivas.

Observar que  $f$  es creciente y que  $f(0) = A$ .



**EJEMPLO 1.** Se sabe que una población de bacterias se triplica cada minuto. Se inicia un cultivo con una población de 50 bacterias

- a. Hallar la ecuación de crecimiento de la población
- b. ¿Cuántas bacterias se tiene después de un cuarto de hora?

**Solución**

a. Se  $t$  el número de minutos transcurridos desde el inicio del cultivo.

Al inicio, cuando  $t = 0$ , se tiene:  $f(0) = 50$

Después de un minuto, se tiene:  $f(1) = f(1) = 50(3)$

Después de dos minutos, se tiene:  $f(2) = 50(3)(3) = 50(3^2)$

Después de tres minutos, se tiene:  $f(3) = 50(3^2)(3) = 50(3^3)$

En general, después de  $t$  minutos, se tiene:  $f(t) = 50(3^t)$

b. Después de un cuarto hora, o sea cuando  $t = 15$ , se tiene:

$$f(15) = 50(3^{15}) \approx 717,445,350 \text{ bacterias.}$$

**DECAIMIENTO EXPONENCIAL**

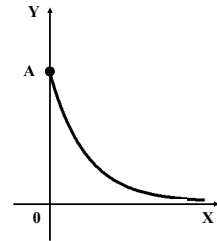
Una cantidad  $f(t)$  decae exponencialmente si se cumple que:

$$f(t) = Aa^{-kt}$$

donde  $a > 1$ ,  $A$  y  $k$  son constantes positivas.

Se tiene que  $f(0) = A$  y  $f$  es **decreciente**.

Un fenómeno muy importante que cumple esta condición es la desintegración de un material radioactivo.



Los materiales radioactivos se caracterizan porque se desintegran (decaen) de manera espontánea para transformarse en otro elemento. Experimentalmente se ha comprobado que el decaimiento sigue un modelo exponencial. Si  $N(t)$  es el número de átomos de cierto isótopo radioactivo en un instante  $t$ , entonces

$$N(t) = N_0 e^{-kt}, \quad (1)$$

donde  $N_0 = N(0)$  es el número de átomos en el instante  $t = 0$  y  $k$  es una constante positiva, que depende únicamente del elemento radioactivo. Si  $k$  es grande, el material decae rápidamente. Si  $k$  es pequeño (cercana a 0), el material decae lentamente.

**EJEMPLO 2.** La cantidad  $Q(t)$  de un material radioactivo después de  $t$  años está dada por

$$Q(t) = Ae^{-0.0004t}$$

Después de 2000 años quedan 300 grs. ¿Cuántos gramos había inicialmente?

**Solución**

$$\begin{aligned} \text{Tenemos que } 300 &= Q(2000) = A e^{-0.0004(2000)} = A e^{-0.8} \Rightarrow \\ A &= \frac{300}{e^{-0.8}} = 300 e^{0.8} \approx 667.66 \text{ gramos.} \end{aligned}$$

**DECAIMIENTO RADIOACTIVO Y VIDA MEDIA**

La **vida media** de material radioactivo es el tiempo que tarda cualquier muestra del material en desintegrarse la mitad de ella. Así, se sabe que la vida media del Polonio 210, (un isótopo del Polonio) es de 140 días. Esto significa que, dada cualquier cantidad de esta sustancia, después de 140 días sólo se tiene la mitad de la cantidad inicial.

A continuación presentamos la vida media de algunos elementos radioactivos:

Uranio ( $U^{238}$ )	4,510,000,000 años
Plutonio ( $Pu^{230}$ )	24,360 años
Carbono 14 ( $C^{14}$ )	5,730 años
Radio ( $Ra^{226}$ )	1,620 años
Polonio ( $Po^{210}$ )	140 días.

Veamos cual es la relación entre la vida media y la constante  $k$  que aparece en la función de decaimiento de cierto material radioactivo.

Si  $\lambda$  es la vida media del material radioactivo, transcurrido este tiempo  $\lambda$  debemos tener solamente la mitad de átomos iniciales, es decir,  $N(\lambda) = \frac{1}{2} N_0$ . En consecuencia:

$$N_0 e^{-k\lambda} = \frac{1}{2} N_0 \Rightarrow e^{-k\lambda} = 1/2 \Rightarrow -k\lambda = \ln(1/2) \Rightarrow -k\lambda = \ln 1 - \ln 2$$

$$\Rightarrow -k\lambda = -\ln 2 \Rightarrow k\lambda = \ln 2 \Rightarrow \lambda = (\ln 2)/k$$

Esto es,

$$(2) \quad \lambda = \frac{\ln 2}{k} \quad \text{ó} \quad (3) \quad k = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Si reemplazamos (3) en (1), tenemos la igualdad:

$$N(t) = N_0 e^{-(\ln 2)/\lambda t} \quad (4)$$

**EJEMPLO 3.**

Hallar la vida media del potasio  $^{42}\text{K}$  si este se desintegra de acuerdo a la fórmula

$$Q(t) = Q_0 e^{-0.0555t}, \text{ donde } t \text{ representa horas.}$$

**Solución**

Tenemos que  $k = 0.0555$ . Luego, la vida media es

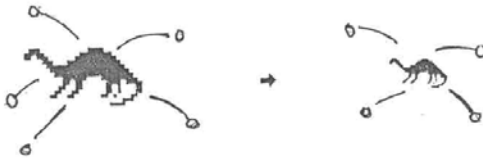
$$\lambda = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0.693147}{0.0555} \approx 12.489 \text{ horas}$$

### FECHADO CON CARBONO 14

El carbono 14 ( $^{14}\text{C}$ ) es un isótopo radioactivo del carbono 12 ( $^{12}\text{C}$ ). Este último no es radioactivo. Los arqueólogos usan  $^{14}\text{C}$  para fechar la antigüedad de restos de materiales orgánicos, como huesos, madera, etc. La vida media del  $^{14}\text{C}$  es de 5,730 años. De acuerdo a (4) su ecuación de desintegración es:

$$N(t) = N_0 e^{-(\ln 2)/5,730 t} \quad (5)$$

Por otro lado, el  $^{14}\text{C}$  se encuentra en la atmósfera en un porcentaje que ha permanecido esencialmente constante desde los inicios del planeta. Los seres vivos, al respirar, ingieren  $^{14}\text{C}$  en el mismo porcentaje que está en la atmósfera. Al morir un organismo, éste deja de ingerir este carbono y el que se encuentra ya metabolizado comienza a desintegrarse. La fecha de la muerte del organismo se determina midiendo la proporción de carbono remanente en los restos.



**EJEMPLO 4.** Las pinturas rupestres de la Cueva de Altamira, España, es uno de los monumentos más famosos que ha dejado el hombre prehistórico europeo. Un estudio de cierto material orgánico utilizado en estas pinturas reveló que éste posee solamente el 29 % de  $^{14}\text{C}$  con respecto de una muestra del material actual. Calcular la edad de las pinturas.

#### Solución

Sea  $t$  la edad de las pinturas. Para resultados prácticos,  $t$  es también tiempo transcurrido desde que murió el organismo dueño del material orgánico. De acuerdo a la ecuación (4),

$$N(t) = N_0 e^{-(\ln 2)/5,730 t}$$

Por otro lado,  $N_0$ , la cantidad de  $^{14}\text{C}$  que tubo el material orgánico cuando murió, es la misma que tiene la muestra actual. Luego,

$$N(t) = 0.29N_0 \Rightarrow N_0 e^{-(\ln 2)/5,730 t} = 0.29N_0 \Rightarrow e^{-(\ln 2)/5,730 t} = 0.29$$

$$\Rightarrow \frac{\ln 2}{5,730} t = \ln 0.29 \Rightarrow t = 5,730 \frac{\ln 0.29}{\ln 2} \Rightarrow t \approx 10,233 \text{ años}$$

### EDAD DEL UNIVERSO

De acuerdo a una teoría cosmológica, cuando el universo nació, en el momento de la “gran explosión” (“Big Bang”), existió la misma cantidad de los isótopos de uranio  $^{235}\text{U}$  y  $^{238}\text{U}$ . A partir de ese entonces la correlación entre estos elementos está cambiando, decayendo más rápidamente el  $^{235}\text{U}$ , ya que la vida media del  $^{235}\text{U}$  es más corta que la del  $^{238}\text{U}$ .

**EJEMPLO 5.** Se ha determinado que en la actualidad existen 137.7 átomos de uranio  $^{238}\text{U}$  por cada átomo de uranio  $^{235}\text{U}$ . Se sabe que la vida media del  $^{238}\text{U}$  es 4.51 millardos de años y la del  $^{235}\text{U}$  es de 0.71 millardos de años. Calcular la edad del universo tomando en cuenta que al inicio de éste había igual cantidad de estos elementos.

#### Solución

Sea  $N_8(t)$  y  $N_5(t)$  el número de átomos de  $^{238}\text{U}$  y de  $^{235}\text{U}$  que existen  $t$  millardos de años después de la gran explosión. De acuerdo a (3), tenemos:

$$N_8(t) = N_0 e^{-kt} \quad \text{y} \quad N_5(t) = N_0 e^{-rt}, \quad (4)$$

donde  $N_0$  es el número de átomos, tanto de  $^{238}\text{U}$  cómo de  $^{235}\text{U}$ , que hubo inicialmente, y

$$k = (\ln 2)/4.51 \quad \text{y} \quad r = (\ln 2)/0.71$$

Como actualmente hay 137.7 átomos de  $^{238}\text{U}$  por cada átomo de  $^{235}\text{U}$ , tenemos:

$$137.7 = \frac{N_8(t)}{N_5(t)} = \frac{N_0 e^{-kt}}{N_0 e^{-rt}} = \frac{e^{-kt}}{e^{-rt}} = e^{(r-k)t} \Rightarrow e^{(r-k)t} = 137.7 \Rightarrow$$

$$(k - r)t = \ln 137.7 \Rightarrow t = \frac{\ln 137.7}{k - r} \Rightarrow$$

$$t = \frac{\ln 137.7}{\frac{\ln 2}{4.51} - \frac{\ln 2}{0.71}} \approx 5.987 \text{ millardos de años.}$$

Luego, la edad del universo es, redondeando, 6 millardos de años.

Cálculos más recientes de dan al universo una edad de 13.7 millardos de años.

### INTERES SIMPLE

Un capital colocado a **interés simple** permanece constante durante toda la operación. El interés ganado no genera interés. Es fácil deducir que:

Un capital  $P$  colocado durante  $t$  años a **interés simple** y a una **tasa anual** de **100r** % produce un monto de:

$$M(t) = P(1 + rt) \quad (1)$$

### INTERES COMPUESTO

En un capital a **interés compuesto**, el interés ganado en cada periodo es agregado al capital, para ganar interés en el próximo periodo; o sea, el interés se capitaliza o se **compone** después de cada periodo. Este periodo puede ser de 1 año (anual), 6 meses (semestral: 2 periodos al año), 3 meses (trimestral: 4 periodos al año), 1 mes (mensual: 12 periodos al año), etc.

Además de la **tasa anual**, se tiene la **tasa periódica**, que es el tanto por ciento por periodo de capitalización. Si el año está dividido en  $n$  periodos iguales, entonces

$$\text{Tasa periódica} = \frac{\text{Tasa anual}}{n}$$

Así, si la tasa anual es de 24 % y el periodo de capitalización es de 3 meses (4 periodos al año) entonces la tasa periódica es de  $\frac{24}{4} \% = 6 \%$ .

Un capital  $P$  que se coloca durante  $t$  años a una tasa de  $100r$  % anual que se capitaliza (se compone)  $n$  veces al año produce un **monto**:

$$M(t) = P \left( 1 + \frac{r}{n} \right)^{nt} \quad (2)$$

### INTERES COMPUESTO CONTINUO

Cuando el número  $n$  de periodos de capitalización crece ilimitadamente; es decir, cuando  $n \rightarrow +\infty$ , se obtiene el **interés compuesto continuo**. Aquí, la capitalización es instantánea y se la denomina **capitalización continua**.

Un **capital  $P$**  colocado durante  $t$  años a un interés anual de  $100r$  % que se capitaliza **continuamente**, produce un **monto** de:

$$M(t) = Pe^{rt} \quad (3)$$

Esta fórmula se obtiene de la anterior tomando límite. Esto se verá más adelante.

**EJEMPLO 6.** Se deposita un capital de 1,000,000 Bs. en un banco que ofrece una tasa de 25 % anual. Calcular el monto después de 2 años si:

- a. El interés es simple.
- b. El interés es compuesto y se capitaliza mensualmente.
- c. El interés es compuesto y se capitaliza continuamente.

**Solución**

a. Se tiene:  $P = 1,000,000$   $r = 0.25$  y  $t = 2$ .

Reemplazando estos valores en la fórmula (1):

$$M(2) = 1,000,000(1 + 0.25(2)) = 1,500,000 \text{ Bs.}$$

- b. Se tiene:  $P = 1,000,000$ ,  $r = 0.25$ ,  $n = 12$ ,  $t = 2$ . Reemplazando estos valores en la fórmula ( 2 ):

$$M(2) = 1.000.000 \left( 1 + \frac{0.25}{12} \right)^{24t} = 1,640,273.33 \text{ Bs.}$$

- c. Se tiene:  $P = 1,000,000$ ,  $r = 0.25$  y  $t = 2$ . Reemplazando estos valores en la fórmula ( 3 ):

$$M(2) = 1,000,000 e^{0.25(2)} = 1,648,721.27 \text{ Bs.}$$

**EJEMPLO 7.** Se invierte cierta cantidad de dinero a una tasa anual de 20 %.

¿En qué tiempo se duplicará este dinero si el interés se compone:

a. Trimestralmente?

b. Continuamente?

### Solución

Sea  $P$  el dinero invertido y  $\lambda$  el tiempo que se necesita para duplicar a  $P$ , o sea el tiempo necesario para obtener un monto de  $2P$ .

- a. La fórmula (2) del monto del interés compuesto con  $n = 4$ ,  $r = 0.2$  y  $t = \lambda$  dice:

$$M(\lambda) = P \left( 1 + \frac{0.2}{4} \right)^{4\lambda} = P(1.05)^{4\lambda}$$

Como este monto  $M(\lambda)$  debe ser  $2P$ , tenemos:

$$\begin{aligned} P(1.05)^{4\lambda} = 2P &\Rightarrow (1.05)^{4\lambda} = 2 \Rightarrow 4\lambda \ln(1.05) = \ln 2 \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{\ln 2}{4 \ln(1.05)} \approx 3.552 \text{ años} \approx 3 \text{ años, 6 meses y 19 días} \end{aligned}$$

- b. La fórmula (3) del monto del interés compuesto continuo con  $r = 0.2$  y  $t = \lambda$  dice:

$$\begin{aligned} Pe^{0.2\lambda} = 2P &\Rightarrow e^{0.2\lambda} = 2 \Rightarrow 0.2\lambda = \ln 2 \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{\ln 2}{0.2} \approx 3.466 \text{ años} \approx 3 \text{ años, 5 meses y 18 días.} \end{aligned}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 4.8

1. **(Población).** La población de una ciudad,  $t$  años después del año 2000, es

$$P(t) = 60,000 e^{0.05t} \text{ habitantes}$$

a. Calcular la población de la ciudad en el año 2015.

b. Hallar el porcentaje anual de crecimiento de la población.

2. **(Depreciación).** El valor de una maquinaria,  $t$  años después de comprada, es

$$V(t) = Ae^{-0.25t}$$

La máquina fue comprada hace 9 años por \$ 150,000

- a. ¿Cuál es su valor actual?
- b. ¿Cuál es el porcentaje anual de declinación de su valor?

3. **(Población).** Se sabe que dentro de  $t$  años la población de cierto país será de

$$P(t) = 18e^{0.02t} \text{ millones de habitantes.}$$

- a. ¿Cuál es la población actual del país?
- b. ¿Cuál será su población dentro de 15 años?
- c. ¿Cuál es el porcentaje anual de crecimiento de la población?

4. **(Crecimiento de bacterias).** Un experimento de crecimiento bacteriológico se inició con 4,000 bacterias. 10 minutos más tarde, se tenían 12,000. Si se supone que el crecimiento es exponencial:  $f(t) = Ae^{kt}$ . ¿Cuántas bacterias se tendrá a los 30 minutos?

5. **(Utilidades).** Las utilidades de una compañía crecen exponencialmente:  $f(t) = Ae^{kt}$ . En 1995 éstas fueron de 3 millones de dólares y en el 2000 fueron de 4.5 millones. ¿Cuáles fueron las utilidades en 2005?

6. **(Desintegración radioactiva).** La cantidad que queda de una sustancia radioactiva después de  $t$  años de desintegración está dada por

$$Q(t) = Ae^{-0.00015t} \text{ gramos}$$

Si al final de 5,000 años quedan 3,000 gramos, ¿Cuántos gramos había inicialmente?

7. **(Desintegración radioactiva).** Una sustancia radioactiva se desintegra exponencialmente:  $f(t) = Ae^{-kt}$ . Inicialmente había 450 gramos y 60 años después había 400 gramos, ¿Cuántos gramos habrá después de 240 años?

8. **(Producto Nacional Bruto).** El producto nacional bruto (P.N.B.) de cierto país,  $t$  años después de 1995, es de  $f(t)$  millones de dólares, donde

$$f(t) = P(10)^{kt}, P \text{ y } k \text{ son constantes}$$

Si en 1995 el P.N.B. fue de 8,000 millones de dólares y en el 2000 fue de 16,000 millones de dólares. ¿Cuál fue el P.N.B. en el año 2010?

9. **(Presión atmosférica).** Se ha determinado que, a la altura de  $h$  pies sobre el nivel del mar, la presión atmosférica es de  $P(h)$  libras por pie cuadrado, donde

$$P(h) = Me^{-0.00003h}, M \text{ es constante}$$

Si la presión atmosférica al nivel del mar es de 2,116 libras por pie cuadrado, hallar la presión atmosférica fuera de un avión que vuela a 12,000 pies de altura.

10. **(Duración de bombillos).** Un fabricante de bombillos encuentra que la fracción  $f(t)$  de bombillos que no se quemen después de  $t$  meses de uso está dada por

$$f(t) = e^{-0.2t}$$

- a. ¿Qué porcentaje de los bombillos dura por lo menos un mes?
- b. ¿Qué porcentaje dura al menos 2 meses?
- c. ¿Qué porcentaje se quema durante el segundo mes?

- 11. (Venta de libros).** Una editorial, estudiando el mercado, ha descubierto que si se distribuyen  $x$  miles de ejemplares gratuitos de un texto, la venta de dicho texto será, aproximadamente,

$$V(x) = 30 - 18e^{-0.3x} \text{ miles de ejemplares}$$

- a. ¿Cuántos textos se venderán si no se han distribuido ejemplares gratuitos?
  - b. ¿Cuántos se venderán si se han regalado 800 ejemplares?
- 12. (Depreciación).** El valor de reventa de una máquina, después de  $t$  años de uso, es:
- a. Bosquejar el gráfico de la función reventa.
  - b. ¿Cuál fue el valor de la máquina cuando era nueva?
  - c. ¿Cuál será el valor de la máquina cuando cumpla 20 años de uso?

$$V(t) = 520e^{-0.15t} + 460 \text{ miles de dólares}$$

- 13. (Desintegración radioactiva).** Si  $Q_0$  es la cantidad inicial de una sustancia radioactiva se desintegra exponencialmente:  $Q(t) = Q_0 e^{-kt}$ . La vida media de la sustancia es de  $\lambda$  unidades de tiempo (años, meses, horas, etc.). Probar que la cantidad remanente después de  $t$  unidades de tiempo es de

$$Q(t) = Q_0 e^{-(\ln 2/\lambda)t}$$

- 14. (Desintegración del radio).** El radio se desintegra exponencialmente y su vida media es de 1,690 años. ¿Cuánto tiempo tardarán 200 gramos de este elemento para reducirse a 40 gramos?. Sugerencia: Ver el problema anterior.
- 15. (Nivel de alcohol en la sangre).** Poco tiempo después de consumir una considerable cantidad de ron, el nivel de alcohol en la sangre de cierto conductor es de 0.4 miligramos por mililitro (mg/ml). De aquí en adelante, el nivel de alcohol decrece de acuerdo a la función

$$f(t) = (0.4)(1/2)^t,$$

donde  $t$  es el número de horas transcurridas después de haber alcanzado el nivel antes indicado. Si el límite legal para manejar un vehículo es de 0.08 mg/ml. ¿Cuánto tiempo debe esperar la persona para manejar legalmente?

- 16. (Cálculo del monto).** Se deposita un capital de 12 millones de dólares en un banco que paga 14 % anual de interés compuesto continuo. ¿En cuántos años se tendrá un monto de 21 millones?
- 17. (Competencia de ventas).** Dos periódicos compiten en ventas. Uno de ellos tiene una circulación de 500,000 ejemplares y crece 1.5 % mensualmente. El otro tiene una circulación de 900,000 ejemplares y decrece a razón de 0.5 % mensual. ¿Cuánto tiempo tomará para que ambos periódicos tengan igual circulación?

- 18. (Venta de un texto).** Un nuevo texto de Cálculo Vectorial saldrá al mercado. Se estima que si se obsequian  $x$  miles de ejemplares a los profesores, en el primer año se venderán  $f(x)=12 - 5e^{-0.2x}$  miles de ejemplares. ¿Cuántos textos deben obsequiarse si se quiere una venta en el primer año de 9,000 ejemplares?
- 19. (Producto Nacional Bruto).** El producto nacional bruto (P.N.B.) de cierto país esta creciendo exponencialmente. En 1995 fue 60,000 millones y en 2000 fue de 70,000 millones. ¿Cuál fue el PNB en el 2005?
- 20. (Población de la Tierra).** La población de la tierra en 1986 fue de 4,917 millones de habitantes, y crecía a razón de 1.65 % anual. Si esta razón continua, ¿en cuántos años la población alcanzará 8,000 millones?
- 21. (Edad de un fósil).** Un arqueólogo calculó que la cantidad de  $^{14}\text{C}$  en un tronco de árbol fosilizado es la cuarta parte de la cantidad de  $^{14}\text{C}$  que contienen los árboles actuales. ¿Qué edad tiene el tronco fosilizado?
- 22. (Cálculo del monto).** Se pide prestado a un banco Bs. 7,500,000 para ser pagado en dos años, ganando interés de 28% anual. Hallar la cantidad de dinero que deberá devolverse al banco si
- El interés es simple.
  - El interés se compone anualmente.
  - El interés se compone trimestralmente.
  - El interés se compone mensualmente.
  - El interés se compone continuamente.
- 23. (Cálculo del principal).** ¿Qué capital produce un monto de \$ 2,500,000 al final de 5 años si la tasa es de 16 % anual que se compone:
- Trimestralmente?
  - Continuamente?
- 24. (Cálculo del monto).** En el año 1626 el holandés Piter Minuit compró a los nativos la “isla” de Manhattan (Nueva York), por 24 dólares. Suponga que los nativos depositaron estos 24 dólares en un banco, ganando una tasa anual de 5 % que se compone continuamente. ¿Cuál fue el monto en el año 2000?
- 25. (Tiempo de duplicación de capital).** ¿Con qué rapidez se duplica un dinero si se invierte a una tasa anual de 15% que se compone:
- Semestralmente?
  - Continuamente?
- 26. (Tiempo de triplicación de capital).** ¿Con qué rapidez se triplicará un dinero invertido a una tasa anual de 15 % que se compone:
- Semestralmente?
  - Continuamente?
- 
-

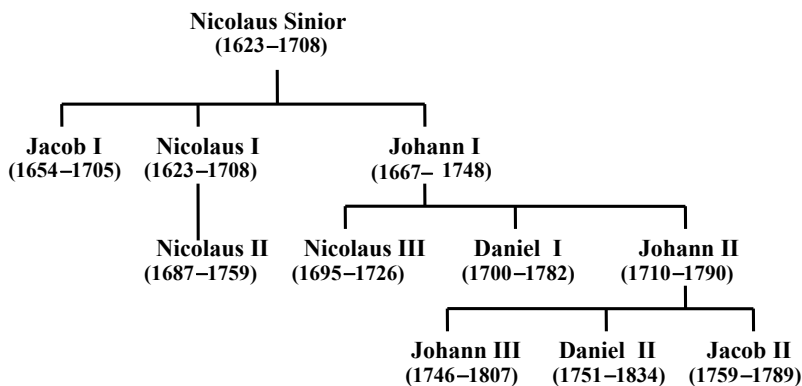
## BREVE HISTORIA DE LA FAMILIA BERNOULLI

La familia Bernoulli es caso extraordinario y único en la Historia de la Matemática. Ella aportó a la ciencia alrededor de una docena de brillantes matemáticos de primera línea, a lo largo de tres generaciones. La dinastía se levantó sobre dos columnas, configuradas por los hermanos **Jacob** y **Johann**, quienes fueron los más distinguidos seguidores de Leibniz en la línea de Cálculo. Son hijos de Nicolaus Bernoulli, un comerciante de Basilea, Suiza.

**Jacob** tuvo la cátedra de Matemáticas y Física en la Universidad de Basilea, desde 1687 hasta su muerte. **Johann** aprendió Matemáticas guiado por Jacob, quien era 12 años mayor. En 1695, a Johann le ofrecieron y aceptó la cátedra de Matemáticas en la universidad de Groningen (Holanda), donde estuvo hasta el año 1705. Regresó a Basilea y ocupó la cátedra que quedó vacante a la muerte de Jacob. Su hijos **Nicolás** y **Daniel** fueron amigos de Leonardo **Euler**, con quien, cuando jóvenes, recibían clases de matemáticas de Johann.

El apellido Bernoulli aparece, con frecuencia, ligado a muchos resultados claves de las Matemáticas. Así, en el estudio de las curvas encontramos la **Lemniscata de Bernoulli**; en las ecuaciones diferenciales, la **ecuación de Bernoulli**; en la teoría de series, **Los números de Bernoulli**, etc. Estos y otros resultados no son contribuciones de un solo hombre, sino de varios miembros de la familia Bernoulli.

### ARBOL GENEALOGICO (Matemático) DE LA FAMILIA BERNOULLI



**Jacob I**  
(1654–1705)



**Johann I**  
(1667–1748)



**Daniel I**  
(1700–1782)



**Johann III**  
(1746–1807)

# 5

---

## LIMITES Y CONTINUIDAD

---

*LEONARDO EULER*  
(1707–1783)

**5.1 INTRODUCCION INTUITIVA A LOS LIMITES**

**5.2 TRATAMIENTO RIGUROSO DE LOS LIMITES**

**5.3 LIMITES TRIGONOMETRICOS**

**5.4 CONTINUIDAD**

**5.5 LIMITES INFINITOS Y ASINTOTAS VERTICALES**

**5.6 LIMITES EN EL INFINITO Y ASINTOTAS  
HORIZONTALES**

**5.7 LOS LIMITES Y EL NUMERO  $e$**

**5.8 ASINTOTAS OBLICUAS**

*BREVE HISTORIA DE  $\pi$*

## Leonardo Euler

(1707 – 1783)



**LEONARDO EULER** nació en Basilea, Suiza. A temprana edad recibió lecciones del distinguido matemático Johann Bernoulli, quien juntó a Leonardo con sus dos brillantes hijos, Nicolás y Daniel. Más tarde, estos dos jovencitos alcanzaron renombre en la matemática por sus propios méritos. Leonardo, a pesar de ser 12 y 7 años menor que ellos, respectivamente, logró seguirles el ritmo.

Fue invitado a Rusia por la reina Catalina, en donde se incorporó a la Academia de Ciencias de San Petersburgo. El rey Federico el Grande lo invitó a Berlín a trabajar en la Academia de Ciencias de esa ciudad. En ambas sitios produjo abundantes trabajos de investigación.

Euler es considerado como el matemático más prolífico de la historia. Tiene contribuciones notables al cálculo de variaciones, la teoría de números, ecuaciones diferenciales. Introdujo al número  $e$  como base de los logaritmos naturales. Su producción total consiste en alrededor de 886 trabajos, que recopilados constituirían 80 libros de buen volumen. Se dice que al morir, dejó a la Academia de San Petersburgo trabajos para publicar por 20 años más, a pesar de que sus últimos 17 años los pasó casi ciego.

### ACONTECIMIENTOS IMPORTANTES PARALELOS

Durante la vida de Euler, en América y en el mundo hispano, sucedieron los siguientes hechos notables: En 1780 el cacique peruano José Gabriel Condorcanqui, quien adoptó el nombre del inca Tupac Amaru, se levantó en armas contra la autoridad colonial. Fue vencido y ejecutado delante de su familia. En 1750 nace en Caracas el prócer de la independencia venezolana Francisco de Miranda y en 1783 nace el Libertador Simón Bolívar. El 4 de julio de 1776, las 13 colonias inglesas de norteamérica declaran su independencia. Ese mismo año, Jorge Washington, con las fuerzas patriotas, cruza el río Delaware, cae por sorpresa sobre los ingleses y los derrota en Trenton.

**SECCION 5.1**

**INTRODUCCION INTUITIVA A LOS LIMITES**

Sobre el concepto de límite descansan los fundamentos del Cálculo. Sin duda que éste es uno de los conceptos más importantes y más delicados de la Matemática. Hizo su aparición hace muchos años atrás, en la Grecia Antigua. Sin embargo, su formulación rigurosa recién se logró en el siglo XIX, en los trabajos de investigación del matemático francés **Agustín Cauchy** (1789-1857). El largo lapso entre su aparición y su formulación rigurosa nos da una idea sobre lo delicado de este concepto.

Intimamente ligado al concepto de límite está el concepto de continuidad. De estos dos conceptos nos ocuparemos en este capítulo.

En esta sección presentamos un enfoque intuitivo del concepto de límite. También presentamos, sin demostración, las principales leyes que gobiernan a este concepto. Estas leyes nos permitirán introducirnos rápidamente al cálculo de los límites. La siguiente sección se ocupará de justificar rigurosamente muchos de estos aspectos.

Consideremos la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

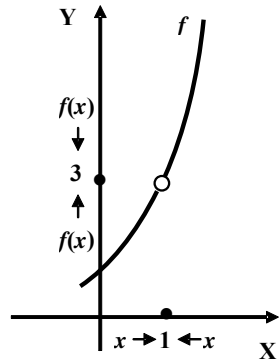
Esta función está definida para todo real, excepto para  $x = 1$ . Factorizando el numerador tenemos que:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$$

Además, para  $x \neq 1$ , podemos simplificar y obtener:

$$f(x) = x^2 + x + 1, \quad x \neq 1.$$

Aunque la función  $f$  no está definida en 1 nos interesamos por los valores que toma  $f(x)$  cuando  $x$  se aproxima a 1, sin llegar a ser 1. En primer lugar, nos acercamos a 1 por la izquierda tomando para  $x$  valores menores que 1. Así, por ejemplo,  $x = 0.8; 0.9; 0.99; 0.999$ . En segundo lugar, nos acercamos a 1 por la derecha tomando para  $x$  valores mayores que 1. Así, por ejemplo,  $x = 1.2; 1.1; 1.01; 1.001$ . Los valores correspondientes para  $f(x)$  los tenemos en la siguiente tabla.



$x$	0.8	0.9	0.99	0.999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1.001	1.01	1.1	1.2
$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$	2.44	2.71	2.9701	2.997001	$\rightarrow 3 \leftarrow$	3.003001	3.0301	3.31	3.64

Mirando la tabla o mirando el gráfico de la función, observamos que cuando  $x$  se aproxima a 1 por la izquierda y por la derecha, pero sin llegar a ser 1, el valor  $f(x)$  de

la función se aproxima a 3. Este resultado se expresa diciendo que cuando  $x$  tiende a 1, el límite de  $f(x)$  es 3, lo cual se abrevia así:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \quad \text{ó bien} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Durante toda la discusión anterior hemos puesto énfasis en que al aproximar  $x$  a 1 no dejamos que  $x$  tome el valor 1. Por tanto, el valor del límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a 1 depende únicamente de los valores que toma  $f(x)$  en los puntos  $x$  que están cercanos a 1, siendo irrelevante el hecho de que  $f$  esté o no definida en el punto 1. Así, si consideramos esta otra función  $g(x) = x^2 + x + 1$ , la cual está definida en todo  $x$ , incluyendo  $x = 1$ , tenemos que las dos funciones,

$$1. f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1, \quad x \neq 1 \quad \text{y} \quad 2. g(x) = x^2 + x + 1,$$

son iguales en todo  $x$  excepto en  $x = 1$  ( $f$  no está definida en 1). La tabla que hemos construido para  $f(x)$  también sirve para  $g(x)$ , ya que en ella no hemos considerado el valor  $x = 1$ . Por tanto, también concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

Es decir, ambas funciones tienen el mismo límite cuando  $x$  tiende a 1.

Guiados por la discusión anterior presentamos una definición intuitiva de límite. Al lector amante del rigor matemático le pedimos esperar un poco.

**DEFINICION.** No rigurosa de límite.

Sea  $f$  una función que está definida en un intervalo abierto que contiene al punto  $a$ , excepto posiblemente en el mismo punto  $a$ . Diremos que el **límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  es el número  $L$** , y escribiremos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

si cuando  $x$  se acerca a  $a$ , pero sin llegar a ser  $a$ ,  $f(x)$  se acerca a  $L$ .

Este número  $L$  puede o no existir, pero si existe, éste es único; es decir, toda función tiene, en un punto dado, a lo más un límite.

**EJEMPLO 1.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow -1} (x+3)$

**Solución**

Cuando  $x$  está cerca de  $-1$ ,  $x + 3$  está cerca de  $-1 + 3 = 2$ . Luego,

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+3) = 2$$

**EJEMPLO 2.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ , donde  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1, & \text{si } x \neq 4 \\ 5, & \text{si } x = 4 \end{cases}$

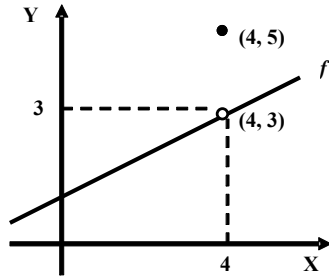
**Solución**

La función  $f$  coincide con la función lineal

$$g(x) = \frac{x}{2} + 1 \text{ en todo } \mathbb{R}, \text{ excepto en } x = 4.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{x}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{4}{2} + 1 = 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$



**EJEMPLO 3.** Límite de una función constante

Sea la función constante  $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ . Probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c.$$

Es decir, el límite de una función constante, cuando  $x$  tiende a cualquier valor  $a$ , es la misma constante.

**Solución**

Como  $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ , en particular, para los  $x$  próximos a  $a$  también tendremos que  $f(x) = c$ . Luego,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c$$

**EJEMPLO 4.** Límite de la función Identidad

Sea la función identidad:  $I(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} I(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

Es decir, el límite de la función identidad  $I(x) = x$ , cuando  $x$  tiende a  $a$ , es la misma  $a$ .

**Solución**

Si  $x$  se aproxima a  $a$ , obviamente  $I(x) = x$  también se aproxima a  $a$ . Luego,

$$\lim_{x \rightarrow a} I(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x)$$

## LIMITES UNILATERALES

Para hallar el límite de una función en un punto  $a$  nos aproximamos a  $a$  por ambos lados, por la izquierda y por la derecha. Si sólo nos aproximamos a  $a$  por un solo lado, bien sea por la izquierda o por la derecha, tenemos los **límites unilaterales**.

**DEFINICION.** a. Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto de la forma  $(b, a)$ . Diremos que el **límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  por la izquierda** es  $L$ , y escribiremos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

si cuando  $x$  está cerca de  $a$ , pero a la izquierda de  $a$ ,  $f(x)$  está cerca de  $L$ .

b. Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto de la forma  $(a, b)$ . Diremos que el **límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $a$  por la derecha** es  $L$ , y escribiremos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

si cuando  $x$  está cerca de  $a$ , pero a la derecha de  $a$ ,  $f(x)$  está cerca de  $L$ .

Observar que en ambos límites unilaterales no se asume que la función  $f$  está definida en  $a$ . El hecho de que  $f$  esté o no definida en  $a$  no afecta el límite.

**EJEMPLO 5.** Si  $f(x) = \frac{x}{|x|}$ , hallar a.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$       b.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}$

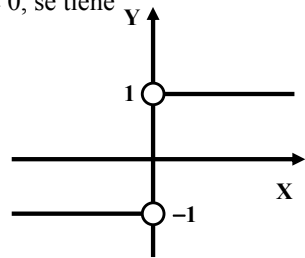
### Solución

a. Cuando  $x$  está a la izquierda de 0, es decir cuando  $x < 0$ , se tiene

$$|x| = -x \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{-x} = -1.$$

En particular, para los  $x$  cercanos a 0 y a su izquierda, tenemos que  $f(x) = -1$ .

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$$



b. Cuando  $x$  está a la derecha de 0, es decir cuando  $x > 0$ , se tiene

$$|x| = x \quad \text{y} \quad f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1.$$

En particular, para los  $x$  cercanos a 0 y a su derecha, tenemos que  $f(x) = 1$ .

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$$

Es evidente que si el límite de una función es el número  $L$ , entonces ambos límites unilaterales también serán iguales a  $L$ . Recíprocamente, si ambos límites son iguales a un mismo número  $L$ , entonces el límite de la función también es  $L$ . Este resultado es muy importante y lo resumimos en el siguiente teorema.

**TEOREMA 5.1**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

Este teorema y el ejemplo anterior nos dicen que la función  $f(x) = \frac{x}{|x|}$  no tiene límite en 0.

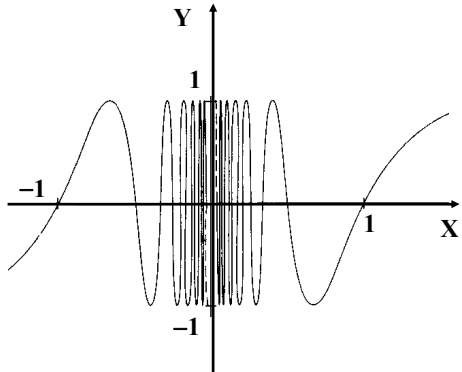
Nos preguntamos si existen funciones que en un punto dado no tengan alguno o los dos límites unilaterales. La respuesta es afirmativa. El siguiente ejemplo nos muestra una función que no tiene ninguno de los dos límites unilaterales en 0 y por tanto, tampoco tiene límite en 0.

**EJEMPLO 6.** Probar que no existen:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{\pi}{x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{\pi}{x}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}$

**Solución**

Tenemos la gráfica de  $y = \sin \frac{\pi}{x}$ . Nuestra táctica es mostrar una sucesión infinita de valores de  $x$  que se aproximan a 0, tanto por la derecha como por la izquierda, pero los valores correspondientes de  $\sin \frac{\pi}{x}$  oscilan entre  $-1$  y  $1$ . Esto probaría que ninguno de los tres límites existe.



Sea  $x_n = \frac{2}{2n+1}$ , donde  $n$  es un entero. Se tiene:  $\frac{\pi}{x_n} = \frac{\pi}{2/(2n+1)} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ .

1. Tomamos  $x_n = \frac{2}{2n+1}$  con  $n \geq 0$ .

En este caso, a medida que  $n$  crece,  $x_n = \frac{2}{2n+1}$  se aproxima cada vez más a 0 por

la derecha. Sin embargo, los valores correspondientes de  $\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}$  son:

$$\sin \left[ (2n+1)\frac{\pi}{2} \right] = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es par} \\ -1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por lo tanto, no existe  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{x}$ .

2. Tomamos  $x_n = \frac{2}{2n+1}$  con  $n < 0$ .

Como en el caso anterior, a medida que  $|n| = -n$  crece,  $x_n = \frac{2}{2n+1}$  se aproxima cada vez más a 0 por la izquierda; pero aquí también se cumple que

$$\operatorname{sen} \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} \right] = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es par} \\ -1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por lo tanto, no existe  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\pi}{x}$ .

3. Como no existen los límites unilaterales, tampoco existe  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{x}$ .

## LEYES DE LOS LÍMITES

Un resultado fundamental en la teoría de los límites nos dice que el proceso de tomar límites respeta las operaciones elementales del álgebra. Es decir, el límite de una suma, diferencia, producto, cociente o raíz de funciones es igual a la suma, diferencia, producto, cociente o raíz de los límites. Estos resultados son conocidos con los nombres de **ley de la suma**, **ley de la diferencia**, **ley del producto**, **ley del cociente** y **ley de la raíz**, respectivamente. Debido a su importancia, los enunciamos en forma precisa en el siguiente teorema, cuya demostración parcial la haremos más adelante.

### TEOREMA 5.2 Leyes de los Límites.

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ , entonces

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \pm \left[ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right] = L \pm G$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \left[ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right] = LG$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{G}$ , si  $G \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ , donde  $L \geq 0$  si  $n$  es par

Estas leyes también son válidas para los límites unilaterales.

**EJEMPLO 7.** Ley del producto de una constante por una función

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $c$  es una constante, probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] = cL$$

**Solución**

$$\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} c \right] \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] = cL$$

**EJEMPLO 8.** Ley de la potencia.

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $n$  es un número natural, probar:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n$$

En particular,  $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$

**Solución**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n &= \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{f(x)f(x) \dots f(x)}_n \\ &= \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \dots \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \quad (\text{Ley del producto}) \\ &= \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n \end{aligned}$$

Por ejemplo 4, sabemos que  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ . Luego, aplicando la parte anterior,

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = \left[ \lim_{x \rightarrow a} x \right]^n = [a]^n = a^n$$

**EJEMPLO 9.** Calcular  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{5x^3}$

**Solución**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{5x^3} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} 5x^3} \quad (\text{Ley de la raíz})$$

$$= \sqrt{5 \left[ \lim_{x \rightarrow 2} x^3 \right]} \quad (\text{Ejemplo 7})$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{5 \left[ 2^3 \right]} && \text{(Ley de la potencia)} \\
 &= \sqrt{40} = 2\sqrt{10}
 \end{aligned}$$


---

El siguiente teorema nos da la manera de calcular el límite de una función racional  $y$ , en particular, el de un polinomio.

**TEOREMA 5.3** Si  $F(x)$  es una función racional y  $a$  es un punto de su dominio, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$$

### Demostración

**Caso 1.**  $F$  es un polinomio:  $F(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow a} F(x) &= \lim_{x \rightarrow a} [b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0] \\
 &= \left[ \lim_{x \rightarrow a} b_n x^n \right] + \dots + \left[ \lim_{x \rightarrow a} b_1 x \right] + \left[ \lim_{x \rightarrow a} b_0 \right] \quad \text{(Ley de la suma)} \\
 &= b_n \left[ \lim_{x \rightarrow a} x^n \right] + \dots + b_1 \left[ \lim_{x \rightarrow a} x \right] + b_0 \quad \text{(Ejemplo 7)} \\
 &= b_n a^n + \dots + b_1 a + b_0 \quad \text{(Ley de la potencia)} \\
 &= F(a)
 \end{aligned}$$

**Caso 2.**  $F$  es una función racional:  $F(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , donde  $q(a) \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} p(x)}{\lim_{x \rightarrow a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = F(a).$$


---

**EJEMPLO 10.** Calcular  $\lim_{x \rightarrow 2} [4x^3 - 7x^2 + 5x - 1]$

### Solución

Aplicando el teorema anterior para el caso de un polinomio:

$$\lim_{x \rightarrow 2} [4x^3 - 7x^2 + 5x - 1] = 4(2)^3 - 7(2)^2 + 5(2) - 1 = 13$$


---

**EJEMPLO 11.** Calcular  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{8x^2 - 4x + 2}{x^3 + 5}$

**Solución**

Aplicando el teorema anterior para el caso de una función racional:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{8x^2 - 4x + 2}{x^3 + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (8x^2 - 4x + 2)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 5)} = \frac{8(-1)^2 - 4(-1) + 2}{(-1)^3 + 5} = \frac{7}{2}.$$

**FORMA INDETERMINADA  $\frac{0}{0}$**

Supongamos  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , y buscamos  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

Aquí, la ley del cociente (teorema 5.2) no es aplicable. La sustitución directa nos lleva a la expresión  $0/0$ , la cual no da la información suficiente para encontrar tal límite. Por tal razón se dice que este límite es **indeterminado de la forma  $0/0$  o que el límite es de la forma indeterminada  $0/0$** . La indeterminación se salva recurriendo a métodos geométricos o algebraicos, como simplificación, racionalización o cambio de variable.

Veremos más adelante que la derivada, que es el concepto más importante del Cálculo Diferencial, es un límite del tipo  $0/0$ .

**EJEMPLO 12.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

**Solución**

Este es un límite indeterminado de la forma  $0/0$ . Observemos que al numerador lo podemos factorizar, lo que nos permitirá simplificar el cociente. En efecto:

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x + 4)(x - 4)}{x - 4} = x + 4, \text{ para } x \neq 4$$

Luego,  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 4 + 4 = 8$

**EJEMPLO 13.** Hallar  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

**Solución**

Es un caso  $\frac{0}{0}$ . Para  $h \neq 0$ , racionalizando el numerador, tenemos

$$\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$\text{Luego, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

## PROBLEMAS RESUELTOS 5.1

**PROBLEMA 1.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

**Solución**

Este es un caso 0/0. Para  $x \neq -2$  tenemos:

$$\frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{x^3 + 2^3}{x + 2} = \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} = x^2 - 2x + 4$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4) = (-2)^2 - 2(-2) + 4 = 12$$

**PROBLEMA 2.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^{-3} - 2^{-3}}{x}$

**Solución**

Es un caso 0/0. Para  $x \neq 0$  tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{(x+2)^{-3} - 2^{-3}}{x} &= \frac{\frac{1}{(x+2)^3} - \frac{1}{2^3}}{x} = \frac{2^3 - (x+2)^3}{2^3 x (x+2)^3} = \frac{2^3 - [x^3 + 6x^2 + 12x + 2^3]}{2^3 x (x+2)^3} \\ &= -\frac{x^3 + 6x^2 + 12x}{2^3 x (x+2)^3} = -\frac{x(x^2 + 6x + 12)}{2^3 x (x+2)^3} = -\frac{x^2 + 6x + 12}{2^3 (x+2)^3} \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^{-3} - 2^{-3}}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6x + 12}{2^3 (x+2)^3} = -\frac{0^2 + 6(0) + 12}{2^3 (0+2)^3} = -\frac{3}{8}$$

**PROBLEMA 3.** Hallar  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}$

**Solución**

Es un caso  $0/0$ .

Tenemos:  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \Rightarrow a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$

Si en la última igualdad hacemos  $a = \sqrt[3]{x+h}$  y  $b = \sqrt[3]{x}$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x} &= \frac{(\sqrt[3]{x+h})^3 - (\sqrt[3]{x})^3}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + (\sqrt[3]{x+h})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2} \\ &= \frac{(x+h) - (x)}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + (\sqrt[3]{x+h})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2} \\ &= \frac{h}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + (\sqrt[3]{x+h})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2} \end{aligned}$$

Luego, para  $h \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} &= \frac{h}{h \left[ (\sqrt[3]{x+h})^2 + (\sqrt[3]{x+h})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2 \right]} \\ &= \frac{1}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + (\sqrt[3]{x+h})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + (\sqrt[3]{x+h})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2} \\ &= \frac{1}{(\sqrt[3]{x+0})^2 + (\sqrt[3]{x+0})(\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

**PROBLEMA 4.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ , donde  $a > 0$

**Solución**

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \frac{\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x-a)(x+a)}} = \frac{x-a+\sqrt{x-a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{(x-a)(x+a)}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} \\
 &= \frac{\sqrt{x-a}\sqrt{x-a}+\sqrt{x-a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{(x-a)(x+a)}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} \\
 &= \frac{\sqrt{x-a}(\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}}{\sqrt{2a}(\sqrt{a}+\sqrt{a})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2a}}
 \end{aligned}$$

Observar que la factorización  $x-a = \sqrt{x-a} \sqrt{x-a}$  sólo es posible si  $x \geq a$ . Por esta razón sólo se pide el límite por la derecha.

**PROBLEMA 5.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

**Solución**

Mediante un cambio de variable transformamos esta función con radicales en una función racional. La justificación teórica del proceso de cambio de variable (Teorema de cambio de variable) la presentaremos en la próxima sección. Los radicales tienen índices 2 y 3, respectivamente (tienen índices distintos). El mínimo común múltiplo de 2 y 3 es 6. hacemos el cambio de variable:

$$x+1 = y^6$$

Tenemos que:

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{y^6} = y^3, \quad \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{y^6} = y^2 \quad y$$

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \frac{y^3-1}{y^2-1} = \frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)} = \frac{y^2+y+1}{y+1}, \quad y \neq 1$$

Como  $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow y \rightarrow 1$ , tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2+y+1}{y+1} = \frac{1^2+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

**PROBLEMA 6.** Si  $n$  es un número natural, probar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

**Solución**

Sabemos, por el binomio de Newton, que:

$$(x+h)^n = x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n$$

Luego, para  $h \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\ &= \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \frac{h \left[ nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right]}{h} \\ &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right] \\ &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(0) + \dots + nx(0)^{n-2} + (0)^{n-1} \\ &= nx^{n-1} + 0 + \dots + 0 + 0 = nx^{n-1} \end{aligned}$$

**PROBLEMA 7.** a. Hallar el número  $b$  para el cual el siguiente límite existe:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + bx + b - 7}{x^2 - x - 6}$$

b. Hallar el límite.

**Demostración**

a. Tenemos que  $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$ .

Para que el límite propuesto exista, el numerador debe tener un factor  $(x + 2)$ , de modo que obtengamos una indeterminación del tipo  $0/0$  y que esta pueda eliminarse simplificando el factor común  $(x + 2)$ . En consecuencia,  $x = -2$  debe ser una raíz del numerador. Luego,

$$3(-2)^2 + b(-2) + b - 7 = 0 \Rightarrow b = 5$$

Por lo tanto, para que el límite dado exista se debe cumplir que  $b = 5$  y el numerador debe ser

$$3x^2 + bx + b - 7 = 3x^2 + 5x + 5 - 7 = 3x^2 + 5x - 2 = (x + 2)(3x - 1)$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + bx + b - 7}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(3x - 1)}{(x + 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x - 1}{x - 3} = \frac{3(-2) - 1}{-2 - 3} = \frac{7}{5}$$


---

**PROBLEMA 8.** Probar que  $\lim_{x \rightarrow 0} x \llbracket 1/x \rrbracket = 1$

### Solución

De acuerdo al teorema 5.1, es suficiente probar que:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} x \llbracket 1/x \rrbracket = 1 \quad \text{y} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0^-} x \llbracket 1/x \rrbracket = 1$$

1. Como sólo son de interés los  $x$  cercanos a 0 y a su derecha, tomamos  $0 < x < 1$

$$0 < x < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > 1. \text{ Luego, si } \llbracket 1/x \rrbracket = n, \text{ entonces } n > 1$$

$$\begin{aligned} \text{Pero, } \llbracket 1/x \rrbracket = n &\Rightarrow n \leq \frac{1}{x} < n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \geq x > \frac{1}{n + 1} \Rightarrow \frac{n}{n} \geq x \llbracket 1/x \rrbracket > \frac{n}{n + 1} \quad (n > 1) \\ &\Rightarrow 1 \geq x \llbracket 1/x \rrbracket > \frac{1}{1 + 1/n} \end{aligned}$$

Como  $x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$ , tenemos:

$$1 \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} x \llbracket 1/x \rrbracket \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 1/n} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \llbracket 1/x \rrbracket = 1$$

2. Como sólo son de interés los  $x$  cercanos a 0 y a su izquierda, tomamos  $-1 < x < 0$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < -1. \text{ Luego, si } \llbracket 1/x \rrbracket = n, \text{ entonces } n < -1$$

$$\begin{aligned} \text{Pero, } \llbracket 1/x \rrbracket = n &\Rightarrow n \leq \frac{1}{x} < n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \geq x > \frac{1}{n + 1} \Rightarrow \frac{n}{n} \leq x \llbracket 1/x \rrbracket < \frac{n}{n + 1} \quad (n < -1) \\ &\Rightarrow 1 \leq x \llbracket 1/x \rrbracket < \frac{1}{1 + 1/n} \end{aligned}$$

Como  $x \rightarrow 0^- \Leftrightarrow n \rightarrow -\infty$ , tenemos:

$$1 \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} x \llbracket 1/x \rrbracket \leq \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + 1/n} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow 0^-} x \llbracket 1/x \rrbracket = 1$$


---

**PROBLEMA 9.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x+1| - |x-1|}{\sqrt{x^2+1}}$

**Solución**

Como sólo son de interés los  $x$  cercanos a 0, tomamos  $-1 < x < 1$ . En este caso:

$$-1 < x < 1 \Rightarrow -1+1 < x+1 < 1+1 \Rightarrow 0 < x+1 < 2 \Rightarrow |x+1| = x+1$$

$$-1 < x < 1 \Rightarrow -1-1 < x-1 < 1-1 \Rightarrow -2 < x-1 < 0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$$

Luego,  $|x+1| - |x-1| = x+1 - (-(x-1)) = 2x$

En consecuencia,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x+1| - |x-1|}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2(0)}{\sqrt{(0)^2+1}} = \frac{0}{1} = 0$$

**PROBLEMAS PROPUESTOS 5.1**

*En los problemas del 1 al 35, hallar el límite indicado.*

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+6}{x^2-3}$

2.  $\lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{y^2-2y+2}{y-4} + 1 \right]$

3.  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x^4+x+1}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{2x^2+2}{8x^2+1}}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

6.  $\lim_{y \rightarrow -5} \frac{y^2-25}{y+5}$

7.  $\lim_{h \rightarrow 2} \frac{h-2}{h^2-4}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2}$

9.  $\lim_{y \rightarrow -3} \frac{y^3+27}{y+3}$

10.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+4x-32}{x-4}$

11.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 3}{x+1}$

12.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{\frac{x+1}{x+2}} + 1$

13.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

14.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{x-2}$

15.  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{16-x^{4/3}}{4-x^{2/3}}$

16.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x^2-2x}$

17.  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2-81}{\sqrt{x} - 3}$

18.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$

19. 
$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{y+3} - \sqrt{3}}{y}$$

20. 
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$$

21. 
$$\lim_{y \rightarrow 5} \frac{\sqrt{y-1} - 2}{y-5}$$

22. 
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h^2} - 1}{h}$$

23. 
$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$$

24. 
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

25. 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$$

26. 
$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$$

27. 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1} - 1}{x^2}$$

28. 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$$

29. 
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

30. 
$$\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$$

31. 
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$$

32. 
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$$

33. 
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$$

34. 
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x^2 - ax - x + a}$$

35. 
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{bx+a}}{\sqrt{cx+d} - \sqrt{dx+c}}$$

36. Si  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ , probar que 
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{1}{x^2}.$$

37. Si  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x > 0$ , probar que 
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

*En los problemas del 38 al 54, hallar el límite indicado.*

38. 
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{2x-1}$$

39. 
$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{\sqrt{x^2-16}}$$

40. 
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [x]$$

41. 
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [x]$$

42. 
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} [x]$$

43. 
$$\lim_{x \rightarrow -2^+} [x]$$

44. 
$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \llbracket 1/x \rrbracket$$

45. 
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x - [x])$$

46. 
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - [x])$$

47. 
$$\lim_{x \rightarrow 3} \llbracket x^2 + x + 1 \rrbracket$$

48. 
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \llbracket x^2 + x + 1 \rrbracket$$

49. 
$$\lim_{x \rightarrow 3} \llbracket [x] + [4-x] \rrbracket$$

50. 
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \llbracket [x] + [4-x] \rrbracket$$

51. 
$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x-4}{|x-4|}$$

52. 
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{4x+1}}{\sqrt{x}-1}$$

53. 
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2} + 2-x}{\sqrt{4-x^3/2} + \sqrt{2x-x^2}}$$

54. 
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}$$

55. Si  $h(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2+1, & \text{si } x > 2 \end{cases}$  hallar **a.**  $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x)$  **b.**  $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$  **c.**  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$

56. Si  $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2+4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$  hallar **a.**  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  **b.**  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  **c.**  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

57. Si  $f(x) = \begin{cases} -4, & \text{si } x < -2 \\ \frac{x^3}{2}, & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ x-1, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$  hallar **a.**  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$  **b.**  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

58. Hallar una función  $f$  tal que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$  y que no exista  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

59. Pruebe, con un contraejemplo, que las proposiciones siguientes son falsas:

**a.** Existe  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)+g(x)] \Rightarrow$  Existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y existe  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$

**b.** Existe  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] \Rightarrow$  Existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  y existe  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$

60. Probar que: Existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

De esta proposición se obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{No existe} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

## SECCION 5.2

### TRATAMIENTO RIGUROSO DE LOS LIMITES

Con la "definición" informal de límite que se presentó en la sección anterior hemos logrado avanzar algunos pasos, pero no puede llevarnos muy lejos. Así, por ejemplo, con esa definición no podemos demostrar las leyes de los límites enunciados en el teorema 5.2. Otra versión un tanto mejorada, pero aún no rigurosa, es la siguiente:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  si podemos hacer que los valores de  $f(x)$  estén arbitrariamente cerca de  $L$  (tan cerca como queramos) con sólo tomar a  $x$  suficientemente cerca de  $a$ , pero no igual a  $a$ .

Ahora daremos una interpretación matemática a esta versión. Para hablar de cercanía necesitamos considerar números reales positivos pequeños. Es tradicional usar las letras griegas  $\epsilon$  (épsilon) y  $\delta$  (delta) para representar tales números.

Con la frase: "que  $f(x)$  esté arbitrariamente cerca de  $L$  (tan cerca como queramos)" queremos decir que si tomamos cualquier número positivo  $\varepsilon$ , por más pequeño que éste sea, la distancia entre  $f(x)$  y  $L$ , que es  $|f(x) - L|$ , es menor que  $\varepsilon$ . Esto es,

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ ó equivalentemente,}$$

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

Pero la última desigualdad significa que  $f(x)$  está en el intervalo

$$(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

Por otro lado, la frase "con sólo tomar a  $x$  suficientemente cerca de  $a$ , pero no igual a  $a$ " quiere decir que se puede encontrar otro número positivo  $\delta$  tal que la distancia entre  $x$  y  $a$  sea menor que  $\delta$ , siendo  $x \neq a$ . Esto es,

$$0 < |x - a| < \delta$$

Esta desigualdad es la conjunción de las dos siguientes:

$$0 < |x - a| \text{ y } |x - a| < \delta$$

La primera dice que  $x \neq a$  y la segunda, que la distancia entre  $x$  y  $a$  es menor que  $\delta$ .

**DEFINICION. Rigurosa de límite.**

Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto  $a$ , excepto posiblemente el punto  $a$ .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Más formalmente, la definición anterior se escribe así:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

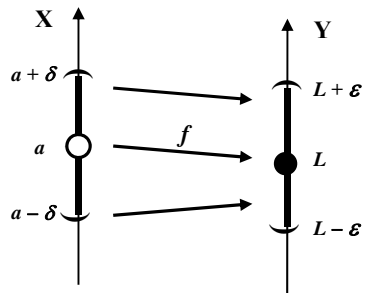
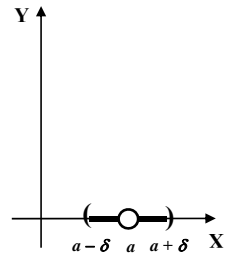
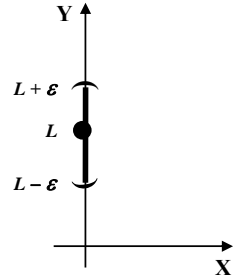
Algunas veces, la implicación

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

se escribe así:

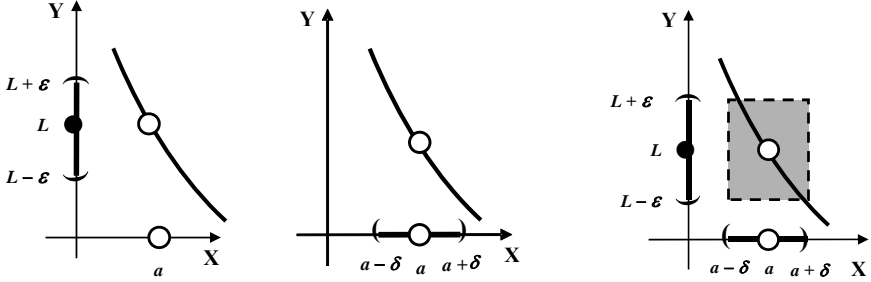
$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

Una manera gráfica de ver esta definición es la siguiente:



Para cualquier intervalo pequeño  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  alrededor de  $L$  podemos encontrar otro intervalo  $(a - \delta, a + \delta)$  alrededor de  $a$  tal que  $f$  lleva todos los puntos de  $(a - \delta, a + \delta)$ , excepto posiblemente  $a$ , dentro del intervalo  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .

Otra interpretación gráfica de la definición de límite es como sigue:



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

En la última figura vemos que los puntos  $(x, f(x))$  de la gráfica de  $f$ , con  $x \neq a$ , que se encuentran entre las rectas verticales  $x = a - \delta$  y  $x = a + \delta$ , también se encuentran entre las rectas horizontales  $y = L - \varepsilon$  e  $y = L + \varepsilon$ .

Según esta definición, para probar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , primero se da el número  $\varepsilon > 0$  y se debe elaborar para producir el número  $\delta > 0$  que cumpla con:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Podemos pensar este proceso como un juego (juego de la prueba del límite) entre el profesor y el estudiante. El profesor da el  $\varepsilon$  y el estudiante, para ganar, debe producir el respectivo  $\delta$ . Empecemos el juego:

**EJEMPLO 1.** Usando la definición  $\varepsilon$ - $\delta$  probar que  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$

**Solución**

Dado un  $\varepsilon > 0$ , debemos hallar un  $\delta > 0$  tal que:

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(2x - 1) - 5| < \varepsilon$$

**Cálculos previos. Buscando un valor de  $\delta$ .**

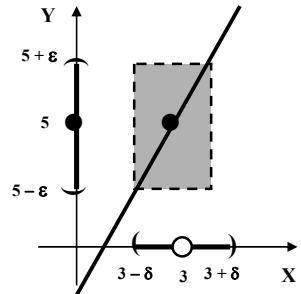
Buscamos  $\delta$  manipulando la última expresión:

$$|(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = |2(x - 3)| = 2|x - 3|$$

Luego,

$$|(2x - 1) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \varepsilon/2$$

La última expresión nos sugiere que debemos tomar  $\delta = \varepsilon/2$ .



**Prueba Formal. Comprobando que el  $\delta$  hallado funciona.**

Si dado  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $\delta = \varepsilon/2$ , entonces

$$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |x-3| < \varepsilon/2 \Rightarrow 2|x-3| < \varepsilon \Rightarrow |(2x-1)-5| < \varepsilon$$

Vemos que con  $\delta = \varepsilon/2$  logramos lo que queríamos, que es,

$$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(2x-1)-5| < \varepsilon$$

Luego,  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x-1) = 5$ .

**OBSERVACIONES**

1. La segunda parte de la solución del ejemplo anterior, a la que llamamos prueba formal, consiste en recorrer al revés los pasos dados en la primera parte. Esto significa que el verdadero trabajo de la prueba está en los cálculos previos, siendo la segunda parte una simple comprobación. Por esta razón, más adelante, la prueba de un límite la concluiremos al encontrar el  $\delta$  en la parte de cálculos previos.
2. En el ejemplo anterior hemos encontrado que tomando  $\delta = \varepsilon/2$  llegamos a la conclusión que queríamos:  $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(2x-1)-5| < \varepsilon$ .

Se puede tomar también para  $\delta$  cualquier número positivo menor que  $\varepsilon/2$ . En efecto, si tomamos  $\delta_1 < \delta = \varepsilon/2$  se tiene, por transitividad, que

$$0 < |x-3| < \delta_1 \Rightarrow 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |(2x-1)-5| < \varepsilon.$$

**EJEMPLO 2.** Si  $a > 0$ , usando la definición  $\varepsilon$ - $\delta$ , probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$

**Solución**

Para un  $\varepsilon > 0$  cualquiera, debemos hallar un  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$$

**Cálculos previos. Buscando un valor de  $\delta$** 

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - \sqrt{a}| &= \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| = \left| \frac{x-a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| |x-a| \leq \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \right| |x-a| = \frac{1}{\sqrt{a}} |x-a| \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\left| \sqrt{x} - \sqrt{a} \right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad \frac{1}{\sqrt{a}} |x-a| < \varepsilon, \quad \text{o sea si} \quad |x-a| < \varepsilon \sqrt{a}$$

Por tanto, tomamos  $\delta = \varepsilon \sqrt{a}$ .

**Prueba Formal. Comprobando que el  $\delta$  encontrado funciona.**

Si dado  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $\delta = \varepsilon \sqrt{a}$ , entonces

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x-a| < \varepsilon \sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} |x-a| < \varepsilon \Rightarrow \left| \sqrt{x} - \sqrt{a} \right| < \varepsilon$$

Luego,  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

**EJEMPLO 3.** Usando la definición  $\varepsilon$ - $\delta$ , probar que

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + x + 1) = 3$$

**Solución**

Para un  $\varepsilon > 0$  cualquiera, debemos hallar un  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - (-2)| = |x + 2| < \delta \Rightarrow \left| (x^2 + x + 1) - 3 \right| < \varepsilon$$

**Cálculos previos. Buscando un valor de  $\delta$**

Tenemos que:

$$\left| (x^2 + x + 1) - 3 \right| = \left| x^2 + x - 2 \right| = \left| (x-1)(x+2) \right| = |x-1| |x+2| \quad (1)$$

Observar que en la última expresión, el factor  $|x+2|$  es el que debemos tomar menor que  $\delta$ . Para hallar a  $\delta$ , al factor acompañante  $|x-1|$  debemos acotarlo por una constante. Es decir, debemos encontrar una constante  $M > 0$  tal que

$$|x-1| \leq M.$$

En los ejemplos anteriores esta  $M$  la hemos encontrado con relativa facilidad. Así, para el ejemplo anterior,  $M = 1/\sqrt{a}$ .

En el presente caso, no existe un  $M$  que acote a  $|x-1|$  en todo  $\mathbb{R}$ , que es el dominio del polinomio  $x^2 + x + 1$ . Sin embargo, como sólo estamos interesados en los puntos cercanos a  $-2$ , conseguimos tal  $M$  si nos restringimos a un intervalo centrado en  $-2$ . Así, si sólo consideramos los  $x$  que están a una distancia de 1 de  $-2$ , esto es  $|x+2| < 1$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} |x+2| < 1 &\Rightarrow -1 < x+2 < 1 \Rightarrow -3 < x < -1 \Rightarrow -4 < x-1 < -2 \\ &\Rightarrow 2 < -(x-1) < 4 \Rightarrow 2 < |x-1| < 4 \end{aligned}$$

O sea que hemos conseguido  $M = 4$  tal que

$$|x+2| < 1 \Rightarrow |x-1| < M = 4 \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos:

$$|x+2| < 1 \Rightarrow \left| (x^2 + x + 1) - 3 \right| < 4|x+2|$$

Por tanto,

$$|x+2| < 1 \quad \text{y} \quad 4|x+2| < \varepsilon \Rightarrow |(x^2 + x + 1) - 3| < \varepsilon$$

Luego,

$$|x+2| < 1 \quad \text{y} \quad |x+2| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \left| (x^2 + x + 1) - 3 \right| < \varepsilon \quad (3)$$

Ahora tenemos dos restricciones sobre  $|x+2|$ , que son:

$$|x+2| < 1 \quad \text{y} \quad |x+2| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Para asegurarnos que ambas desigualdades se cumplan, escogemos como  $\delta$  al menor (mínimo) de los números 1 y  $\varepsilon/4$ . Esta escogencia la abreviamos así:

$$\delta = \text{Mínimo} \{1, \varepsilon/4\}.$$

**Prueba Formal. Comprobando que el  $\delta$  encontrado funciona.**

Si dado  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $\delta = \text{Mínimo} \{1, \varepsilon/4\}$ , entonces, por (3),

$$0 < |x+2| < \delta \Rightarrow |x+2| < 1 \quad \text{y} \quad |x+2| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow \left| (x^2 + x + 1) - 3 \right| < \varepsilon$$

Luego,  $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + x + 1) = 3$

## ESTRATEGIA PARA GANAR EL JUEGO DE LA PRUEBA DEL LIMITE

Para probar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  se siguen 3 pasos:

**Paso 1. Sacar el factor  $|x-a|$ .**

De  $|f(x) - L|$  sacar como factor a  $|x-a|$ . Esto es, conseguir una función  $g(x)$  tal que  $|f(x) - L| = |g(x)| |x-a|$

**Paso 2. Acotar  $|g(x)|$ .**

Encontrar un número  $\beta > 0$  (en la mayoría de los casos,  $\beta = 1$ ) y un número  $M > 0$  tal que

$$0 < |x-a| < \beta \Rightarrow |g(x)| \leq M$$

**Paso 3. Escoger  $\delta$ .**

Dado  $\varepsilon > 0$ , tomar  $\delta = \text{Mínimo} \{\beta, \varepsilon/M\}$  ya que, por los pasos 1 y 2,

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| = |g(x)| |x-a| \leq M |x-a| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

O sea,

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

**EJEMPLO 4.** Usando la definición  $\varepsilon$ - $\delta$  probar que  $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{1}{x} = 2$

**Solución**

Para un  $\varepsilon > 0$  cualquiera, debemos hallar un  $\delta > 0$  tal que

$$0 < \left| x - \frac{1}{2} \right| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 2 \right| < \varepsilon$$

**Paso 1. Sacar el factor**  $|x - 1/2|$ .

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} - 2 \right| &= \left| \frac{1-2x}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} \right| |2x-1| = \left| \frac{2}{x} \right| \left| x - \frac{1}{2} \right| \\ &= |g(x)| \left| x - \frac{1}{2} \right|, \quad \text{donde } |g(x)| = \left| \frac{2}{x} \right| \end{aligned}$$

**Paso 2. Acotar**  $|g(x)|$ .

Buscamos un  $\beta > 0$  y un  $M > 0$  tales que:  $\left| x - \frac{1}{2} \right| < \beta \Rightarrow \left| \frac{2}{x} \right| \leq M$

La expresión  $|g(x)| = \left| \frac{2}{x} \right|$  crece ilimitadamente si  $x$  se acerca a 0. Por tanto, para acotarla, debemos alejar a  $x$  de 0. Esto lo logramos tomando

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \beta = \frac{1}{4}.$$

En efecto:

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} < x - \frac{1}{2} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{3} < \frac{1}{x} < 4 \Rightarrow \frac{8}{3} < \frac{2}{x} < 8 \Rightarrow \frac{8}{3} < \left| \frac{2}{x} \right| < 8$$

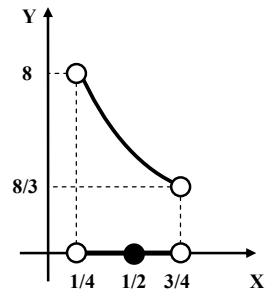
O sea, si  $\beta = \frac{1}{4}$ , conseguimos  $M = 8$ , tales que

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \beta = \frac{1}{4} \Rightarrow \left| \frac{2}{x} \right| < M = 8$$

**Paso 3. Escoger  $\delta$ .**

Tomamos  $\delta = \text{Mínimo} \{ \beta, \varepsilon/M \} = \text{Mínimo} \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\varepsilon}{8} \right\}$

**Comprobando que el  $\delta$  encontrado funciona.**



$$0 < \left| x - \frac{1}{2} \right| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 2 \right| = \left| \frac{2}{x} \right| \left| x - \frac{1}{2} \right| < 8 \left( \frac{\varepsilon}{8} \right) = \varepsilon$$

### ALGUNOS TEOREMAS SOBRE LÍMITES

Lo que resta de esta sección será dedicada a presentar algunos teoremas de importancia para el desarrollo posterior del curso. También pagaremos las deudas contraídas en la sección anterior, como son las leyes de los límites (Teorema 5.2).

#### **EJEMPLO 5.** Probar la ley de la suma .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ , probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \pm \left[ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right] = L \pm G$$

#### Solución

Debemos probar que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f(x) \pm g(x)) - (L \pm G)| < \varepsilon$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , dado  $\varepsilon/2$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ , dado  $\varepsilon/2$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

Tomando  $\delta = \text{Min} \{ \delta_1, \delta_2 \}$ , usando (1) y (2) se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta &\Rightarrow |(f(x) \pm g(x)) - (L \pm G)| = |(f(x) - L) \pm (g(x) - G)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

**TEOREMA 5.4** Si  $f(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x$  en un intervalo abierto que contiene a  $a$ , excepto posiblemente en  $a$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

#### Demostración

Ver el problema resuelto 12.

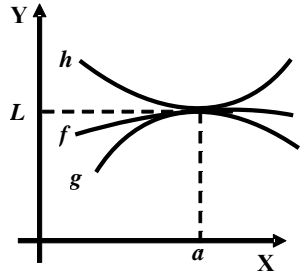
**TEOREMA 5.5** Ley del emparedado o ley de la arepa rellena. Si

1.  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ,  $\forall x$  en un intervalo abierto que contiene a  $a$ , excepto posiblemente en  $a$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$



**Demostración**

Aplicando el teorema anterior se tiene que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x) \Rightarrow$$

$$L \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

**EJEMPLO 6.** Probar que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1+x^4} = 0$

**Solución**

Tenemos que  $0 \leq \frac{x^2}{1+x^4} \leq x^2$

Si  $f(x) = 0$ ,  $g(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$  y  $h(x) = x^2$ , entonces  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ .

Además,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ .

Luego, por el teorema anterior,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1+x^4} = 0$

**TEOREMA 5.6** Teorema del cambio de variable

Si  $y = f(x)$  y  $x = g(t)$  son tales que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

$\lim_{t \rightarrow b} g(t) = a$  y  $g(t) \neq a$  para todo  $t \neq b$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{t \rightarrow b} f(g(t)) = L$$

El cambio de variable es  $x = g(t)$ .

**Demostración**

Ver el problema resuelto 13.

## LIMITES UNILATERALES

Terminamos la teoría de esta sección presentando las definiciones rigurosas de los límites unilaterales. Para esto, observemos que

$$0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - a < 0 \wedge 0 < x - a < \delta \\ \Leftrightarrow 0 < a - x < \delta \wedge 0 < x - a < \delta$$

Los  $x$  que cumplen con  $0 < a - x < \delta$  son los  $x$  en el intervalo  $(a - \delta, a)$  y, por tanto, están a la izquierda de  $a$ . En cambio, los  $x$  que cumplen con  $0 < x - a < \delta$  son los  $x$  que están en el intervalo  $(a, a + \delta)$ , y por tanto, están a la derecha de  $a$ .

### DEFINICION. Límites Unilaterales

1. Sea  $f$  definida en un intervalo abierto de la forma  $(b, a)$ .

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

2. Sea  $f$  definida en un intervalo abierto de la forma  $(a, b)$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

## PROBLEMAS RESUELTOS 5.2

**PROBLEMA 1.** Probar que  $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$

### Solución

Observar que no se puede aplicar la ley de producto, ya que, siguiendo el esquema del ejemplo 6 de la sección anterior, se prueba que no existe  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ .

Resolvemos el problema recurriendo a la definición  $\varepsilon - \delta$ .

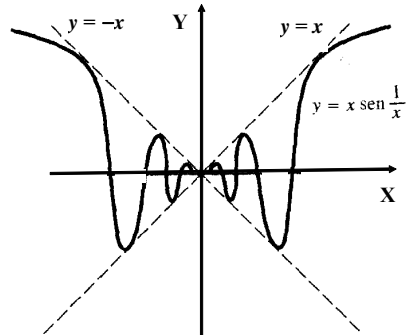
Dado  $\varepsilon > 0$ , debemos hallar  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

o sea,  $0 < |x| < \delta \Rightarrow \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$ .

Pero,  $\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x|$

Luego, para el  $\varepsilon$  dado, tomamos  $\delta = \varepsilon$ .



**PROBLEMA 2.** Mediante la definición  $\varepsilon-\delta$ , probar que

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5}{x-2} = 5$$

**Solución**

Debemos probar que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow \left| \frac{5}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon$$

**Paso 1. Sacar como factor  $|x-3|$ .**

$$\left| \frac{5}{x-2} - 5 \right| = \left| \frac{5-5(x-2)}{x-2} \right| = \left| \frac{-5(x-3)}{x-2} \right| = \frac{5}{|x-2|} |x-3|$$

**Paso 2. Acotamos  $\frac{5}{|x-2|}$ .**

Hallamos  $\beta > 0$  y  $M > 0$  tales que  $|x-3| < \beta \Rightarrow \frac{5}{|x-2|} \leq M$

Sea  $\beta = \frac{1}{2}$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} |x-3| < \beta = \frac{1}{2} &\Rightarrow -\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} + 1 < x-2 < \frac{1}{2} + 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} < x-2 < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < |x-2| < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{|x-2|} < 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{3} < \frac{5}{|x-2|} < 10$$

$$\text{Sea } M = 10. |x-3| < \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{|x-2|} < M = 10$$

Antes de continuar observemos que en este caso no podemos tomar  $\beta = 1$ , ya que de haberlo hecho, tendríamos que

$$|x-3| < 1 \Rightarrow -1 < x-3 < 1 \Rightarrow 0 < x-2 < 2$$

Pero esta última desigualdad no puede invertirse debido al 0 de la izquierda.

**Paso 3. Escogemos  $\delta$ .** Tomamos  $\delta = \text{Mínimo} \{ 1/2, \varepsilon/10 \}$ .

**Comprobando que el  $\delta$  escogido funciona.**

$$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |x-3| < \frac{1}{2} \wedge |x-2| < \frac{\varepsilon}{10}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{5}{x-2} - 5 \right| = \frac{5}{|x-2|} |x-3| < 10 \frac{\varepsilon}{10} = \varepsilon$$


---

**PROBLEMA 3.** Sea  $c$  una constante. Probar que:

$$|c| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow c = 0$$

**Solución**

Procedemos por reducción al absurdo.

Supongamos que  $c \neq 0$ . En este caso se tiene que  $|c| > 0$ . Tomando  $\varepsilon = \frac{1}{2}|c|$ , por hipótesis, se tiene que

$$|c| < \varepsilon \Rightarrow |c| < \frac{1}{2}|c| \Rightarrow 2|c| < |c| \Rightarrow 2 < 1$$

Esta contradicción pueda la tesis.

---

**PROBLEMA 4.** Unicidad del Límite.

Probar que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2 \Rightarrow L_1 = L_2$$

**Solución**

De acuerdo al problema anterior, basta probar que

$$|L_1 - L_2| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0, \tag{1}$$

ya que tendríamos:

$$L_1 - L_2 = 0 \Rightarrow L_1 = L_2$$

Probemos (1):

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ , dado  $\varepsilon/2$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$ , dado  $\varepsilon/2$  existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

Por otro lado, sumando y restando  $f(x)$  y usando la desigualdad triangular:

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \tag{4}$$

Ahora, tomando  $\delta = \text{Mínimo} \{ \delta_1, \delta_2 \}$ , por (2), (3) y (4), se tiene:

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow 0 < |x-a| < \delta_1 \text{ y } 0 < |x-a| < \delta_2$$

$$\Rightarrow |L_1 - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

**PROBLEMA 5.** Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , probar que existen  $\delta > 0$  y  $M > 0$  tales que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M$$

**Solución**

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , dado  $\varepsilon = 1$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1 \tag{1}$$

Pero, por la desigualdad triangular,

$$|f(x)| = |(f(x) - L) + L| \leq |f(x) - L| + |L| \tag{2}$$

Luego, si  $M = 1 + |L|$ , se tiene de (1) y (2)

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < 1 + |L| = M$$

**PROBLEMA 6.** Probar la ley del producto.

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ , probar que:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = LG$$

**Solución**

Debemos probar que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - LG| < \varepsilon$$

Por el problema anterior, existen  $\delta' > 0$  y  $M > 0$  tales que

$$0 < |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)| < M \tag{1}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , dado  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(|G|+1)}$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(|G|+1)} \tag{2}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ , dado  $\varepsilon_2 = \varepsilon/2M$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - G| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2M} \quad (3)$$

Por otro lado, restando y sumando  $f(x)G$  y usando la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LG| &= | [f(x)g(x) - f(x)G] + [f(x)G - LG] | \\ &\leq |f(x)[g(x) - G]| + | [f(x) - L]G | \\ &= |f(x)| |g(x) - G| + |f(x) - L| |G| \end{aligned} \quad (4)$$

Ahora, tomando  $\delta = \text{Min} \{ \delta', \delta_1, \delta_2 \}$  se tiene que  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow$

$$|f(x)g(x) - LG| \leq |f(x)| |g(x) - G| + |f(x) - L| |G| \quad (\text{por 4})$$

$$\leq M |g(x) - G| + |f(x) - L| |G| \quad (\text{por 1})$$

$$< M \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2(|G| + 1)} |G| \quad (\text{por 2 y 3})$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

**PROBLEMA 7.** Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$  y  $G \neq 0$ , probar que  $\exists \delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x)| > \frac{1}{2} |G|$$

**Solución**

Como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$  y  $G \neq 0$ , dado  $\varepsilon = \frac{1}{2} |G|$ , existe un  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - G| < \varepsilon = \frac{1}{2} |G| \quad (1)$$

Pero,

$$\begin{aligned} |G| &= |G - g(x) + g(x)| \leq |G - g(x)| + |g(x)| \Rightarrow \\ |g(x)| &\geq |G| - |G - g(x)| \end{aligned} \quad (2)$$

De (1) y (2),

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x)| \geq |G| - |G - g(x)| > |G| - \frac{1}{2} |G| = \frac{1}{2} |G|$$

**PROBLEMA 8.** Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$  y  $G \neq 0$ , probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{G}$$

**Solución**

Debemos probar que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G} \right| < \varepsilon$$

Bien, tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G} \right| &= \left| \frac{G - g(x)}{g(x)G} \right| = \left| \frac{1}{g(x)G} \right| |g(x) - G| \\ &= \frac{1}{|g(x)||G|} |g(x) - G| \end{aligned} \tag{1}$$

Por el problema anterior, existe un  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)| > \frac{1}{2}|G| \Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|G|} \tag{2}$$

De (1) y (2):  $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow$

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G} \right| < \frac{2}{|G|} \frac{1}{|G|} |g(x) - G| = \frac{2}{G^2} |g(x) - G| \tag{3}$$

Por otro lado, como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ , dado  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon G^2}{2}$  existe un  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - G| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon G^2}{2} \tag{4}$$

Luego, tomando  $\delta = \text{Mínimo} \{ \delta_1, \delta_2 \}$ , por (3) y (4) tenemos que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{G} \right| < \frac{2}{G^2} |g(x) - G| < \frac{2}{G^2} \frac{\varepsilon G^2}{2} = \varepsilon$$

**PROBLEMA 9.** Probar la ley del cociente.

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G \neq 0$ , probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{G}$$

**Solución**

Esta prueba será corta, debido a que la parte laboriosa del trabajo ya fue hecha.

Por la ley del producto y por el problema anterior

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \left[ f(x) \frac{1}{g(x)} \right] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \left[ \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} \right] \\ &= \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \left[ \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \right] = L \frac{1}{G} = \frac{L}{G}\end{aligned}$$

**PROBLEMA 10.** Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $A < L < B$ , probar que  $\exists \delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow A < f(x) < B$$

**Solución**

$$A < L < B \Rightarrow B - L > 0 \text{ y } L - A > 0.$$

Si  $\varepsilon = \text{Mínimo} \{B - L, L - A\}$ , entonces  $B - L \leq \varepsilon$  y  $L - A \leq \varepsilon$  **(1)**

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , dado  $\varepsilon = \text{Mínimo} \{B - L, L - A\}$ , existe un  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned}0 < |x - a| < \delta &\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \\ &\Rightarrow -\varepsilon + L < f(x) < \varepsilon + L \\ &\Rightarrow -(L - A) + L < f(x) < (B - L) + L \quad \text{por (1)} \\ &\Rightarrow A < f(x) < B\end{aligned}$$

**PROBLEMA 11.** Probar la ley de la raíz:

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, \text{ donde } L > 0 \text{ si } n \text{ es par.}$$

**Solución**

**Caso 1.**  $L = 0$  y  $n$  es impar.

Como  $\sqrt[n]{L} = \sqrt[n]{0} = 0$ , debemos probar que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \sqrt[n]{f(x)} \right| < \varepsilon$$

Bien, como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , para  $\varepsilon_1 = \varepsilon^n > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon_1 = \varepsilon^n \Rightarrow \left| \sqrt[n]{f(x)} \right| < \varepsilon$$

**Caso 2.**  $L > 0$  y  $n$  par o impar.

Debemos probar que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L} \right| < \varepsilon$$

Bien, por el problema anterior, con  $A = \frac{1}{2}L$  y  $B = \frac{3}{2}L$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow \frac{1}{2}L < f(x) < \frac{3}{2}L$$

y, por lo tanto,

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) > 0 \tag{1}$$

Por otro lado, usando la identidad:

$$p - q = \frac{p^n - q^n}{p^{n-1} + p^{n-2}q + \dots + pq^{n-2} + q^{n-1}}$$

con  $p = \sqrt[n]{f(x)}$  y  $q = \sqrt[n]{L}$ , se tiene

$$\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L} = \frac{f(x) - L}{\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}} + \sqrt[n]{(f(x))^{n-2}L} + \dots + \sqrt[n]{f(x)L^{n-2}} + \sqrt[n]{L^{n-1}}} \tag{2}$$

Cuando  $0 < |x - a| < \delta_1$ , por (1),  $f(x) > 0$ . Además  $L > 0$ . Luego, todas las raíces del denominador de la expresión (2) anterior son positivas. En consecuencia

$$\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}} + \sqrt[n]{(f(x))^{n-2}L} + \dots + \sqrt[n]{f(x)L^{n-2}} + \sqrt[n]{L^{n-1}} \geq \sqrt[n]{L^{n-1}}$$

Luego, cuando  $0 < |x - a| < \delta_1$ ,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}} + \sqrt[n]{(f(x))^{n-2}L} + \dots + \sqrt[n]{f(x)L^{n-2}} + \sqrt[n]{L^{n-1}}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} \tag{3}$$

De (2) y (3) obtenemos

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow \left| \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L} \right| \leq \frac{|f(x) - L|}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} |f(x) - L| \tag{4}$$

Ahora, como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , dado  $\varepsilon_1 = \varepsilon \sqrt[n]{L^{n-1}}$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \sqrt[n]{L^{n-1}} \quad (5)$$

En consecuencia, tomando  $\delta = \text{Mínimo} \{ \delta_1, \delta_2 \}$ , de (4) y (5) se tiene que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} |f(x) - L| < \frac{1}{\sqrt[n]{L^{n-1}}} \varepsilon \sqrt[n]{L^{n-1}} = \varepsilon$$

**Caso 3.**  $L < 0$  y  $n$  es impar.

Sea  $g(x) = -f(x)$ . Se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -L > 0$$

Luego, por el caso 2 y considerando que  $n$  es impar, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{g(x)} &= \sqrt[n]{-L} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{-f(x)} = \sqrt[n]{-L} \Rightarrow - \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = - \sqrt[n]{L} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} \end{aligned}$$

**PROBLEMA 12.** Probar el teorema 5.4: Si

$$1. \text{ Existen } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

2.  $f(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x$  en un intervalo abierto que contiene a  $a$ , excepto posiblemente en  $a$ ,

$$\text{Entonces } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

**Solución**

**Paso 1.** Probamos que  $0 \leq h(x) \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x)$

Sea  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ . Queremos probar que  $0 \leq L$ .

Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que  $L < 0$ . Luego,  $-L > 0$ .

Ahora, dado  $\varepsilon = \frac{1}{2}(-L)$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon = \frac{1}{2}(-L) \Rightarrow -\frac{1}{2}(-L) < h(x) - L < \frac{1}{2}(-L)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -\frac{1}{2}(-L) + L < h(x) < \frac{1}{2}(-L) + L \\ &\Rightarrow \frac{3}{2}L < h(x) < \frac{1}{2}L \Rightarrow h(x) < 0. \quad \left(\frac{1}{2}L < 0\right) \end{aligned}$$

Este último resultado contradice la hipótesis:  $0 \leq h(x)$ .

**Paso 2.** Probamos que  $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow 0 \leq g(x) - f(x) \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow a} [g(x) - f(x)] \quad (\text{paso 1})$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x) - \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

**PROBLEMA 13.** Probar el **teorema del cambio de variable**:

Si  $y = f(x)$  y  $x = g(t)$  son tales que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ,  $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = a$  y  $g(t) \neq a$  para todo  $t \neq b$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{t \rightarrow b} f(g(t)) = L$$

**Solución**

Debemos probar que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - b| < \delta \Rightarrow |f(g(t)) - L| < \varepsilon$$

Bien, como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad (1)$$

Por otro lado, como  $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = a$ , dado  $\varepsilon_1 = \delta_1 > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow |g(t) - a| < \varepsilon_1 = \delta_1 \quad (2)$$

Además, como  $g(t) \neq a$  para todo  $t \neq b$ , a la expresión (2) la podemos escribir así:

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow 0 < |g(t) - a| < \varepsilon_1 = \delta_1 \quad (3)$$

Luego, de (3) y (1) por transitividad y considerando que  $x = g(t)$ , se tiene

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow |f(g(t)) - L| < \varepsilon$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 5.2

*En los problemas del 1 al 14 probar, mediante  $\varepsilon$ - $\delta$ , el límite indicado.*

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 2} (4x-3) = 5$           | 2. $\lim_{t \rightarrow 4} (9-3t) = -3$                    | 3. $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{x}{5} + 1 \right) = \frac{3}{5}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$              | 5. $\lim_{x \rightarrow -2} x^3 = -8$                      | 6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$                         |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 6) = -3$  | 8. $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + 3x - 4) = -5$          | 9. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4}{x-1} = 2$                             |
| 10. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{6}{4-x} = -6$  | 11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{5-2x} = \frac{2}{3}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x+5} = 3$                               |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{ x +1} = 1$ | 14. $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{1+x}{x} = 4$           |   |

*En los problemas del 15 al 19 probar, mediante  $\varepsilon$ - $\delta$ , el límite indicado.*

- |  |                                    |
|--|------------------------------------|
| 15. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ , $c$ es una constante.   | 16. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ |
| 17. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ . <i>Suger.</i> : $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})$    |                                    |
| 18. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ . <i>Suger.</i> : seguir el esquema del ejemplo 4 tomando $\beta =  a /2$ |                                    |
| 19. Probar: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a}  f(x)  =  L $ .                                  |                                    |

$$\text{Sugerencia.: } \left| |f(x)| - |L| \right| \leq |f(x) - L|$$

*En los problemas del 20 al 23, mediante teorema del emparedado, probar que:*

- |  |  |
|--|--|
| 20. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$                              | 21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}}{ x +1} = 1$          |
| 22. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ 2 - \sqrt{2} \cos \left( \frac{1}{x^2} \right) \right] = 0$ | 23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ x+1  -  x-1 }{\sqrt{3x^2+1}} = 0$ |

**SECCION 5.3**

**LIMITES TRIGONOMETRICOS**

**TEOREMA 5.7.**  $\lim_{\theta \rightarrow a} \sin \theta = \sin a$ ,  $\lim_{\theta \rightarrow a} \cos \theta = \cos a$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$

**Demostración**

Debemos probar que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que:

(1)  $0 < |\theta - a| < \delta \Rightarrow |\sin \theta - \sin a| < \varepsilon$   
 y

(2)  $0 < |\theta - a| < \delta \Rightarrow |\cos \theta - \cos a| < \varepsilon$

Observemos el triángulo rectángulo de la figura (el negreado). Los extremos de la hipotenusa son los puntos:

$L(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$  y  $L(a) = (\cos a, \sin a)$ .

La longitud del cateto vertical es  $|\sin \theta - \sin a|$

La longitud del cateto horizontal es  $|\cos \theta - \cos a|$

La longitud de la hipotenusa es  $d(L(a), L(\theta))$ ,

La longitud del arco entre  $L(a)$  y  $L(\theta)$  es  $|\theta - a|$ .

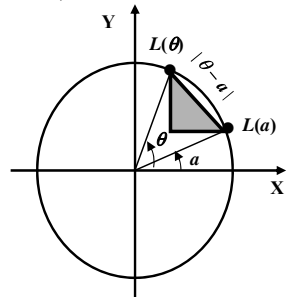
La longitud de la hipotenusa es menor que el arco entre  $L(a)$  y  $L(\theta)$ . Esto es,

$$d(L(\theta), L(a)) < |\theta - a|. \tag{3}$$

La longitud de cada cateto es menor que longitud de la hipotenusa. Luego, por (3),

$$|\sin \theta - \sin a| < |\theta - a| \quad \text{y} \quad |\cos \theta - \cos a| < |\theta - a|.$$

Para el  $\varepsilon > 0$  dado, tomamos  $\delta = \varepsilon$ . Las expresiones (1) y (2) quedan satisfechas.

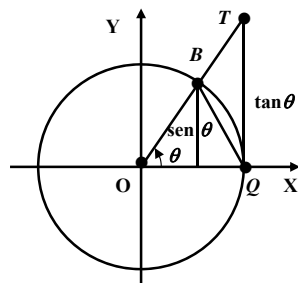


**TEOREMA 5.8**  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$

**Demostración**

**Paso 1.**  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$

Sea  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Por tanto,  $\sin \theta > 0$



Observando la figura se ve que:

$$\text{Area del } \triangle OQB < \text{Area del sector circular } OQB < \text{Area del } \triangle OQT.$$

Pero

$$\text{Area del } \triangle OQB = \frac{(1) \operatorname{sen} \theta}{2} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{2}$$

$$\text{Area del sector circular } OQB = \frac{1}{2}(1)^2(\theta) = \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Area del } \triangle OQT = \frac{1}{2}(1) \tan \theta = \frac{\tan \theta}{2}$$

Luego,

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\tan \theta}{2}, \Rightarrow \operatorname{sen} \theta < \theta < \tan \theta$$

Dividimos entre  $\operatorname{sen} \theta$ . (recordar que  $\operatorname{sen} \theta > 0$ ).

$$1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen} \theta} < \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow \cos \theta < \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} < 1 \quad (\text{invirtiendo fracciones})$$

$$\text{Pero } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} 1 = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \cos \theta = \cos 0 = 1 \quad (\text{Teo. anterior})$$

$$\text{Luego, por el teorema del emparedado, } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$$

**Parte 2.**  $\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$

Sea  $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ , y por tanto,  $\operatorname{sen} \theta < 0$ .

Si  $\alpha = -\theta$ , entonces  $\alpha > 0$  y  $\alpha \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow \theta \rightarrow 0^-$ . Luego,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{-\operatorname{sen} \theta}{-\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{-\theta} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1$$

**EJEMPLO 1.** Probar que: 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} = a$     2.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot ax = \frac{1}{a}$ ,  $a \neq 0$

**Solución**

Si  $\theta = ax$ , entonces  $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \theta \rightarrow 0$ . Luego,

$$\begin{aligned} 1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} (a) \frac{\tan ax}{ax} = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{ax} \frac{1}{\cos ax} = a \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \frac{1}{\cos \theta} \\ &= a \left[ \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \right] \left[ \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \theta} \right] = a[1] \left[ \frac{1}{1} \right] = a \end{aligned}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} x \cot ax = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan ax}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x}} = \frac{1}{a}$$


---

**TEOREMA 5.9**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$

**Demostración**

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x} &= \frac{1 - \cos x}{x} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right] \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right] = [1] \left[ \frac{0}{2} \right] = 0.$$


---

**EJEMPLO 2.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin(x - \pi/6)}{\cos x - \sqrt{3}/2}$

**Solución**

Sea  $y = x - \frac{\pi}{6}$ . Se tiene que:  $x = y + \pi/6$ ,  $x \rightarrow \pi/6 \Leftrightarrow y \rightarrow 0$  y

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\sin(x - \pi/6)}{\cos x - \sqrt{3}/2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\cos(y + \pi/6) - \sqrt{3}/2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{(\sqrt{3}/2)\cos y - (1/2)\sin y - \sqrt{3}/2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{(\sqrt{3}/2)[\cos y - 1] - (1/2)\sin y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin y}{y}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\cos y - 1}{y} - \frac{1}{2} \frac{\sin y}{y}} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{3}/2)(0) - (1/2)(1)} = -2 \end{aligned}$$


---

## PROBLEMAS RESUELTOS 5.3

---

**PROBLEMA 1.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi}{2} x$

**Solución**

Si  $t = x - 1$ , entonces  $x = t + 1$  y  $t \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow 1$ . Luego,

$$\begin{aligned} (1-x) \tan \frac{\pi}{2} x &= -t \tan \frac{\pi}{2} (t+1) = -t \tan \left( \frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= t \cot \left( \frac{\pi}{2} t \right) \end{aligned} \quad (\text{Id. trig. 19})$$

Luego, tomando en cuenta la parte 2 del ejemplo 1,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi}{2} x = \lim_{t \rightarrow 0} t \cot \left( \frac{\pi}{2} t \right) = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$


---

**PROBLEMA 2.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

**Solución**

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} &= \frac{(\cos mx - \cos nx)(\cos mx + \cos nx)}{x^2 (\cos mx + \cos nx)} = \frac{\cos^2 mx - \cos^2 nx}{x^2 (\cos mx + \cos nx)} \\ &= \frac{(1 - \sin^2 mx) - (1 - \sin^2 nx)}{x^2 (\cos mx + \cos nx)} = \frac{\sin^2 nx - \sin^2 mx}{x^2 (\cos mx + \cos nx)} \\ &= \left[ \frac{\sin^2 nx}{x^2} - \frac{\sin^2 mx}{x^2} \right] \frac{1}{\cos mx + \cos nx} \\ &= \left[ n^2 \left( \frac{\sin nx}{nx} \right)^2 - m^2 \left( \frac{\sin mx}{mx} \right)^2 \right] \frac{1}{\cos mx + \cos nx} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ n^2 \left( \frac{\sin nx}{nx} \right)^2 - m^2 \left( \frac{\sin mx}{mx} \right)^2 \right] \frac{1}{\cos mx + \cos nx} \\ &= \left[ n^2 (1)^2 - m^2 (1)^2 \right] \frac{1}{1+1} = \frac{n^2 - m^2}{2} \end{aligned}$$


---

**PROBLEMA 3.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a \operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} a}{a \cos x - x \cos a}$

**Solución**

Si  $x = y + a$ , entonces  $y = x - a$  y  $x \rightarrow a \Leftrightarrow y \rightarrow 0$ . Luego,

$$\begin{aligned} \frac{a \operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} a}{a \cos x - x \cos a} &= \frac{a \operatorname{sen}(y+a) - (y+a)\operatorname{sen} a}{a \cos(y+a) - (y+a)\cos a} \\ &= \frac{(a \operatorname{sen} y \cos a + a \cos y \operatorname{sen} a) - (y \operatorname{sen} a + a \operatorname{sen} a)}{(a \cos y \cos a - a \operatorname{sen} y \operatorname{sen} a) - (y \cos a + a \cos a)} \\ &= \frac{(a \operatorname{sen} y \cos a - y \operatorname{sen} a) + (a \cos y \operatorname{sen} a - a \operatorname{sen} a)}{(a \cos y \cos a - a \cos a) - (a \operatorname{sen} y \operatorname{sen} a + y \cos a)} \\ &= \frac{(a \operatorname{sen} y \cos a - y \operatorname{sen} a) + a \operatorname{sen} a (\cos y - 1)}{a \cos a (\cos y - 1) - (a \operatorname{sen} y \operatorname{sen} a + y \cos a)} \\ &= \frac{\frac{(a \operatorname{sen} y \cos a - y \operatorname{sen} a)}{y} + \frac{(a \operatorname{sen} a)(\cos y - 1)}{y}}{\frac{(a \cos a)(\cos y - 1)}{y} - \frac{(a \operatorname{sen} y \operatorname{sen} a + y \cos a)}{y}} \\ &= \frac{\left( a \frac{\operatorname{sen} y}{y} \cos a - \operatorname{sen} a \right) + (a \operatorname{sen} a) \frac{(\cos y - 1)}{y}}{(a \cos a) \frac{(\cos y - 1)}{y} - \left( a \frac{\operatorname{sen} y}{y} \operatorname{sen} a + \cos a \right)} \end{aligned}$$

En esta última expresión, tomando el límite cuando  $y \rightarrow 0$ , se tiene

$$\frac{(a(1)\cos a - \operatorname{sen} a) + (a \operatorname{sen} a)(0)}{(a \cos a)(0) - (a(1)\operatorname{sen} a + \cos a)} = \frac{a \cos a - \operatorname{sen} a}{-a \operatorname{sen} a - \cos a} = \frac{\operatorname{sen} a - a \cos a}{a \operatorname{sen} a + \cos a}$$

Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a \operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} a}{a \cos x - x \cos a} = \frac{\operatorname{sen} a - a \cos a}{\cos a + a \operatorname{sen} a}$$

**PROBLEMA 4.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x^2 - a^2}$

**Solución**

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x^2 - a^2} = \frac{[\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} a][\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a]}{[x+a][x-a]}$$

$$= \frac{\left[ 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+a}{2}\right)\cos\left(\frac{x-a}{2}\right) \right] \left[ 2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right) \right]}{[x+a][x-a]} \quad (\text{Ident. 40 y 41})$$

Si  $y = \frac{x-a}{2}$ , entonces  $x-a = 2y$ ,  $x+a = 2(y+a)$ ,  $\frac{x+a}{2} = y+a$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x^2 - a^2} &= \frac{\left[ 2\operatorname{sen}(y+a)\cos(y) \right] \left[ 2\cos(y+a)\operatorname{sen}(y) \right]}{[2(y+a)][2y]} \\ &= \left[ \frac{\operatorname{sen}(y+a)\cos(y)}{y+a} \right] \left[ \cos(y+a)\frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \right] \end{aligned}$$

Pero,  $x \rightarrow a \Leftrightarrow y \rightarrow 0$ . Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 a}{x^2 - a^2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[ \frac{\operatorname{sen}(y+a)\cos(y)}{y+a} \right] \left[ \cos(y+a)\frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \right] \\ &= \left[ \frac{\operatorname{sen}(a)(1)}{a} \right] \left[ \cos(a)(1) \right] = \frac{\operatorname{sen} a \cos a}{a} = \frac{\operatorname{sen} 2a}{2a} \end{aligned}$$

**PROBLEMA 5.** Hallar  $\lim_{\theta \rightarrow \pi/3} \frac{2\cos^2 \theta - 5\cos \theta + 2}{2\cos^2 \theta + 3\cos \theta - 2}$ .

**Solución**

Si  $y = \cos \theta$ , entonces  $\theta \rightarrow \pi/3 \Leftrightarrow y \rightarrow 1/2$ .

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \pi/3} \frac{2\cos^2 \theta - 5\cos \theta + 2}{2\cos^2 \theta + 3\cos \theta - 2} &= \lim_{y \rightarrow 1/2} \frac{2y^2 - 5y + 2}{2y^2 + 3y - 2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1/2} \frac{(2y-1)(y-2)}{(2y-1)(y+2)} = \lim_{y \rightarrow 1/2} \frac{y-2}{y+2} = \frac{1/2 - 2}{1/2 + 2} = -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 5.3

En los problemas del 1 al 23 hallar el límite indicado.

- $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \pi}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2}$

4.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} [\tan 2x - \sec 2x]$

5.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{\sin t}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x/2)}{\sin x}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(x-1)}{x^2 - 2x + 1}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x - \sin 3x}$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

10.  $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$

11.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$

12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 - \sqrt{1 + \cos x}}}{\sin^2 x}$

13.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1 - \sqrt{x}}$

14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos x}}{x^2}$

15.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{(x - \pi/2)^2}$

16.  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\tan^5 \theta - \tan^3 \theta}$

17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\tan x}$

18.  $\lim_{\theta \rightarrow a} \frac{\sin \theta - \sin a}{\sin(\theta/2) - \sin(a/2)}$

19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) - \cos(a-x)}{x}$

20.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{\tan(a+x) - \tan(a-x)}$

21.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}{2 \sin^2 x + \sin x - 1}$

22.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{2 \tan^2 x - \tan x - 1}{2 \tan^2 x - 3 \tan x + 1}$

**SECCION 5.4**

**CONTINUIDAD**

Geoméricamente, la continuidad es fácil de explicar. Una función es continua si su gráfico no tiene saltos o interrupciones. En otras palabras, si su gráfico puede ser trazado sin levantar el lápiz del papel.

**DEFINICION.** Una función  $f$  es **continua en un punto  $a$**  si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

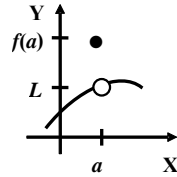
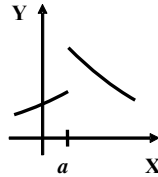
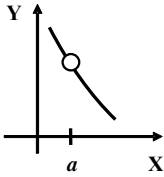
Esta definición es equivalente al cumplimiento de las tres condiciones siguientes:

1.  $f$  está definida en  $a$  ( $\exists f(a)$ )
2.  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

La definición de continuidad en  $a$ , al hablarnos de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , implícitamente exige que  $f$  debe estar definida en un intervalo abierto que contenga a  $a$ .

**DEFINICION.** Diremos que  $f$  es **discontinua** en el punto  $a$  o que  $a$  es un **punto de discontinuidad de  $f$**  si  $f$  no es continua en  $a$ . Esto equivale a decir que al menos una de estas tres condiciones exigidas en la definición no se cumple. Esto es:

1.  $f$  no está definida en  $a$     2. No existe límite en  $a$     3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$



Si  $f$  es discontinua en  $a$  y existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , diremos que la **discontinuidad en  $a$  es removible**. Se llama así debido a que se puede redefinir a  $f$  en  $a$  de modo que la discontinuidad es eliminada. Es claro que la redefinición debe ser del modo siguiente:

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

La **discontinuidad es esencial** si no existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . En este caso no hay modo de salvar la discontinuidad.

La continuidad se expresa también en términos de  $\varepsilon$ - $\delta$  como sigue (ver el problema resuelto 3):

$$f \text{ es continua en } a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

**EJEMPLO 1.** a. El teorema 5.3 nos dice que toda función racional (en particular, todo polinomio) es continua en cualquier punto  $a$  de su dominio.

b. El teorema 5.7 nos dice que las funciones seno y coseno son continuas en cualquier punto  $a$  de  $\mathbb{R}$ .

**EJEMPLO 2.** Sea  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4}, & \text{si } x \neq 4 \\ 6, & \text{si } x = 4 \end{cases}$

1. Probar que  $f$  tiene una discontinuidad removible en  $a = 4$ .
2. Redefinir  $f$  para remover la discontinuidad.
3. Probar que  $f$  es continua en cualquier punto  $a \neq 4$ .

**Solución**

1. La primera condición de continuidad se cumple, ya que  $f$  está definida en 4. En efecto:  $f(4) = 6$ .

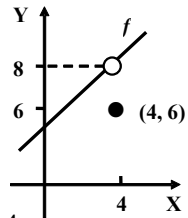
La segunda condición también se cumple. En efecto,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x+4) = 8$$

Pero, la tercera condición no se cumple, ya que

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 8 \neq 6 = f(4)$$

En consecuencia,  $f$  tiene una discontinuidad removible en  $a = 4$ .



2.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4}, & \text{si } x \neq 4 \\ 8, & \text{si } x = 4 \end{cases}$

3. Para los  $x \neq 4$ ,  $f$  es la función racional  $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$ , cuyo denominador no se anula en ningún  $x \neq 4$ . Luego, por el ejemplo anterior,  $f$  es continua en cualquier punto  $x \neq 4$ .

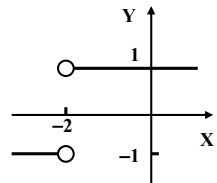
**EJEMPLO 3.** Probar que la función  $g(x) = \frac{x+2}{|x+2|}$  tiene una discontinuidad esencial en  $-2$ .

**Solución**

Calculemos los límites unilaterales.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} (1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+2}{-(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} (-1) = -1$$



Como estos límites unilaterales son distintos, concluimos que  $g$  no tiene límite en el punto  $-2$ . En consecuencia  $g$  tiene una discontinuidad esencial en este punto.

### CONTINUIDAD LATERAL

**DEFINICION.** 1. Una función  $f$  es **continua por la derecha en el punto  $a$**  si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

2. Una función  $f$  es **continua por la izquierda en un punto  $a$**  si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Es evidente que:

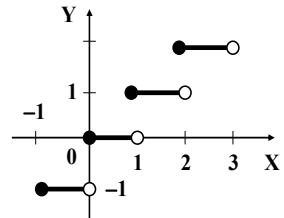
$$f \text{ es continua en } a \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ es continua por la izquierda en } a \\ f \text{ es continua por la derecha en } a \end{cases}$$

**EJEMPLO 4.** La función parte entera  $f(x) = [x]$  es continua por la derecha, pero discontinua por la izquierda en cualquier entero  $n$ .

En efecto, tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n = f(n)$$

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n - 1 \neq f(n)$$



**EJEMPLO 5.** Sea la función del ejemplo 3:  $g(x) = \frac{x+2}{|x+2|}$

1. Redefinir  $g$  para que ésta sea continua por la derecha en  $a = -2$
2. Redefinir  $g$  para que ésta sea continua por la izquierda en  $a = -2$

**Solución**

$$1. \ g_1(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{|x+2|}, & \text{si } x \neq -2 \\ 1, & \text{si } x = -2 \end{cases} \qquad 2. \ g_2(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{|x+2|}, & \text{si } x \neq -2 \\ -1, & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

**EJEMPLO 6.** Probar que la función valor absoluto  $f(x) = |x|$  es continua en cualquier punto de  $\mathbb{R}$ .

**Solución**

Sea  $a$  un punto cualquiera de  $\mathbb{R}$ .

**Caso 1.  $a = 0$ :**  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|$ , ya que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = |0| \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = -0 = 0 = |0|$$

**Caso 2.  $a \neq 0$ :**  $f(x) = |x|$  es continua en  $a$  debido a que, cerca de  $a$ , la función  $f$  coincide con el polinomios  $p(x) = x$ , si  $a > 0$ ; o con  $q(x) = -x$ , si  $a < 0$ .

---

## CONTINUIDAD EN INTERVALOS

- DEFINICION.**
1. La función  $f$  es **continua en el intervalo abierto  $(a, b)$**  si  $f$  es continua en todo punto de este intervalo.
  2. La función  $f$  es **continua en el intervalo  $[a, b)$**  si  $f$  es continua en el intervalo abierto  $(a, b)$  y  $f$  es continua por la derecha en  $a$ .
  3. La función  $f$  es **continua en el intervalo  $(a, b]$**  si  $f$  es continua en el intervalo abierto  $(a, b)$  y  $f$  es continua por la izquierda en  $b$ .
  4. La función  $f$  es **continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$**  si  $f$  es continua en el intervalo abierto  $(a, b)$  y  $f$  es continua a la derecha en  $a$  y continua a la izquierda en  $b$ .

- EJEMPLO 7.**
- a. Una función polinomial y las funciones seno y coseno son continuas en el intervalo abierto  $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ ; o sea, son continuas en todo su dominio.
  - b. La función parte entera  $f(x) = [x]$  es continua en todos los intervalos de la forma  $[n, n+1)$ , donde  $n$  es un entero.
- 

**EJEMPLO 8.** Probar que la función  $f(x) = \sqrt{x}$  es continua en su dominio; o sea, es continua en el intervalo  $[0, +\infty)$ .

### Solución

Debemos probar que  $f$  es continua en todo punto  $a$  del intervalo abierto  $(0, +\infty)$  y que  $f$  es continua por la derecha en  $a = 0$ .

Bien, si  $a > 0$ , por la ley de la raíz,  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} x} = \sqrt{a}$ .

Esto es, la función  $f(x) = \sqrt{x}$  es continua en  $a$ .

Por otro lado, si  $a = 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = \sqrt{0} = 0$

Esto es, la función  $f(x) = \sqrt{x}$  es continua por la derecha en 0.

---

## CONTINUIDAD Y OPERACIONES CON FUNCIONES

Las leyes de los límites, enunciadas en el teorema 5.2, nos dicen que el proceso de tomar límite respeta las operaciones algebraicas. Esta propiedad se traslada a la continuidad y se obtiene que ésta también respeta las operaciones algebraicas.

Gracias a este resultado podemos construir complicadas funciones continuas a partir de funciones simples.

**TEOREMA 2.10** Sea  $c$  una constante y sean  $f$  y  $g$  dos funciones continuas en el punto  $a$ . Entonces las siguientes funciones son continuas en  $a$ .

$$1. f \pm g \quad 2. cf \quad 3. fg \quad 4. \frac{f}{g}, \text{ si } g(a) \neq 0$$

### Demostración

Estos resultados son consecuencias inmediatas de las leyes de los límites correspondientes. Así, (1) es consecuencia de la ley de la suma. En efecto:

$$\text{Por ser } f \text{ y } g \text{ continuas en } a \text{ se tiene: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \pm \left[ \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right] = f(a) \pm g(a)$$

Esto nos dice que  $f \pm g$  es continua en  $a$ .

**EJEMPLO 9.** Probar que las funciones trigonométricas son continuas en su dominio.

### Solución

Por el ejemplo 1 ya sabemos que el seno y el coseno tienen la propiedad indicada. Veamos las otras.

Como  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  es el cociente de dos funciones continuas, entonces, por la parte 4 del teorema anterior, la función  $y = \tan x$  es continua en todos los puntos  $x$  tales que  $\cos x \neq 0$ , que son precisamente los puntos del dominio de  $y = \tan x$ .

En forma análoga se procede con  $y = \cot x$ ,  $y = \sec x$ ,  $y = \operatorname{cosec} x$ .

El siguiente resultado es consecuencia de la ley de la raíz y su demostración es similar a la dada en el ejemplo 8.

**TEOREMA 5.11** 1. Si  $n$  es **par**, entonces la función  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  es continua en el intervalo  $[0, +\infty)$ ; o sea, es continua en todo su dominio.

2. Si  $n$  es **impar**, entonces la función  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  es continua en  $\mathbb{R}$ ; o sea, es continua en todo su dominio.

### CATALOGO DE FUNCIONES CONTINUAS

En el capítulo anterior, para definir  $a^x$  con  $x$  irracional, nos guió la idea de conseguir que la función exponencial  $f(x) = a^x$  sea continua en todo su dominio, que es  $\mathbb{R}$ . Por tal razón, agregamos a nuestra lista de funciones continuas a la función exponencial.

Por otro lado, también afirmamos que **la función inversa de una función continua es continua**. Esta afirmación la podemos justificar intuitivamente, del modo siguiente. La gráfica de una función continua  $f$  no tiene saltos ni interrupciones. La gráfica de la inversa  $f^{-1}$  se obtiene reflejando la gráfica de  $f$  en la recta diagonal  $y = x$ . En consecuencia, la gráfica de  $f^{-1}$  tampoco tiene saltos o interrupciones. Esto nos dice que  $f^{-1}$  es continua. Este resultado es importante, por lo que lo hacemos resaltar presentándolo en el siguiente teorema, cuya demostración formal la omitimos.

**TEOREMA 5.12** Sea  $f$  una función definida en un intervalo  $I$ , donde  $f$  es inyectiva. Si  $f$  es continua en  $I$ , entonces la función inversa  $f^{-1}$  es continua en el  $\text{rang}(f)$ .

El resultado anterior nos permite concluir que la función logaritmo  $y = \log_a x$  es continua, por ser inversa de la función exponencial,  $y = a^x$ . En forma análoga, concluimos que las funciones trigonométricas inversas son continuas.

A continuación presentamos un pequeño catálogo de funciones continuas.

Las siguientes funciones son continuas en su dominio:

- |  |                                     |
|--|-------------------------------------|
| <b>1. Polinomios</b>                         | <b>2. Funciones racionales</b>      |
| <b>3. Funciones radicales</b>                | <b>4. Funciones trigonométricas</b> |
| <b>5. Funciones trigonométricas inversas</b> | <b>6. Funciones exponenciales</b>   |
| <b>7. Funciones logarítmicas</b>             | <b>8. Función valor absoluto</b>    |

El siguiente teorema es consecuencia del teorema de cambio de variable o teorema del límite de una composición de funciones. La demostración la presentamos en el problema resuelto 4.

**TEOREMA 5.13** Teorema de Sustitución.

Si  $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = L$  y  $f$  es continua en  $L$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow b} f(g(t)) = f(L) = f\left(\lim_{t \rightarrow b} g(t)\right)$$

- EJEMPLO 10.** a. Si  $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = L$ , probar que  $\lim_{t \rightarrow b} e^{g(t)} = e^L$
- b. Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$       c. Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left( \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} \right)$

**Solución**

a. Sigue inmediatamente del teorema anterior, tomando en cuenta que la función exponencial  $f(x) = e^x$  es continua.

b. Tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + 1)(e^x - 1)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^x + 1 = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

c. Tomando en cuenta que la función logarítmica  $f(x) = \ln x$  es continua, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left( \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} \right) = \ln \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} \right) = \ln(2) = \ln 2$$

Una consecuencia del teorema anterior, que es inmediata pero de importancia capital, es el siguiente resultado, que dice que la continuidad también respeta la operación de composición de funciones.

**TEOREMA 5.14** Si  $g$  es continua en  $b$  y  $f$  es continua en  $g(b)$ , entonces la función compuesta  $f \circ g$  es continua en  $b$ .

**Demostración**

Por ser  $g$  continua en  $b$  se tiene que  $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = g(b)$

Teniendo en cuenta el teorema anterior tenemos:

$$\lim_{t \rightarrow b} f(g(t)) = f\left(\lim_{t \rightarrow b} g(t)\right) = f(g(b)) = (f \circ g)(b).$$

Esto nos dice que  $f \circ g$  es continua en  $b$ .

**EJEMPLO 11.** Probar que la función  $h(x) = |\ln x|$  es continua en  $(0, +\infty)$ .

**Solución**

Si  $g(x) = \ln x$  y  $f(x) = |x|$ , tenemos que  $h = f \circ g$ . En efecto,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln x) = |\ln x| = h(x).$$

La función  $g(x) = \ln x$  es una función continua en  $(0, +\infty)$  y que la función valor absoluto  $f(x) = |x|$  es continua en  $\mathbb{R}$ . Por tanto, por el teorema anterior,  $h = f \circ g$  también es continua en  $(0, +\infty)$ .

Terminamos esta sección enunciando un teorema que proporciona una propiedad importante de las funciones continuas. Omitimos la demostración por estar fuera de alcance del presente texto.

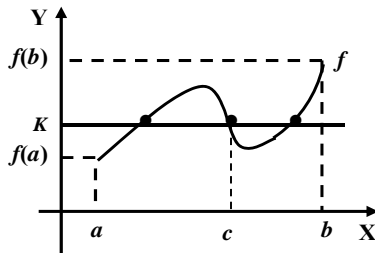
**TEOREMA 2.15** Teorema del Valor Intermedio.

Si  $f$  es una función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  y si  $K$  es un número que está estrictamente entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , o sea

$$f(a) < K < f(b) \quad \text{ó} \quad f(b) < K < f(a),$$

entonces **existe un número  $c$  en  $(a, b)$  tal que  $f(c) = K$ .**

Gráficamente, este teorema nos dice que cualquier recta horizontal  $y = K$  que está comprendida entre las rectas horizontales  $y = f(a)$  y  $y = f(b)$  debe cortar al gráfico de  $f$  en, por lo menos, un punto  $(c, f(c))$ , donde  $a < c < b$ .



En el siguiente ejemplo usamos este teorema para localizar las raíces de una ecuación.

**EJEMPLO 12.** Dada la ecuación  $x^3 + 3x - 5 = 0$

- a. Probar que esta ecuación tiene una raíz entre 1 y 2.
- b. Hallar una aproximación de esta raíz con un error menor que 0,1.

**Solución**

a. La función  $f(x) = x^3 + 3x - 5$ , por ser un polinomio, es continua en todo  $\mathbb{R}$  y, en particular, es continua en el intervalo cerrado  $[1, 2]$ .

Por otro lado, tenemos que:

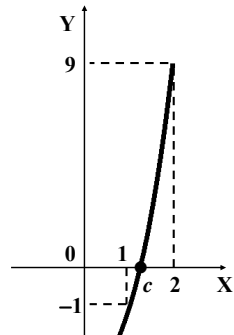
$$f(1) = 1^3 + 3(1) - 5 = -1 \quad \text{y} \quad f(2) = 2^3 + 3(2) - 5 = 9$$

Vemos que  $f(1)$  es negativo y  $f(2)$  positivo.

Luego,  $f(1) < 0 < f(2)$  y, por el teorema del valor intermedio con  $K = 0$ , existe un  $c$  entre 1 y 2 tal que  $f(c) = 0$ ; esto es,

$$\exists c \text{ tal que } 1 < c < 2 \quad \text{y} \quad c^3 + 3c - 5 = 0.$$

Es decir  $c$  es una raíz de la ecuación dada.



b. Como una primera aproximación a la raíz podemos escoger a 1 ó a 2. Elegimos a 1 por estar  $f(1) = -1$  más cerca de 0 que  $f(2) = 9$ . Esta escogencia de 1 tiene un error menor que 1. Es decir,  $|1 - c| < 1$ .

Para conseguir una mejor aproximación, volvemos a apoyarnos en el teorema del valor intermedio. Para esto, subdividimos el intervalo  $[1, 2]$  en los 10 intervalos:

$$[1, 1.1], [1.1, 1.2], [1.2, 1.3], \dots, [1.9, 2].$$

Evaluamos  $f$  en los extremos de estos intervalos. De éstos tomamos uno tal que la evaluación de  $f$  en sus extremos tenga signos contrarios. En nuestro caso, este intervalo es  $[1.1, 1.2]$ , ya que  $f(1.1) = -0.369$  y  $f(1.2) = 0.328$ . Esto significa que  $1.1 < c < 1.2$ . Como una segunda aproximación a  $c$  podemos escoger a 1.1 ó a 1.2. Elegimos a 1.1. Esta aproximación tiene un error menor que 0.1.

Si se quiere mejorar la aproximación se repite el proceso.

## PROBLEMAS RESUELTOS 5.4

**PROBLEMA 1.** Hallar  $k$  sabiendo que la siguiente función es continua es  $-2$ .

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } x \leq -2 \\ kx^2 - 2x, & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

### Solución

La función  $f$  debe ser continua por la derecha y por la izquierda en  $-2$ . Pero,  $f$  es continua por la izquierda en  $-2 \Leftrightarrow f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} x^3 = (-2)^3 = -8$

$f$  es continua por la derecha en  $-2 \Leftrightarrow f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} kx^2 - 2x = k(-2)^2 - 2(-2) = 4k + 4$

Se debe cumplir que:  $4k + 4 = -8 \Rightarrow 4k = -12 \Rightarrow k = -3$

**PROBLEMA 2.** Probar que:

$f$  es continua en  $a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

### Solución

Por definición,  $f$  es continua en  $a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow$

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon) \quad (1)$$

( $\Rightarrow$ ) Por ser  $f$  continua en  $a$ , se cumple (1) y, además,  $f$  está definida en  $a$ . En esta situación podemos eliminar el requerimiento  $0 < |x - a|$ , ya que para  $x = a$  se cumple que  $|f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ . Eliminado este requerimiento, (1) se convierte en:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon) \quad (2)$$

( $\Leftarrow$ ) Es obvio, ya que (2)  $\Rightarrow$  (1).

**PROBLEMA 3.** Probar que si  $f$  es continua en  $a$  y  $f(a) > 0$ , entonces existe un intervalo abierto  $(a - \delta, a + \delta)$  tal que

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta).$$

**Solución**

Por ser  $f$  continua en  $a$ , para  $\varepsilon = \frac{1}{2} f(a)$  existe un  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta &\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon = \frac{1}{2} f(a) && \Rightarrow \\ -\delta < x - a < \delta &\Rightarrow -\frac{1}{2} f(a) < f(x) - f(a) < \frac{1}{2} f(a) && \Rightarrow \\ a - \delta < x < a + \delta &\Rightarrow \frac{1}{2} f(a) < f(x) < \frac{3}{2} f(a) \end{aligned}$$

Por tanto, por ser  $\frac{1}{2} f(a) > 0$ , tenemos:

$$a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > 0$$

**PROBLEMA 4.** Probar el teorema 5.13.

Si  $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = L$  y  $f$  es continua en  $L$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow b} f(g(t)) = f(L) = f\left(\lim_{t \rightarrow b} g(t)\right)$$

**Solución**

Debemos probar que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow |f(g(t)) - f(L)| < \varepsilon$$

Bien, como  $f$  es continua en  $L$ , para el  $\varepsilon > 0$  dado, existe un  $\delta_1 > 0$  tal que

$$|x - L| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(L)| < \varepsilon \quad (1)$$

Por otra parte, como  $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = L$ , para  $\varepsilon_1 = \delta_1$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow |g(t) - L| < \varepsilon_1 = \delta_1 \quad (2)$$

De (1) y (2), tomando  $x = g(t)$ , se tiene que

$$0 < |t - b| < \delta \Rightarrow |f(g(t)) - f(L)| < \varepsilon$$


---

**PROBLEMA 5.** Sea  $f$  una función con dominio  $\mathbb{R}$  tal que

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Si  $f$  es continua en 0, probar que  $f$  es continua en todo punto  $a \in \mathbb{R}$ .

**Solución**

Debemos probar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

En primer lugar tenemos que  $f(0) = 0$ . En efecto,

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Por otro lado, por ser  $f$  continua en 0,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ .

Ahora bien, haciendo el cambio de variable  $x = a + h$  se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(a) + f(h)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(a) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(a) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(a) + 0 = f(a). \end{aligned}$$


---

**PROBLEMA 6.** Teorema del Punto Fijo.

Sea  $f$  una función continua en el intervalo cerrado  $[0, 1]$ . Probar:

$$0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow f \text{ tiene un punto fijo. Es decir,}$$

$$\exists c \in [0, 1] \text{ tal que } f(c) = c$$

**Solución**

**Caso 1.**  $f(0) = 0$  ó  $f(1) = 1$ .

En este caso, tomamos  $c = 0$  ó  $c = 1$  y la proposición se cumple.

**Caso 2.**  $f(0) \neq 0$  y  $f(1) \neq 1$ .

Sea  $g(x) = x - f(x)$ . Por ser  $f$  continua en  $[0, 1]$ ,  $g$  también lo es. Además,

$$g(0) = 0 - f(0) = -f(0) < 0 \quad \text{y} \quad g(1) = 1 - f(1) > 0$$

Luego, por el teorema del valor intermedio, existe un  $c$  en  $(0, 1)$  tal que

$$g(c) = 0 \Rightarrow c - f(c) = 0 \Rightarrow f(c) = c.$$


---

## PROBLEMAS PROPUESTOS 5.4

---

1. Probar que la función  $f$  es continua en el 2. 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{si } x \neq 2 \\ 4, & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

2. Sea  $g(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ . Definir  $g(0)$  para que la función  $g$  sea continua en 0.

3. Probar que la siguiente función es discontinua en el punto 3 y que 3 es el único punto de discontinuidad.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & \text{si } x < 3 \\ 4, & \text{si } x = 3 \\ -x + 8, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

*En los problemas del 4 al 11, hallar los puntos de discontinuidad de las funciones dadas, indicando el tipo de discontinuidad.*

4.  $f(x) = \frac{1}{x}$

5.  $g(x) = \frac{1}{x+2}$

6.  $h(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

7.  $f(x) = \frac{x-1}{x-5}$

8.  $g(x) = \frac{x+2}{(x-3)(x+8)}$

9.  $h(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x-2}}$

10.  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{|x-3|}$

11.  $g(x) = \frac{|x-1|}{(x-1)^3}$

*En los problemas del 12 al 15, graficar la función dada y localizar, mirando el gráfico, los puntos de discontinuidad.*

12.  $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } x < 3 \\ 1, & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 4 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

13.  $g(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{si } x < -2 \\ 2x-1, & \text{si } -2 \leq x < 4 \\ -\frac{x}{2}+2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

14.  $h(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2}+1, & \text{si } x < 2 \\ 2x-3, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

15.  $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{1}{x+1}, & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

*En los problemas del 16 al 19, hallar  $a$  y  $b$  para que la función dada sea continua en su dominio.*

16.  $g(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } x < -1 \\ ax+b, & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ 2, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

17.  $h(x) = \begin{cases} -\sin^2 x, & \text{si } x < \pi/4 \\ ax+b, & \text{si } \pi/4 \leq x \leq \pi/3 \\ \cos^2 x, & \text{si } x > \pi/3 \end{cases}$

$$18. f(x) = \begin{cases} -2\text{sen } x, & \text{si } x \leq -\pi/2 \\ a \text{ sen } x + b, & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \text{cos } x, & \text{si } x \geq \pi/2 \end{cases} \quad 19. g(x) = \begin{cases} a - x^2 \text{sen } \frac{\pi}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ b, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En los problemas del 20 al 25, hallar el conjunto de puntos donde la función dada es discontinua.

20.  $f(x) = [x + 1/2]$

21.  $g(x) = [x/4]$

22.  $h(x) = 1/[x]$

23.  $g(x) = [\sqrt{1-x^2}]$

24.  $g(x) = 1 - x + [x] - [1-x]$ . Sugerencia:  $g(x) = \begin{cases} 1-x+2n, & \text{si } n < x < n+1 \\ n, & \text{si } x = n \end{cases}$

25.  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$  Sugerencia: En todo intervalo abierto siempre existe un racional y un irracional.

En los problemas del 26 al 28, probar que la ecuación dada tiene una raíz en el intervalo indicado. Aproximar la raíz con un error menor que 0,1.

26.  $x^3 + 1 = 3x$ , en  $[1, 2]$

27.  $2x^3 - 3x^2 - 12x + 2 = 0$ , en  $[-2, -1]$

28.  $\cos x = x$ , en  $[0, 1]$

29. Sea  $f$  una función tal que  $f(x+y) = f(x)f(y)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ .

Si  $f$  es continua en 0, probar que  $f$  es continua en todo punto  $a \in \mathbb{R}$ .

SECCION 5.5

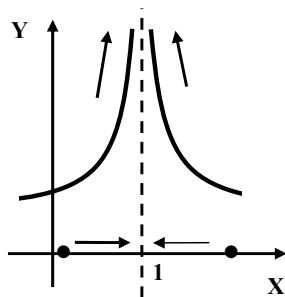
LIMITES INFINITOS Y ASINTOTAS VERTICALES

Consideremos la función, cuyo gráfico es el adjunto.

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

Queremos analizar el comportamiento de esta función cuando  $x$  se aproxima a 1, por la izquierda y por la derecha.

La siguiente tabla nos da los valores de  $f(x)$  para algunos valores de  $x$  cercanos a 1.



$x$	0.8	0.9	0.99	0.999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1.001	1.01	1.1	1.2
$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$	25	100	10,000	1,000,000	$\rightarrow +\infty \leftarrow$	1,000,000	10,000	100	25

Observamos que a medida que  $x$  se aproxima a 1 por ambos lados, el valor de  $f(x)$  crece ilimitadamente. Es decir, en algún momento,  $f(x)$  es mayor que cualquier número positivo tomado de antemano. Este hecho lo expresamos diciendo que el límite de  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$  cuando  $x$  tiende a 1 es  $+\infty$ , y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Ahora, consideremos esta otra función,  $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$

La tabla correspondiente aparece a continuación.

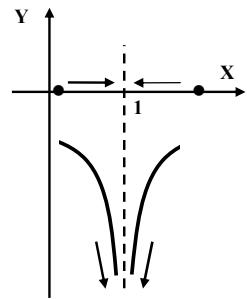
$x$	0.8	0.9	0.99	0.999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1.001	1.01	1.1	1.2
$f(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$	-25	-100	-10,000	-1,000.00	$\rightarrow -\infty \leftarrow$	-1,000,000	-10,000	-100	-25

Ahora observemos que a medida que  $x$  se aproxima a 1 por ambos lados, el valor de  $f(x)$  decrece ilimitadamente.

En otros términos, en algún momento,  $f(x)$  es menor que cualquier número negativo tomado de antemano.

Este hecho lo expresamos diciendo que el límite de  $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$  cuando  $x$  tiende a 1 es  $-\infty$ , y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$$

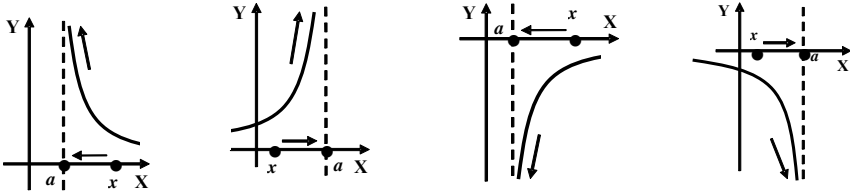


En resumen, tenemos las siguientes definiciones informales. Se supone que la función  $f$  está definida en un intervalo abierto que contiene al punto  $a$ , excepto posiblemente en el mismo  $a$ .

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow f(x)$  crece ilimitadamente cuando  $x$  tiende a  $a$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow f(x)$  decrece ilimitadamente cuando  $x$  tiende a  $a$ .

Similarmente se definen los límites siguientes límites unilaterales:

3.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$     4.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$     5.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$     6.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$



Es evidente que

$$7. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty$$

**EJEMPLO 1.**

Hallar los límites unilaterales de la siguiente función en los puntos de discontinuidad.  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$

**Solución**

Esta función racional tiene un único punto de discontinuidad, que es 2. Nos piden:

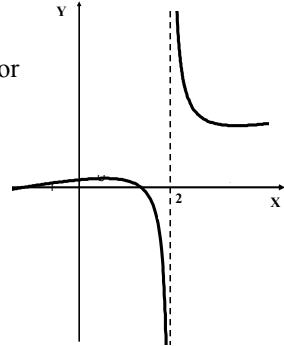
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

Analicemos los signos del numerador y del denominador para puntos  $x$  cercanos a 2.

En cuanto al numerador tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 3) = 2^2 + 2(2) - 3 = 5$$

Como este límite es 5, para los puntos  $x$  cercanos a 2, ya sea por la derecha o por la izquierda, el valor del numerador se mantiene cerca de 5 y por lo tanto, éste valor tiene signo positivo.



Ahora, si  $x$  tiende a 2 por la derecha,  $x - 2$  es positivo y, como el numerador es positivo, el signo del cociente  $\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$  es positivo.

Además, como  $x - 2$  tiende a 0 cuando  $x$  tiende a 2 por la derecha, concluimos:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} = +\infty$$

Por otro lado, si  $x$  tiende a 2 por la izquierda,  $x - 2$  es negativo y, como el numerador es positivo, el cociente  $\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$  es negativo. Además, como  $x - 2$  tiende a 0 cuando  $x$  tiende a 2 por la izquierda, concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} = -\infty$$

### ASINTOTAS VERTICALES

En el ejemplo anterior, la recta vertical  $L: x = 2$ , comparada con el gráfico de la función, tiene una característica muy especial. La distancia de un punto  $P = (x, f(x))$  del gráfico a la recta  $L$  tiende a 0, a medida que  $x$  tiende a 0. Por esta razón se dice que la recta  $x = 2$  es una asíntota (vertical) de la gráfica de la función  $f$ . En general, tenemos la siguiente definición.

**DEFINICION.** Diremos que la recta  $x = a$  es una **asíntota vertical** del gráfico de la función  $f$ , si se cumple al menos una de los cuatro límites siguientes:

1.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ,   2.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ,   3.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ ,   4.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

**EJEMPLO 2.** La recta  $x = 2$  es una asíntota vertical del gráfico de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$$

En efecto, ya vimos en el ejemplo 1 que

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} = -\infty$$

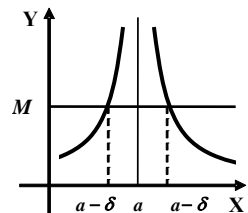
**DEFINICION.** Rigurosa de Límite Infinito.

Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto  $a$ , excepto posiblemente en  $a$ .

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff$

Para cualquier  $M > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M$$

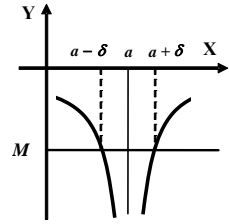


$$2. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$$

Para cualquier  $M < 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M$$

Las definiciones rigurosas de los límites unilaterales infinitos son presentadas en el problema resuelto 4.



El siguiente teorema da resultados rápidos para el cálculo de límites infinitos. Las expresiones colocadas entre los paréntesis son sólo reglas nemotécnicas.

**TEOREMA 5.16** Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

$$1. L > 0 \text{ y } g(x) \rightarrow 0 \text{ positivamente} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty, \quad \left( \frac{+}{0^+} = +\infty \right)$$

$$2. L > 0 \text{ y } g(x) \rightarrow 0 \text{ negativamente} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty, \quad \left( \frac{+}{0^-} = -\infty \right)$$

$$3. L < 0 \text{ y } g(x) \rightarrow 0 \text{ positivamente} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty, \quad \left( \frac{-}{0^+} = -\infty \right)$$

$$4. L < 0 \text{ y } g(x) \rightarrow 0 \text{ negativamente} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty, \quad \left( \frac{-}{0^-} = +\infty \right)$$

El teorema también es válido si se cambia  $x \rightarrow a$  por  $x \rightarrow a^+$  ó  $x \rightarrow a^-$ .

### Demostración

Haremos una "demostración" informal, siguiendo el esquema del ejemplo 1. Sólo probaremos 1, ya que la prueba de los otros casos es análoga y se deja como ejercicio al lector. La prueba rigurosa la presentamos en el problema resuelto 3.

1. Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $L > 0$ , para los  $x$  próximos a  $a$  tenemos que  $f(x) > 0$ .

Por otro lado, como  $g(x) \rightarrow 0$  positivamente, para los  $x$  próximos a  $a$  tenemos que  $g(x) > 0$  y  $g(x)$  es cercano a  $0$ . Luego, cuando  $x$  tiende a  $a$ , el cociente

$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ es positivo y crece ilimitadamente. Esto es, } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

Como un caso particular notable del teorema anterior se tiene:

**TEOREMA 5.17** Si  $n$  es entero positivo, entonces

$$1. \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty \quad 2. \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Los resultados establecidos en el siguiente teorema son intuitivamente evidentes. Una demostración parcial la hacemos en el problema resuelto 5.

**TEOREMA 5.18** Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ , entonces

1.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \pm\infty$   $(\pm \infty \pm L = \pm \infty)$
2.  $L > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) g(x)] = \pm\infty$   $((\pm \infty)(+) = \pm \infty)$   
 $L < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) g(x)] = \mp\infty$   $((\pm \infty)(-) = \mp \infty)$
3.  $L > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \pm\infty$   $\left( \frac{\pm\infty}{+} = \pm \infty \right)$   
 $L < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \mp\infty$   $\left( \frac{\pm\infty}{-} = \mp \infty \right)$
4.  $L \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{g(x)}{f(x)} \right] = 0$   $\left( \frac{L}{\pm\infty} = 0 \right)$

**EJEMPLO 3.** Probar que:

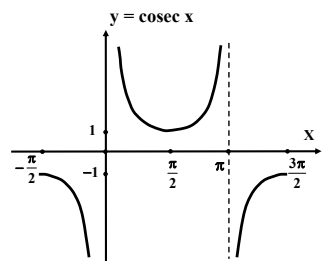
- a.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{cosec} x = +\infty$
- b.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{cosec} x = -\infty$
- c.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = +\infty$
- d.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \cot x = -\infty$

Luego, la recta  $x = 0$  es una asíntota vertical de  $y = \cot x$  y de  $y = \operatorname{cosec} x$

**Solución**

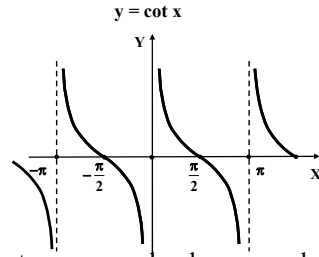
a.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{cosec} x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \left( \frac{1}{0^+} \right) = +\infty$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{cosec} x = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \left( \frac{1}{0^-} \right) = -\infty$



$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} = \left( \frac{1}{0^+} \right) = +\infty$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 0^-} \cot x = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{\sin x} = \left( \frac{1}{0^-} \right) = -\infty$$



Argumentos similares a los prueban que las rectas  $x = n\pi$ , donde  $n$  es cualquier entero, son asíntotas verticales de  $y = \cot x$  y de  $y = \operatorname{cosec} x$ .

### OTRAS FORMAS INDETERMINADAS

Presentamos dos formas indeterminadas más:  $\frac{\infty}{\infty}$  y  $\infty - \infty$ . En esta parte sólo veremos casos simples de estas formas. Más adelante estudiaremos una nueva técnica, conocida con el nombre de **Regla de L'Hôpital**, la cual nos permitirá resolver casos más complejos de estas y otras formas más.

#### a. Forma Indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ .

Un límite de un cociente tiene la forma indeterminada  $\frac{\infty}{\infty}$ , si el límite (o límite lateral) del numerador y del denominador es  $\pm \infty$ .

**EJEMPLO 4.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot x}{\operatorname{cosec} x}$

**Solución**

De acuerdo al ejemplo anterior, tenemos que:  $\frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{cosec} x} = \frac{+\infty}{+\infty}$  (?)

Bien, resolvemos la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot x}{\operatorname{cosec} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$$

#### b. Indeterminada de la forma $\infty - \infty$

Esta forma indeterminada se presenta cuando el límite de una suma o diferencia, al aplicar la ley de la suma, se obtiene la expresión  $\infty - \infty$  o la expresión  $-\infty + \infty$ . En este caso, la indeterminación se salva transformando la suma o diferencia en un cociente.

**EJEMPLO 5.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right)$

**Solución**

Tenemos que:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty - \infty$  (?)

Bien, resolvemos la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1-x}{x^3} \right) = \left( \frac{1}{0^+} \right) = +\infty$$


---

## PROBLEMAS RESUELTOS 5.5

---

**PROBLEMA 1.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$

**Solución**

Este límite es de la forma  $0/0$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}} \right) \left( \frac{1}{\cos x} \right) \\ &= \left( \frac{1}{0^+} \right) \left( \frac{1}{1} \right) = (+\infty)(1) = +\infty \end{aligned}$$


---

**PROBLEMA 2.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-3}$

**Solución**

Este límite es una forma indeterminada de la forma  $\frac{0}{0}$ . Resolvemos la indeterminación:

Se tiene que:  $x \rightarrow 3^- \Rightarrow x-3 < 0 \Rightarrow 3-x > 0$ . Ahora,

$$\frac{\sqrt{9-x^2}}{x-3} = \frac{\sqrt{(3-x)(3+x)}}{-(3-x)} = \frac{\sqrt{3-x} \sqrt{3+x}}{-\sqrt{3-x} \sqrt{3-x}} = \frac{\sqrt{3+x}}{-\sqrt{3-x}}$$

Si  $f(x) = \sqrt{3+x}$  y  $g(x) = -\sqrt{3-x}$  se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{3+x} = \sqrt{6} > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-\sqrt{3-x}) = 0 \quad \text{y} \quad g(x) = -\sqrt{3-x} < 0$$

Luego,  $g(x) \rightarrow 0$  negativamente.

Aplicando la parte 2 del teorema 5.16 se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{3+x}}{-\sqrt{3-x}} = -\infty \quad \left( \frac{+}{0^-} = -\infty \right)$$

El resultado anterior nos dice que la recta  $x = 3$  es una asíntota vertical. Además ésta es la única, ya que 3 es el único punto donde el denominador se hace 0

**PROBLEMA 3.** Probar que el teorema 5.16

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  entonces

1.  $L > 0$  y  $g(x) \rightarrow 0$  positivamente  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
2.  $L > 0$  y  $g(x) \rightarrow 0$  negativamente  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$
3.  $L < 0$  y  $g(x) \rightarrow 0$  positivamente  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$
4.  $L < 0$  y  $g(x) \rightarrow 0$  negativamente  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

**Solución**

Sólo probaremos 1 y 4. Para los casos 2 y 3 se procede en forma análoga y los dejamos como ejercicios para el lector.

1. Debemos probar que dado  $M > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > M$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L > 0$  y  $L/2 < L < 3L/2$ , por el problema resuelto 10 de

la sección 5.2 con  $A = L/2$  y  $B = 3L/2$ , existe un  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow 3L/2 > f(x) > L/2 \tag{1}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , dado  $\varepsilon = L/(2M)$  existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)| < \varepsilon = L/(2M)$$

Como  $g(x) \rightarrow 0$  positivamente, a la expresión anterior la escribimos así:

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow g(x) < L/(2M) \tag{2}$$

Ahora, si  $\delta = \text{Mínimo} \{ \delta_1, \delta_2 \}$ , entonces de (1) y (2) obtenemos

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{L/2}{L/2M} = M$$

4. Debemos probar que dado  $M > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > M$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L < 0$  y  $3L/2 < L < L/2$ , por el problema resuelto 10 de la

sección 5.2 con  $A = 3L/2$  y  $B = L/2$ , existe un  $\delta_1 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow 3L/2 < f(x) < L/2 \Rightarrow -f(x) > -L/2 \tag{3}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , dado  $\varepsilon = -L/(2M)$  existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)| < \varepsilon = -L/(2M)$$

Como  $g(x) \rightarrow 0$  negativamente,  $|g(x)| = -g(x)$  y a la expresión anterior:

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow -g(x) < -L/(2M) \tag{4}$$

Ahora, si  $\delta = \text{Mínimo} \{ \delta_1, \delta_2 \}$ , entonces de (3) y (4) obtenemos

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} > \frac{-L/2}{-L/2M} = M$$

**PROBLEMA 4.** Definir rigurosamente:

1.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

2.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

3.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$

4.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

**Solución**

1.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \Rightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) > M)$

2.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \Rightarrow (\forall M < 0)(\exists \delta > 0)(0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) < M)$
3.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \Rightarrow (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(0 < a - x < \delta \Rightarrow f(x) > M)$
4.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \Rightarrow (\forall M < 0)(\exists \delta > 0)(0 < a - x < \delta \Rightarrow f(x) < M)$

**PROBLEMA 5.**

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ , entonces

a.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty$     b.  $L < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = -\infty$

**Solución**

Como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ , por el problema resuelto 10 de la sección 5.2, para

$$A = L - (1/2)|L| \quad \text{y} \quad B = L + (1/2)|L|, \text{ existe } \delta_1 > 0 \text{ tal que}$$

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow L - (1/2)|L| < g(x) < L + (1/2)|L| \quad (1)$$

a. Debemos probar que dado  $M > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) + g(x) > M$$

En vista de que sólo interesan los valores grandes de  $M$ , suponemos que  $M > L$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , dado  $M' = M - (L - (1/2)|L|)$ , existe  $\delta_2 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow f(x) > M' = M - (L - (1/2)|L|) \quad (2)$$

Ahora, tomando  $\delta = \text{Mínimo} \{ \delta_1, \delta_2 \}$ , de (1) y (2) se tiene:

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta &\Rightarrow f(x) + g(x) > M' + L - (1/2)|L| \\ &= M - (L - (1/2)|L|) + L - (1/2)|L| = M \end{aligned}$$

b. Debemos probar que dado  $M < 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x)g(x) < M$$

Como  $L < 0$ , entonces  $|L| = -L$  y (1) se escribe así:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow (3/2)L < g(x) < (1/2)L \quad (3)$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , dado  $M' = (2M)/L$ , existe  $\delta_3 > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta_3 \Rightarrow f(x) > (2M)/L \quad (4)$$

Tomando  $\delta = \text{Mínimo} \{ \delta_1, \delta_3 \}$ , de (3), (4) y considerando que

$$f(x) > 0 \quad \text{y} \quad (1/2)L < 0, \quad \text{se tiene}$$

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x)g(x) < f(x)(1/2)L < [(2M)/L](1/2)L = M$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 5.5

*En los problemas del 1 al 9 calcular el límite por la derecha y el límite por la izquierda en cada punto de discontinuidad de las funciones indicadas.*

1.  $f(x) = \frac{1}{x-2}$

2.  $g(x) = \frac{1}{|x-2|}$

3.  $h(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

4.  $f(x) = \frac{x}{x-4}$

5.  $g(x) = \frac{x+1}{x-5}$

6.  $h(x) = \frac{1}{x(x+2)}$

7.  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 3}$

8.  $g(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$

9.  $h(x) = x - \frac{1}{x}$

*En los problemas del 10 al 28 calcular el límite indicado.*

10.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x]/x$

11.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} [x]/x$

12.  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \sec x$

13.  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \sec x$

14.  $\lim_{x \rightarrow (-3\pi/2)^+} \sec x$

15.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{x-1}{1-\sqrt{2x-x^2}} \right)$

16.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2} - 2} \right)$

17.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

18.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right]$

19.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[ \frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right]$

20.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} ([x^2] - 1)/(x^2 - 1)$

21.  $\lim_{y \rightarrow 1} \left( \frac{1}{y-1} - \frac{3}{y^3-1} \right)$

22.  $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{1}{y\sqrt{y+1}} - \frac{1}{y} \right)$

23.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

24.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

25.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \operatorname{cosec}(x/2)$

26.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{\cos^2 x}{x} \right)$

$$27. \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \left( \frac{\tan x}{\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2}} \right)$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1 - \cos x}{\tan^3 x - \operatorname{sen}^3 x} \right)$$

En los problemas del 29 al 32, hallar las asíntotas verticales a la gráfica de la función dada.

$$29. y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \quad 30. y = \frac{x}{4x^2-1} \quad 31. y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \quad 32. y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

33. Demostrar que las rectas  $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ , donde  $n$  es un entero, son asíntotas verticales de la gráfica de  $y = \tan x$ .

### SECCION 5.6

## LIMITES EN EL INFINITOS Y ASINTOTAS HORIZONTALES

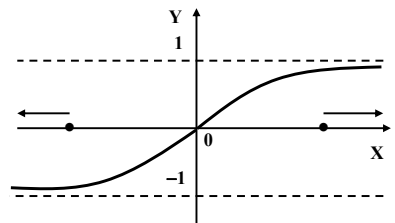
Veamos el comportamiento de las funciones cuando la variable  $x$  se aleja del origen (de 0) ilimitadamente hacia la derecha o hacia la izquierda. En el primer caso diremos que  $x$  tiende a  $+\infty$ , y en el segundo, que  $x$  tiende a  $-\infty$ .

Consideremos la función  $f(x) = \frac{x}{|x|+1} = \begin{cases} \frac{x}{x+1}, & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{-x+1}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Confeccionemos dos tablas, una para valores crecientes de  $x$  y otra para decrecientes (negativas).

$x \geq 0$	100	1,000	10,000	$\rightarrow +\infty$
$f(x) = \frac{1}{x+1}$	0.9901	0.9990	0.9999	$\rightarrow 1$

$x < 0$	-100	-1,000	-10,000	$\rightarrow -\infty$
$f(x) = \frac{1}{-x+1}$	-0.9901	-0.9990	-0.9999	$\rightarrow -1$



En la primera tabla observamos que  $f(x)$  se aproxima a **1** cuando  $x$  crece ilimitadamente. En este caso diremos que el límite de  $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$  cuando  $x$  tiende

a  $+\infty$  es **1**, y escribiremos así: 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|+1} = 1$$

En la segunda tabla observamos que  $f(x)$  se aproxima a **-1** cuando  $x$  decrece ilimitadamente. En este caso diremos que el límite de  $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$  cuando  $x$  tiende

a  $-\infty$  es **-1**, y escribiremos así: 
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|+1} = -1$$

En general, tenemos las siguientes definiciones informales:

1. Sea  $f$  una función definida en un intervalo de la forma  $(a, +\infty)$ .

**Lím  $f(x) = L \Leftrightarrow f(x)$  pueden acercarse arbitrariamente a  $L$ , cuando  $x$  crece  $x \rightarrow +\infty$**

**ilimitadamente.**

2. Sea  $f$  una función definida en un intervalo de la forma  $(-\infty, a)$ .

**Lím  $f(x) = L \Leftrightarrow f(x)$  pueden acercarse arbitrariamente a  $L$ , cuando  $x$   $x \rightarrow -\infty$**

**decrece ilimitadamente.**

A continuación damos las definiciones rigurosas de estos límites.

**DEFINICION.** Rigurosa de límites en el infinito.

1. Sea  $f$  una función definida en un intervalo de la forma  $(a, +\infty)$ .

**Lím  $f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N > 0)(x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$   $x \rightarrow +\infty$**

2. Sea  $f$  una función definida en un intervalo de la forma  $(-\infty, a)$ .

**Lím  $f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N < 0)(x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$   $x \rightarrow -\infty$**

Las leyes de los límites del teorema 5.2, así como las propiedades de los límites enunciados en los teoremas 5.16 y 5.18 también se cumplen para los límites en el infinito (cuando  $x \rightarrow \pm \infty$ ).

**TEOREMA 5.19** 1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(1/t)$     2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(1/t)$

**Demostración**

Ver el problema resuelto 4.

---

Observar que el teorema anterior puede verse como el cambio de variable  $x = \frac{1}{t}$ , para el cual se cumple que:  $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0^+$     y     $x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0^-$

Para la validez de este cambio, no podemos invocar directamente el teorema de cambio de variable visto, ya que éste sólo fue probado para el caso  $x \rightarrow a$  ( $a$  finito).

**EJEMPLO 1.** Hallar: 1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$     2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$

**Solución**

En ambos casos aplicando el teorema anterior, haciendo  $x = \frac{1}{t}$ .

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \operatorname{sen} t = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^{3/2}} \operatorname{sen} t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{t^{1/2}} \right] \left[ \frac{\operatorname{sen} t}{t} \right]$$

$$= \left[ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}} \right] \left[ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \right] = (+\infty)(1) = +\infty$$


---

La prueba del siguiente teorema lo presentamos en el problema resuelto 6.

**TEOREMA 5.20** Si  $n$  es un número entero positivo, entonces

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \qquad 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad 4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$


---

De este teorema deducimos fácilmente los límites en  $\pm \infty$  de un polinomio.

**COROLARIO.** Sea  $n > 0$ . Se tiene:

a. 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

b. Si  $n$  es par, entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

c. Si  $n$  es impar, entonces

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \begin{cases} -\infty, & \text{si } a_n > 0 \\ +\infty, & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

**Demostración.**

Sólo probamos la parte a, ya que para los otros casos se procede similarmente.

a. 
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n) \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \\ &= (+\infty)(a_n + 0 + \dots + 0 + 0) = (+\infty)(a_n) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{si } a_n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 2.** Dado el polinomio  $p(x) = -4x^3 + 8x^2 - 12x - 4$ , hallar

a. 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x)$$

b. 
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x)$$

**Solución**

El término de mayor potencia es  $-4x^3$ , cuyo coeficiente es  $-4$  y  $-4 < 0$ . Luego,

a. 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^3 + 8x^2 - 12x - 4) = -\infty$$
      b. 
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^3 + 8x^2 - 12x - 4) = +\infty$$

**EJEMPLO 3.** Calcular a. 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2 + 1}$$
      b. 
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2 + 1}$$

**Solución**

Ambos límites son indeterminados de la forma  $\frac{\infty}{\infty}$ . Resolvemos la indeterminación dividiendo el numerador y el denominador por la mayor potencia de  $x$  que, en este caso, es  $x^2$ .

$$\begin{aligned} \text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2/x^2}{(x^2+1)/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1+1/x^2} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+1/x^2)} = \frac{3}{1+\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x^2)} = \frac{3}{1+0} = 3 \end{aligned}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2/x^2}{(x^2+1)/x^2} = \frac{3}{1+\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x^2)} = \frac{3}{1+0} = 3$$

**EJEMPLO 4.**

Calcular:

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

**Solución**

Ambos límites son indeterminados de la forma  $\frac{\infty}{\infty}$ . Resolvemos la indeterminación dividiendo el numerador y el denominador entre  $x$ .

a. Si  $x > 0$ , entonces  $x = \sqrt{x^2}$ . Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{1+3/x^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+\lim_{x \rightarrow +\infty} (3/x^2)}} = \sqrt{\frac{1}{1+0}} = 1 \end{aligned}$$

b. Si  $x < 0$ , entonces  $x = -\sqrt{x^2}$ . Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+3}} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+3}} \\ &= -\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{1}{1+3/x^2}} = -\sqrt{\frac{1}{1+0}} = -1 \end{aligned}$$

**TEOREMA 5.21**

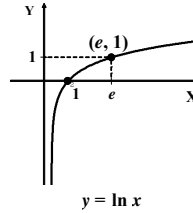
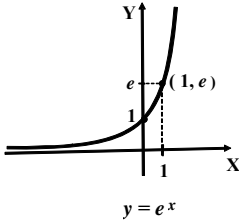
$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

**Demostración**



Observando el gráfico de la función exponencial  $y = e^x$  se puede intuir los resultados 1 y 2. La demostración formal la omitimos.

Las pruebas de 3 y 4 las presentamos en el problema resuelto 7.

Observar que el límite 3 nos dice que el eje Y es una asíntota vertical de la función logaritmo natural.

**EJEMPLO 5.** Calcular los siguientes límites:

a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$       b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$       c.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 2 \ln x}{1 + 3 \ln x}$

**Solución**

a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x/e^x - e^{-x}/e^x}{e^x/e^x + e^{-x}/e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 1/e^{2x}}{1 + 1/e^{2x}}$   
 $= \frac{1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/e^{2x})}{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/e^{2x})} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 2 \ln x}{1 + 3 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/\ln x - 2}{1/\ln x + 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/\ln x) - 2}{\lim_{x \rightarrow 0^+} (1/\ln x) + 3} = \frac{0 - 2}{0 + 3} = -\frac{2}{3}$

**ASINTOTAS HORIZONTALES**

**DEFINICION.** Diremos que la recta  $y = b$  es una **asíntota horizontal** del gráfico de la función  $f$  si se cumple al menos una de las dos condiciones siguientes:

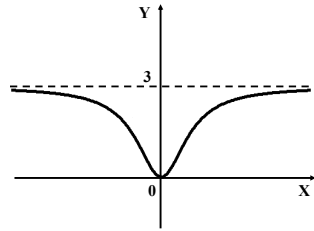
1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$

**EJEMPLO 6.** La recta  $y = 3$  es una asíntota horizontal del gráfico la función:

$$y = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$$

En efecto, en el ejemplo 3 vimos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2 + 1} = 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2 + 1}$$



**EJEMPLO 7.** Hallar las asíntotas horizontales de la tangente hiperbólica:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

**Solución**

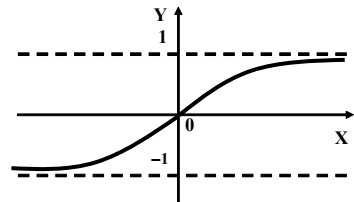
La tangente hiperbólica tiene dos asíntotas horizontales:

$$y = -1, \quad y = 1.$$

En efecto, de acuerdo al ejemplo 5, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$



$$y = \tanh x$$

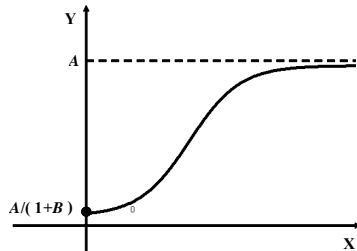
**EJEMPLO 8.** Probar que la recta  $y = A$  es una asíntota horizontal de la **curva logística**:

$$f(x) = \frac{A}{1 + Be^{-kx}}, \quad A, B \text{ y } k \text{ son constantes positivas.}$$

**Solución**

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A}{1 + Be^{-kx}} &= \frac{A}{1 + B \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{e^{kx}} \right)} \\ &= \frac{A}{1 + B(0)} = \frac{A}{1+0} = A \end{aligned}$$



**EJEMPLO 9.** Hallar las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de la ecuación

$$xy^2 - y^2 - 4x - 8 = 0.$$

**Solución**

Despejamos  $y$ :  $y = \pm \sqrt{\frac{4x+8}{x-1}}$ .

La gráfica de la ecuación es la unión de las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+8}{x-1}} \quad y \quad g(x) = -\sqrt{\frac{4x+8}{x-1}}$$

Hallamos el dominio de estas funciones. Ambas tienen el mismo dominio.

$$x \in \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \Leftrightarrow \frac{4x+8}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4(x+2)}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1} \geq 0$$

Resolviendo esta desigualdad hallamos que:

$$\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty).$$

**1. Asíntotas Verticales:**

El único punto que es candidato a proporcionar asíntotas verticales es 1. Como las funciones no están definidas en los puntos próximos y a la izquierda de 1, sólo debemos calcular los límites a la derecha de 1 de ambas funciones.

Ya que,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{4x+8} = \sqrt{12} > 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0$  positivamente, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{4x+8}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{4x+8}}{\sqrt{x-1}} = +\infty$$

Por otro lado,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-f(x)) = -\infty$

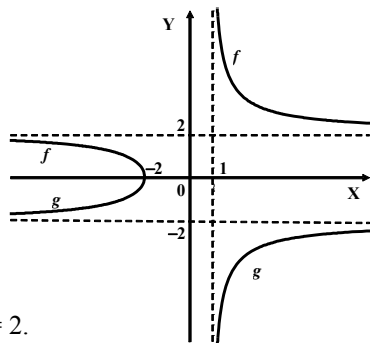
Por tanto,  $x = 1$  es una asíntota vertical y es única.

**2. Asíntotas Horizontales:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{4x+8}{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{4+8/x}{1-1/x}} = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-f(x)) = -\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -2$$

Luego, asíntotas horizontales son  $y = -2$ ,  $y = 2$ .



## PROBLEMAS RESUELTOS 5.6

**PROBLEMA 1.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 1} \right]$

**Solución**

Usando la identidad:

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \quad \text{con } a = \sqrt[3]{x^3 + x^2} \text{ y } b = \sqrt[3]{x^3 + 1} \quad \text{se tiene}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 1} &= \frac{(x^3 + x^2) - (x^3 + 1)}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2} + \sqrt[3]{x^3 + x^2} \sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}} \\ &= \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2} + \sqrt[3]{x^3 + x^2} \sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}} \\ &= \frac{\frac{x^2 - 1}{x^2}}{\frac{\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2}}{x^2} + \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^2}}{x} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1}}{x} + \frac{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}}{x^2}} \\ &= \frac{1 - 1/x^2}{\sqrt[3]{\frac{(x^3 + x^2)^2}{x^6}} + \sqrt[3]{\frac{x^3 + x^2}{x^3}} \sqrt[3]{\frac{x^3 + 1}{x^3}} + \sqrt[3]{\frac{(x^3 + 1)^2}{x^6}}} \\ &= \frac{1 - 1/x^2}{\sqrt[3]{(1 + 1/x)^2} + \sqrt[3]{1 + 1/x} \sqrt[3]{1 + 1/x} + \sqrt[3]{(1 + 1/x)^2}} \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 + 1} \right] = \frac{1 - 0}{\sqrt[3]{(1+0)^2} + \sqrt[3]{1+0} \sqrt[3]{1+0} + \sqrt[3]{(1+0)^2}} = \frac{1}{3}$$

**PROBLEMA 2.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right]$

**Solución**

Multiplicando y dividiendo por la conjugada:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \\
 & \frac{\left( \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) \left( \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x} \right)}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\
 & = \frac{\left( x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - x \right)}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\
 & = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}} / \sqrt{x}}{\left( \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x} \right) / \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1/x}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1/x} + \sqrt{1/x^3}} + 1}
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1/x}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1/x} + \sqrt{1/x^3}} + 1} \\
 &= \frac{\sqrt{1 + \sqrt{0}}}{\sqrt{1 + \sqrt{0} + \sqrt{0}} + 1} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

**PROBLEMA 3.** Probar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^{1/3} (1-x)^{2/3} - x \right] = -\frac{2}{3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x^{1/3} (1-x)^{2/3} - x \right]$$

**Solución**

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 x^{1/3} (1-x)^{2/3} - x &= x^{1/3} \left[ (1-x)^{2/3} - x^{2/3} \right] = x^{1/3} \left[ \left( (1-x)^{1/3} \right)^2 - \left( x^{1/3} \right)^2 \right] \\
 &= x^{1/3} \left[ (1-x)^{1/3} - x^{1/3} \right] \left[ (1-x)^{1/3} + x^{1/3} \right]
 \end{aligned}$$

Ahora, haciendo uso de las siguientes identidades

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \quad \text{y} \quad a + b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$$

con  $a = (1-x)^{1/3}$  y  $b = x^{1/3}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} & x^{1/3}(1-x)^{2/3} - x \\ &= x^{1/3} \left[ \frac{(1-x) - x}{(1-x)^{2/3} + (1-x)^{1/3} x^{1/3} + x^{2/3}} \right] \left[ \frac{(1-x) + x}{(1-x)^{2/3} - (1-x)^{1/3} x^{1/3} + x^{2/3}} \right] \\ &= x^{1/3} \left[ \frac{1-2x}{(1-x)^{2/3} + (1-x)^{1/3} x^{1/3} + x^{2/3}} \right] \left[ \frac{1}{(1-x)^{2/3} - (1-x)^{1/3} x^{1/3} + x^{2/3}} \right] \\ &= \frac{x^{1/3}(1-2x)}{\left[ (1-x)^{2/3} + (1-x)^{1/3} x^{1/3} + x^{2/3} \right] \left[ (1-x)^{2/3} - (1-x)^{1/3} x^{1/3} + x^{2/3} \right]} \\ &= \frac{x^{2/3} x^{2/3} \left( \frac{1}{x} - 2 \right)}{\left[ (1-x)^{2/3} + (1-x)^{2/3} x^{1/3} + x^{2/3} \right] \left[ (1-x)^{2/3} - (1-x)^{2/3} x^{1/3} + x^{2/3} \right]} \\ &= \frac{1/x - 2}{\left[ \frac{(1-x)^{2/3} + (1-x)^{1/3} x^{1/3} + x^{2/3}}{x^{2/3}} \right] \left[ \frac{(1-x)^{2/3} - (1-x)^{1/3} x^{1/3} + x^{2/3}}{x^{2/3}} \right]} \\ &= \frac{1/x - 2}{\left[ (1/x - 1)^{2/3} + (1/x - 1)^{1/3} + 1 \right] \left[ (1/x - 1)^{2/3} - (1/x - 1)^{1/3} + 1 \right]} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^{1/3}(1-x)^{2/3} - x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x - 2}{\left[ (1/x - 1)^{2/3} + (1/x - 1)^{1/3} + 1 \right] \left[ (1/x - 1)^{2/3} - (1/x - 1)^{1/3} + 1 \right]} \\ &= \frac{0 - 2}{\left[ (0-1)^{2/3} + (0-1)^{1/3} + 1 \right] \left[ (0-1)^{2/3} - (0-1)^{1/3} + 1 \right]} \end{aligned}$$

$$= \frac{-2}{[1-1+1][1+1+1]} = -\frac{2}{3}$$

Siguiendo los mismos pasos dados atrás, se consigue que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [x^{1/3}(1-x)^{2/3} - x] = -\frac{2}{3}$$

**PROBLEMA 4.** Probar el teorema 5.19

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \iff \lim_{t \rightarrow 0^+} f(1/t) = L \qquad 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \iff \lim_{t \rightarrow 0^-} f(1/t) = L$$

**Solución**

Probaremos sólo la parte 1. Para la parte 2 se procede en forma similar.

1. Probaremos que:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \iff \lim_{t \rightarrow 0^+} f(1/t) = L$

( $\Rightarrow$ ) Debemos probar que:

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < t < \delta \Rightarrow |f(1/t) - L| < \varepsilon$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ , para el  $\varepsilon$  dado existe  $N > 0$  tal que

$$x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ahora, si  $\delta = \frac{1}{N} > 0$ , entonces

$$0 < t < \delta = \frac{1}{N} \Rightarrow \frac{1}{t} > N \Rightarrow |f(1/t) - L| < \varepsilon.$$

( $\Leftarrow$ ) Debemos probar que:

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N > 0$  tal que  $x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ .

Como,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(1/t) = L$ , para el  $\varepsilon$  dado existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < t < \delta \Rightarrow |f(1/t) - L| < \varepsilon.$$

Ahora, si  $N = \frac{1}{\delta} > 0$ , entonces

$$x > N = 1/\delta \Rightarrow 0 < 1/x < \delta \Rightarrow |f(1/(1/x)) - L| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

**PROBLEMA 5.** Hallar:

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \operatorname{sen} \left( x + \frac{1}{x} \right) - \operatorname{sen} x \right]$$

**Solución**

1. Por el problema resuelto 4, haciendo  $x = 1/t$  se tiene

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} 0 = 0$$

2. Usando la identidad trigonométrica 41 tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \left( x + \frac{1}{x} \right) - \operatorname{sen} x &= 2 \cos \left[ \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{x} + x \right) \right] \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{x} - x \right) \right] \\ &= 2 \cos \left[ x + \frac{1}{2x} \right] \operatorname{sen} \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

Considerando que  $\left| \cos \left[ x + \frac{1}{2x} \right] \right| \leq 1$  se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \operatorname{sen} \left( x + \frac{1}{x} \right) - \operatorname{sen} x \right| = \left| 2 \cos \left[ x + \frac{1}{2x} \right] \operatorname{sen} \frac{1}{2x} \right| \\ &= \left| 2 \cos \left[ x + \frac{1}{2x} \right] \right| \left| \operatorname{sen} \frac{1}{2x} \right| \leq 2 \left| \operatorname{sen} \frac{1}{2x} \right| \end{aligned}$$

Luego,

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \operatorname{sen} \left( x + \frac{1}{x} \right) - \operatorname{sen} x \right| \leq 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \operatorname{sen} \frac{1}{2x} \right| \quad (3)$$

Pero, por la continuidad de la función valor absoluto y la parte (1), se tiene

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \operatorname{sen} \frac{1}{2x} \right| = \left| \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{2x} \right| = \left| \operatorname{sen} 0 \right| = \left| 0 \right| = 0 \quad (4)$$

De (3) y (4) obtenemos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \operatorname{sen} \left( x + \frac{1}{x} \right) - \operatorname{sen} x \right| = 0$$

**PROBLEMA 6.** Probar el Teorema 5.20.

Si  $n$  es un número entero positivo, probar que

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ es par} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

**Solución**

Hacemos el cambio de variable  $x = 1/t$  y, de acuerdo al teorema 2.19, tenemos:

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^n} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

2. Si  $n$  es par:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t^n} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Si  $n$  es impar:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t^n} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1/t)^n} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^n = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1/t)^n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} t^n = 0$

4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(1/t)^n} = \lim_{t \rightarrow 0^-} t^n = 0$

**PROBLEMA 7.** Probar las partes 3 y 4 del teorema 5.21:

3.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

**Solución**

3. Por definición, debemos probar que:

Dado  $M < 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que  $0 < x < \delta \Rightarrow \ln x < M$

Bien,

$\ln x < M \Rightarrow x < e^M$ . Tomamos  $\delta = e^M$

Por otro lado, por estar  $x$  en el dominio de  $y = \ln x$ , debemos tener que  $x > 0$ .

Ahora tenemos:

$0 < x < \delta \Rightarrow 0 < x < e^M \Rightarrow \ln x < \ln e^M = M$

4. Por definición, debemos probar que:

$$\text{Dado } M > 0, \exists N > 0 \text{ tal que } x > N \Rightarrow \ln x > M$$

Bien,

$$\ln x > M \Rightarrow x > e^M. \text{ Luego, tomamos } N = e^M$$

$$\text{Ahora tenemos: } x > N \Rightarrow x > e^M \Rightarrow \ln x > \ln e^M = M$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 5.6

*En los problemas del 1 al 9 calcular*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  *y*  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

1.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

2.  $f(x) = \frac{-1}{x^3}$

3.  $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$

4.  $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$

5.  $f(x) = \frac{x^3 - 8}{2x^3 - 3x^2 + 1}$

6.  $f(x) = x^5 - 4x^4$

7.  $f(x) = -2x^6 + 5x^5$

8.  $f(x) = \frac{x+1}{x}$

9.  $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

*En los problemas del 10 al 31 calcular el límite indicado.*

10.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x})$

11.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})$

12.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}$

13.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 1}$

14.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

15.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{-8x^3 + x + 1}}{x-1}$

16.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

17.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - x})$

18.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 5} - x)$

19.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \sqrt[3]{1 - x^3}\right)$

20.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

21.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

22.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$

23.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-1/2} \sin x$

24.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{6}\right)$

25.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin\sqrt{x+2} - \sin\sqrt{x})$

26.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

27.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$

28.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10^x}{10^x + 1}$

29.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2^{-0,6x} + \frac{1}{x} \right)$

30.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x^2})$

31.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(2+x) - \ln(1+x)]$

32. Sea la función racional  $f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0}$ ,  $a_n \neq 0$  y  $b_n \neq 0$ .

a. Si  $n = m$ , probar que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$

b. Si  $n < m$ , probar que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

c. Si  $n > m$ , probar que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \frac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty, & \text{si } \frac{a_n}{b_m} < 0 \end{cases}$

33. Dar una definición rigurosa de:

a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

c.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

d.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

34. Probar que todo polinomio de grado impar tiene una raíz (real). Sugerencia: Hallar los límites en  $+\infty$  y en  $-\infty$ .

*En los problemas del 35 al 41 hallar las asíntotas horizontales del gráfico de la función dada.*

35.  $f(x) = \frac{1}{x-1}$

36.  $g(x) = \frac{1}{x(x+2)}$

37.  $g(x) = \frac{x}{4x^2 - 1}$

38.  $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

39.  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

40.  $h(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

41.  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

*En los problemas del 42 al 44 hallar las asíntotas verticales y horizontales del gráfico de la ecuación dada.*

42.  $2x^2 + yx^2 = 16y$

43.  $(y^2 - 4)(x - 1) = 8$

44.  $x^2 y^2 = 2y^2 + x^2 + 1$

## SECCION 5.7

LOS LÍMITES Y EL NUMERO  $e$ 

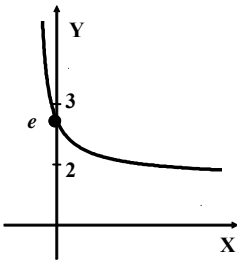
Ya estamos en condiciones de definir al número  $e$ .

**DEFINICION.** El número  $e$  se define como el siguiente límite:

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad (1)$$

Esta definición del número  $e$  debe justificarse, probando que tal límite existe. Esto se hace en los cursos avanzados de Cálculo. Además, se prueba que este límite es un número irracional. A modo de ilustración, tenemos la siguiente tabla y el gráfico de

$$y = (1+x)^{1/x}$$



$x$	$(1+x)^{1/x}$
0.000001	2.718281693
0.0000001	2.718281693
↓ 0 ↑	↓ $e$ ↑
-0.0000001	2.718281964
-0.000001	2.718283188

Esta tabla nos da una aproximación de  $e$  con 6 cifras decimales:

$$e \approx 2.718281$$

Si en límite (1) hacemos el cambio de variable  $z = \frac{1}{x}$  tenemos que:

$$x \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow 0^+ \text{ y } x \rightarrow 0^- \Leftrightarrow z \rightarrow +\infty \text{ y } z \rightarrow -\infty$$

En consecuencia, el límite (1) es equivalente a decir que los dos límites siguientes se cumplen simultáneamente:

$$(2) \quad e = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \quad \text{y} \quad (3) \quad e = \lim_{z \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$$

Ahora presentamos otros límites importantes:

**TEOREMA 5.22**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{bx} - 1}{x} = b$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

**Demostración**

1. Si  $a = 0$ , el resultado es obvio. Veamos el caso  $a \neq 0$ .

Sea  $y = ax$ . Se tiene que:  $x = \frac{y}{a}$ ,  $\frac{1}{x} = \frac{a}{y}$ . Además:  $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow y \rightarrow 0$

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{a}{y}} = \left( \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} \right)^a = e^a$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \left( \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \ln e = 1$$

3. Sea  $y = e^{bx} - 1$ . Se tiene que:

$$e^{bx} = 1 + y, \quad x = \frac{1}{b} \ln(1+y) \quad y \quad x \rightarrow 0 \Leftrightarrow y \rightarrow 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{bx} - 1}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1+y-1}{\frac{1}{b} \ln(1+y)} = b \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1+y)} \\ &= b \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y}} = b \left( \frac{1}{1} \right) = b \end{aligned}$$

4. Teniendo en cuenta que  $a^x = e^{x \ln a}$  y la parte 3 anterior con  $b = \ln a$ , tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \ln a$$

**PROBLEMAS RESUELTOS 5.7**

**PROBLEMA 1.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x}$

**Solución**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} \frac{e^x - 1}{\frac{x}{x}} \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} \right) \left( \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} \right) = \left( \frac{1}{e^0} \right) \left( \frac{1}{1} \right) = 1 \end{aligned}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 5.7

Hallar los siguientes límites:

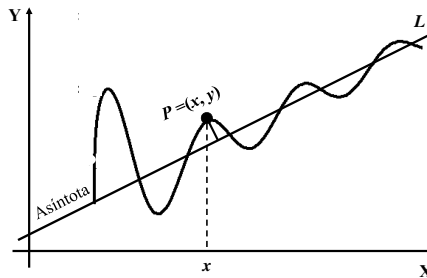
- |   |  |   |
|---|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + ax)}{x}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a + x) - \ln a}{x}$ | 3. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$    | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1)$    |

### SECCION 5.8

### ASINTOTAS OBLICUAS

Además de asíntotas verticales y horizontales, tenemos también asíntotas oblicuas.

En general, se dice que una recta  $L$  es una asíntota de una curva  $C$  si la distancia  $d(P, L)$ , de un punto  $P$  de la curva  $C$  a la recta  $L$ , tiende a 0 a medida que  $P$  se aleja del origen de coordenadas.



Cuando la curva es la gráfica de una función, esta idea es captada en la siguiente definición:

**DEFINICION.** La recta  $L: y = mx + b$  es una asíntota oblicua de la gráfica de la función  $y = f(x)$  si se cumple que:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad \text{ó}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

En términos más precisos:

La recta  $y = mx + b$  es una **asíntota oblicua a la derecha** si sucede (1).

La recta  $y = mx + b$  que es una **asíntota oblicua a la izquierda** si sucede (2).

La condición (1) o (2) nos dice que cuando  $x \rightarrow +\infty$  o cuando  $x \rightarrow -\infty$ , la distancia entre el punto  $(x, f(x))$  del gráfico y el punto  $(x, mx + b)$  de la recta, tiende a cero.

Observar que las asíntotas horizontales son un caso particular de las asíntotas oblicuas. En efecto, una asíntota oblicua con  $m = 0$  es una asíntota horizontal. Para nosotros, como ya hemos tratado las asíntotas horizontales aparte, cuando hablemos de asíntotas oblicuas entenderemos que no es horizontal, o sea  $m \neq 0$ ,

En vista de la unicidad del límite cuando  $x \rightarrow +\infty$ , toda gráfica tiene, a lo más, una asíntota oblicua a la derecha. De modo análogo, toda gráfica tiene, a lo más, una asíntota oblicua a la izquierda. Una misma recta puede ser, a la vez, asíntota oblicua a la derecha y asíntota oblicua a la izquierda.

Entre las funciones cuyas gráficas tienen asíntotas oblicuas están las funciones racionales  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  cuyo grado del numerador  $p(x)$  es una unidad mayor que el grado del denominador  $q(x)$ . En efecto, si dividimos  $p(x)$  entre  $q(x)$ , se tiene que:

$$f(x) = mx + b + \frac{h(x)}{q(x)},$$

donde el grado del polinomio  $h(x)$  del numerador es menor que el grado del denominador  $q(x)$  y, en consecuencia,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{h(x)}{q(x)} = 0$$

Este resultado nos dice que la recta  $y = mx + b$  es una asíntota oblicua, tanto a la derecha como a la izquierda, de la gráfica de  $y = f(x)$ . En efecto:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \left( mx + b + \frac{h(x)}{q(x)} \right) - (mx + b) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{h(x)}{q(x)} = 0 \end{aligned}$$

**EJEMPLO 1.** Hallar las asíntotas oblicuas al gráfico de

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$$

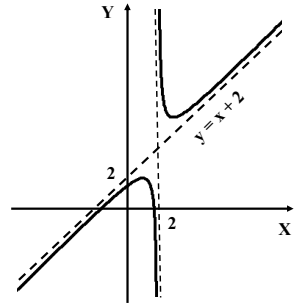
**Solución**

Tenemos que

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2} = x + 2 + \frac{1}{x - 2}$$

Luego,  $y = x + 2$  es una asíntota oblicua.

Observar que  $x = 2$  es una asíntota vertical.



¿Cómo encontrar las asíntotas oblicuas si  $y = f(x)$  no es función racional? O sea, si  $y = mx + b$  es una asíntota, como hallar las constantes  $m$  y  $b$ ? El siguiente teorema nos da la respuesta.

**TEOREMA 5.23** 1.  $y = mx + b$  es una asíntota oblicua a la **derecha** de  $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = b$$

2.  $y = mx + b$  es una asíntota oblicua a la **izquierda** de  $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = b$$

**Demostración**

Ver el problema resuelto 4.

**EJEMPLO 2.** Hallar las asíntotas oblicuas al gráfico de

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

**Solución**

**Asíntota oblicua a la derecha.**

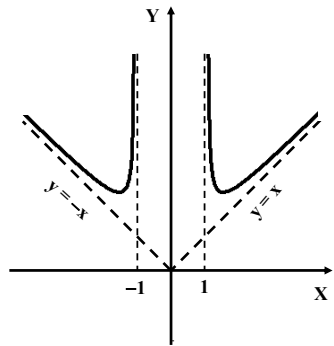
$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x/x}{\sqrt{x^2 - 1}/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - 1/x^2}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - x\sqrt{x^2 - 1})(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 - 1} (x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1} (x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2 - 1} / x\right) \left[(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1}) / x\right]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1 - 1/x^2}\right) (x + \sqrt{x^2 - 1})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - 0} (+\infty)} = 0
 \end{aligned}$$

Luego,  $y = x$  es asíntota oblicua a la derecha.

**Asíntota oblicua a la izquierda.**

Podríamos proceder como en el caso anterior, calculando los límites respectivos cuando  $x \rightarrow -\infty$ . Sin embargo, observamos que la función es par,  $f(-x) = f(x)$ , y, por lo tanto, su gráfico es simétrico respecto al eje Y. Teniendo en cuenta este hecho, rápidamente concluimos que la asíntota oblicua a la izquierda es  $y = -x$ .



Observar que las rectas  $x = -1$  y  $x = 1$  son asíntotas verticales.

**PROBLEMAS RESUELTOS 5.8**

**PROBLEMA 1.** Hallar las asíntotas oblicuas al gráfico

$$f(x) = \tan^{-1}(x) - x$$

**Solución**

Considerando que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1}(x) = -\frac{\pi}{2}$  se tiene:

**Asíntota oblicua a la derecha.**

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\tan^{-1}(x) - x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\tan^{-1}(x)}{x} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\tan^{-1}(x)}{x} \right) - 1 = \frac{\pi/2}{+\infty} - 1 = 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (\tan^{-1}(x) - x) - (-x) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Luego,  $y = -x + \frac{\pi}{2}$  es una asíntota a la derecha de  $f(x) = \tan^{-1}(x) - x$

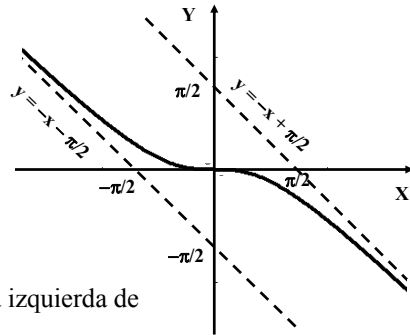
**Asíntota oblicua a la izquierda.**

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\tan^{-1}(x) - x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\tan^{-1}(x)}{x} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\tan^{-1}(x)}{x} \right) - 1 = \frac{-\pi/2}{-\infty} - 1 = 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ (\tan^{-1}(x) - x) - (-x) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1}(x) = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Luego,  $y = -x - \frac{\pi}{2}$  es una asíntota a la izquierda de

$$f(x) = \tan^{-1}(x) - x$$



**PROBLEMA 2.** Hallar las asíntotas oblicuas al gráfico de

$$f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$$

**Solución**

**Asíntota oblicua a la derecha.**

$$\begin{aligned}
 m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1/3}(1-x)^{2/3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-x)^{2/3}}{x^{2/3}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{2/3} = (0-1)^{2/3} = 1
 \end{aligned}$$

Por otro lado, de acuerdo al problema resuelto 3 de la sección 5.6 tenemos:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^{1/3}(1-x)^{2/3} - x] = -\frac{2}{3}$$

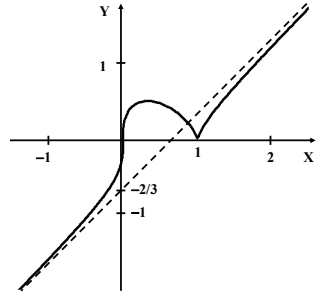
Luego,  $y = x - \frac{2}{3}$  es asíntota oblicua a

la derecha de  $f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$

**Asíntota oblicua a la izquierda.**

En forma enteramente análoga a la parte anterior, obtenemos que la misma recta,  $y = x - \frac{2}{3}$  es

asíntota oblicua a la izquierda de  $f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$



**PROBLEMA 3.** Demostrar que las rectas  $y = \frac{b}{a}x$  e  $y = -\frac{b}{a}x$  son asíntotas oblicuas de la hipérbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

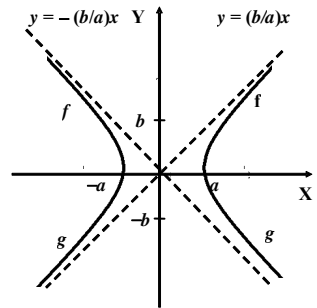
**Solución**

La hipérbola puede considerarse como la unión de los gráficos de las funciones  $f$  y  $g$  que construimos a continuación.

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 &\Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \\
 &\Leftrightarrow y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}
 \end{aligned}$$

Sean

$$f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{y} \quad g(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$



La gráfica de  $f$  es la parte de la hipérbola sobre el eje X, y la de  $g$  es la de abajo.

Mostraremos que las rectas  $y = \frac{b}{a}x$  e  $y = -\frac{b}{a}x$  son asíntotas oblicuas de ambas funciones,  $f$  y  $g$ . Verificaremos este resultado sólo para  $f$ , ya que para el caso de  $g$ , el proceso es exactamente igual.

Como la letra  $b$  aparece en la ecuación de la hipérbola y de la asíntota, para evitar confusión, a la ecuación de la asíntota la escribiremos así:  $y = mx + b$ .

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{b}{a} \frac{1}{x} \sqrt{x^2 - a^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{b}{a} \frac{1}{|x|} \sqrt{x^2 - a^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{b}{a} \sqrt{1 - a^2/x^2} \right) = \frac{b}{a} \sqrt{1 - 0} = \frac{b}{a} \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x \right] \\ &= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2 - a^2} - x \right] = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{b}{a} (0) = 0 \end{aligned}$$

Luego,  $y = \frac{b}{a}x$  es una asíntota oblicua por la derecha.

Similarmente:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{b}{a}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = 0$$

Luego,  $y = -\frac{b}{a}x$  es una asíntota oblicua por la izquierda.

**PROBLEMA 4.** Demostrar el teorema 5.23:

1.  $y = mx + b$  es una asíntota oblicua a la derecha de  $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = b$$

2.  $y = mx + b$  es una asíntota oblicua a la izquierda de  $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = b$$

**Solución**

1. ( $\Rightarrow$ ) Si  $y = mx + b$  es una asíntota oblicua a la derecha de  $y = f(x)$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad \text{(I)}$$

Sacando factor común  $x$  tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x} \right] = 0$$

Puesto que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$ , para que se cumpla la igualdad anterior, debemos tener que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x} \right] = 0$$

Aún más, puesto que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = 0$ , tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - m \right] = 0$$

De donde,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$

Por otro lado, teniendo en cuenta (1), obtiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = b$$

$$(\Leftarrow) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx - b] = 0$$

Luego,  $y = mx + b$  es una asíntota a la derecha de  $y = f(x)$ .

2. Se procede como en 1.

## PROBLEMAS PROPUESTOS 5.8

*Hallar las asíntotas oblicuas al gráfico de las siguientes funciones*

1.  $y = \frac{x^2}{x-1}$

2.  $y = \frac{x^3}{x^2-1}$

3.  $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$

4.  $y = \frac{2x^4 + x^2 + x}{x^3 - x^2 + 2}$

5.  $y = \sqrt{x^2 - 1}$

6.  $y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

7.  $f(x) = x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 3}}$

8.  $f(x) = x^{2/3} (6-x)^{1/3}$

## BREVE HISTORIA DE $\pi$

*Se ha sostenido, con justa razón, que la historia de  $\pi$  es un “pequeño espejo de la historia del hombre”.*

$\pi$ , la constante más famosa de todos los tiempos, es la razón entre la longitud de cualquier circunferencia y la longitud de su diámetro.

La historia de  $\pi$  comienza con el inicio de la civilización, cuando el hombre precisa de mediciones precisas con motivos agrícolas o arquitectónicos.

Al inicio, alrededor de 2000 años antes de Cristo, el valor de  $\pi$  fue aproximado empíricamente. Así, para los antiguos hebreos,  $\pi = 3$ ; para los babilonios,  $\pi = 3 + 1/8 = 3.125$ ; para los antiguos egipcios,  $\pi = 4 \times (8/9)^2 = 3.16045$

El empirismo en el cálculo de  $\pi$  fue superado por el gran **Arquímedes**, quien consideró a la longitud de la circunferencia como el límite de los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos a la circunferencia. Mediante este método logró probar que:

$$3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7 \quad \text{o bien, en decimales, } 3.1408 < \pi < 3.142858$$

Con la llegada de los romanos, tanto la historia de  $\pi$  como del mundo, pasa por tiempos oscuros, hasta llegada del Renacimiento. En siglo XVI aparece el matemático francés **François Viète** (1540–1603), considerado como el padre del Álgebra. Viète Aplicó el Álgebra y la Trigonometría al método de Arquímedes, mejorando los resultados. Logra expresar a  $\pi$  como una serie infinita. En 1593, haciendo uso de esta serie, calcula 10 cifras decimales, que son las siguientes:

$$\pi \approx 3.1415926535$$

En 1615, el matemático alemán **Ludolf von Ceulen**, mediante otra serie infinita calcula 35 decimales de  $\pi$ .

En 1761, el físico-matemático alemán **Johann Heinrich Lambert** probó que  $\pi$  es número irracional. En consecuencia, su expresión decimal es infinita y no periódica.

En 1844, **Johann Martin Zacharias Dase** (1824–1861), usando series y alrededor de dos meses de trabajo duro, calculó 200 dígitos. En 1989, los **hermanos Chudnovsky**, dos matemáticos de la **Universidad de Columbia** (Nueva York), usando una computadora Cray 2 y una IBM 3090-VF, calcularon 1,011,196,691 dígitos. El record, hasta 1995, lo tiene **Yasumasa Kanada**, profesor de la U. de Tokio, quien ha calculado 6,442,450,000 dígitos.

Para usos prácticos no se requiere mucha exactitud de  $\pi$ . Así, sólo se requieren 39 decimales para computar la longitud de la circunferencia del universo conocido, con un error no mayor que el radio de un átomo de hidrógeno.

**Arquímedes**  
(287–212 A C)



**François Viète**  
(1540–1603)



# 6

---

## LA DERIVADA

---

*ISAAC NEWTON*  
(1642 – 1727)

**6.1 LA DERIVADA**

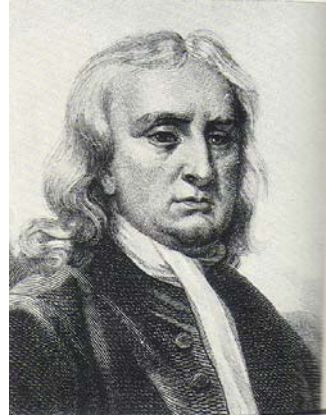
**6.2 TECNICAS BASICAS DE DERIVACION**

**6.3 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES  
TRIGONOMETRICAS**

**6.4 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES  
EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS**

**6.5 REGLA DE LA CADENA**

## Isaac Newton (1642 – 1727)



ISAAC NEWTON nació en Woolsthorpe, Inglaterra, el día de navidad de 1642. Su obra cambió el pensamiento científico de su época y aún en la ciencia actual sus ideas están presentes.

En 1661, a la edad de 18 años, ingresó al Trinity College de Cambridge, donde conoció a otro ilustre matemático, Isaac Barrow (1630–1677). Se graduó en 1665. En el otoño de ese año, una epidemia azotó el área de Londres y la universidad tuvo que cerrar sus puertas por año y medio. Newton regresó a la granja de su familia en su pueblo natal. Esta etapa fue muy fructífera en la vida del insigne científico. Se dice que fue allí donde ocurrió el incidente de la manzana: Newton, al ver caer una manzana de un árbol, relacionó la caída de ésta con la atracción gravitacional que ejerce la tierra sobre la luna, naciendo así la famosa ley de la gravitación universal. También fue en esta época cuando desarrolló, lo que él llamó, el método de las fluxiones, que fueron el fundamento del **Cálculo Diferencial**. Estas ideas también fueron desarrolladas simultáneamente e independientemente por el matemático y filósofo alemán G. Leibniz (1646-1716). A ambos científicos se les concede la paternidad del **Cálculo**.

En 1667 regresa a Cambridge y en 1669 Barrow renuncia a su cargo de profesor de matemáticas en el Trinity College a favor de Newton.

Sus investigaciones en óptica las aplicó para construir el primer telescopio de reflexión. Gracias a este invento ingresó a la Sociedad Real, la institución científica inglesa de gran renombre y de la cual llegó a ser su presidente.

En 1687 se publicó su obra capital: **Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica** (Principios Matemáticos de la Filosofía Natural), en la que presenta las leyes de la mecánica clásica y su famosa teoría de la gravitación universal. Con esta obra ganó gran renombre y fue razón principal para que en 1705 lo nombraran caballero del Imperio.

### ACONTECIMIENTOS PARALELOS IMPORTANTES

Durante la vida de Isaac Newton, en América y en el mundo hispano sucedieron los siguientes hechos notables: En 1706 nace en Boston Benjamín Franklin, científico y estadista norteamericano. El 22 de diciembre de 1721 Felipe V convierte el Colegio de Santa Rosa de Caracas en la universidad de Caracas (U. Central), que es inaugurada en 1725.

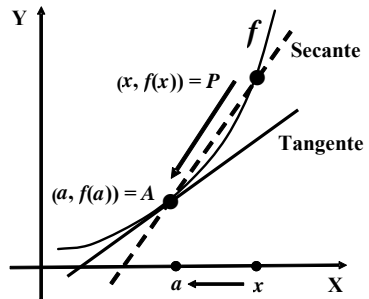
**SECCION 6.1**  
**LA DERIVADA**

La noción de derivada tuvo su origen en la búsqueda de soluciones a dos problemas, uno de la Geometría y otro de la Física, que son: Encontrar rectas tangentes a una curva y hallar la velocidad instantánea de un objeto en movimiento. El planteamiento del problema de las tangentes se remonta hasta la Grecia Antigua; sin embargo, para encontrar su solución debieron pasar muchos siglos. En el año 1629, Pierre Fermat encontró un interesante método para construir las tangentes a una parábola. Su idea fue la de considerar a la recta tangente como la posición límite de rectas secantes. Este método, como veremos a continuación, contiene implícitamente el concepto de derivada. A partir de aquí, no pasó mucho tiempo para que Newton (1643–1727) y Leibniz (1646–1716), dos gigantes de la matemática, iniciaran el estudio sistemático de la derivada, con lo que dieron origen al Cálculo Diferencial.

**RECTA TANGENTE**

Sea  $y = f(x)$  una función real de variable real y sea  $A = (a, f(a))$  un punto fijo de su gráfico. Buscamos la recta tangente al gráfico de la función en el punto  $A$ . Para no tener dificultades vamos a asumir que nuestra función es continua y su gráfico se desarrolla suavemente (sin vértices). Tomemos otro punto  $P = (x, f(x))$  del gráfico, cercano al punto de tangencia  $A = (a, f(a))$ , y tracemos la recta secante que pasa por  $A$  y  $P$ .

Si movemos a  $P$  sobre el gráfico en tal forma que  $P$  se aproxime a  $A$ , la recta secante se aproximará a la recta tangente. En el límite, la secante coincidirá con la tangente. Esto es, la recta tangente es la posición límite de la recta secante cuando  $P$  tiende a  $A$ .



Veamos el punto anterior en forma analítica. Como la recta tangente pasa por el punto  $A = (a, f(a))$ , para obtener su ecuación bastará encontrar su pendiente.

La pendiente de la recta secante que pasa por  $P = (x, f(x))$  y  $A = (a, f(a))$  es

$$m_{PA} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Ahora, cuando el punto  $P = (x, f(x))$  se aproxima a  $A = (a, f(a))$ , la secante se aproxima a la tangente y la pendiente de la secante se aproximará a la pendiente de la tangente. Pero, decir que  $P = (x, f(x))$  se aproxima a  $A = (a, f(a))$  es equivalente a decir que  $x$  se aproxima a  $a$ . Es pues razonable establecer que la pendiente  $m$  de la recta tangente al gráfico de la función  $y = f(x)$  en el punto  $A = (a, f(a))$  es

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{i}$$

### VELOCIDAD INSTANTANEA

Supongamos que un automóvil cruza por dos ciudades distantes entre sí 180 Kms. y que estos 180 Kms. los recorre en 3 horas. El automóvil, en este recorrido, viajó a una velocidad promedio de  $\frac{180}{3} = 60$  Kms/h.

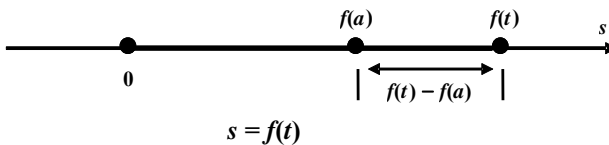
En general tenemos que:

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

Regresemos al caso del automóvil. La aguja del velocímetro no se ha mantenido estática marcando 60 Kms/h, que es la velocidad promedio, sino que ésta ha estado variando, algunas veces marcando 0 (en los semáforos) y otras marcando números mayores que 60. Esto se debe a que la aguja marca la **velocidad instantánea** y no la velocidad promedio. ¿Cómo se relacionan estas dos velocidades? A continuación contestamos esta inquietud tratando el problema en forma más general.

Supongamos que un objeto se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuación  $s = f(t)$ . Aquí la variable  $t$  mide el tiempo y la variable  $s$  mide el desplazamiento del objeto contabilizado a partir del origen de coordenadas. A esta función  $s = f(t)$  la llamaremos **función de posición**.

Buscamos una expresión para la velocidad instantánea en un instante fijo  $a$ . A esta velocidad la denotaremos por  $v(a)$ . Sea  $t$  un instante cualquiera cercano al instante  $a$ . En el intervalo de tiempo entre  $a$  y  $t$  el cambio de posición del objeto es  $f(t) - f(a)$ .



La velocidad promedio en este intervalo de tiempo de  $a$  a  $t$  es:

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

Esta velocidad promedio es una aproximación a la **velocidad instantánea**  $v(a)$ . Esta aproximación será mejor a medida que  $t$  se acerque más al instante  $a$ . Por tanto, es natural establecer que:

$$v(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \quad (\text{ii})$$

Tanto en el problema de la recta tangente como en el de la velocidad instantánea, hemos llegado a un mismo límite ((i) y (ii)). En este límite radica la esencia del Cálculo Diferencial. Su importancia rebasa a los problemas geométricos y físicos que le dieron origen, y merece ser tratado independientemente. Este límite es la derivada.

**DEFINICION.** La derivada de  $f$  en  $a$ , denotada por  $f'(a)$ , es el siguiente límite:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (1)$$

La derivada  $f'(a)$ , por ser un límite, puede o no existir. En el caso de que exista diremos que la función  $f$  es **diferenciable en el punto  $a$** .

En esta definición está implícito que  $f$  debe estar definida en un intervalo abierto que contiene a  $a$ .

Al límite anterior lo podemos expresar en otra forma ligeramente diferente.

Si  $h = x - a$ , entonces  $x = a + h$  y  $x \rightarrow a \Leftrightarrow h \rightarrow 0$ .

Luego, (1) es equivalente a:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (2)$$

Es tradicional llamar  $\Delta x$  (delta  $x$ ) a la diferencia  $x - a$ . Esto es,

$$\Delta x = x - a$$

En este caso,  $x = a + \Delta x$  y  $x \rightarrow a \Leftrightarrow \Delta x \rightarrow 0$ .

Con esta notación, al límite (1) ó al (2) los podemos escribir de la manera siguiente, obteniendo la expresión tradicional para la derivada:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad (3)$$

A  $\Delta x = x - a$  se le llama **incremento de  $x$** , y expresa el cambio que experimenta la variable independiente al pasar del valor  $a$  al valor  $x = a + \Delta x$ .

La diferencia  $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$  es el **incremento de la función**, y expresa el cambio de los valores de la función al pasar de  $f(a)$  a  $f(a + \Delta x)$ .

El cociente  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  es la **razón incremental**, y de acuerdo a la igualdad (3) se tiene:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Es decir, la derivada es el límite de la razón incremental cuando  $\Delta x$  tiende a 0.

Para hallar la derivada  $f'(a)$  se utilizan cualquiera de los 3 límites: (1), (2) ó (3).

**EJEMPLO 1.** Dada la función  $f(x) = x^2$ , hallar  $f'(3)$ .

**Solución**

Usaremos la fórmula (1):

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$


---

**EJEMPLO 2.** Dada la función  $g(x) = \frac{1}{x}$ , hallar  $g'(-2)$ .

**Solución**

Usaremos la fórmula (2) de la derivada:

$$\begin{aligned} g'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-2+h) - g(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{-2+h} - \frac{1}{-2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 - (-2+h)}{(-2)h(-2+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{(-2)h(-2+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2(-2+h)} = \frac{1}{2(-2+0)} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$


---

**EJEMPLO 3.** Probar que la siguiente función es diferenciable en 0 y que  $f'(0) = 0$ .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**Solución**

Debemos probar que existe  $f'(0)$  y que  $f'(0) = 0$ .

Recordando el problema resuelto 1 de la sección 5.2 tenemos:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0.$$


---

**EJEMPLO 4.** Probar que  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  no es diferenciable en 0. Esto es, no existe  $f'(0)$ .

**Solución**

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

Como  $+\infty$  no es un número real, concluimos que no existe  $f'(0)$ .

## DERIVADAS POR LA DERECHA Y POR LA IZQUIERDA

**DEFINICIÓN.** La derivada por la derecha y la derivada por la izquierda de  $f$  en  $a$  son los siguientes límites, respectivamente:

$$(1) f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (2) f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Es fácil ver que:

$$\exists f'(a) \Leftrightarrow \exists f'_+(a), \exists f'_-(a) \text{ y } f'_+(a) = f'_-(a)$$

**EJEMPLO 5.** Dada la función valor absoluto  $f(x) = |x|$ .

- a. Hallar  $f'_+(0)$     b. Hallar  $f'_-(0)$     c. Probar que  $f$  no es diferenciable en 0.

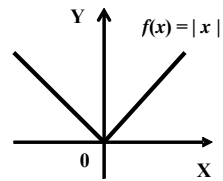
### Solución

a.  $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$

b.  $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

- c. Como las derivadas laterales no son iguales, concluimos que no existe  $f'(0)$  y, por tanto,  $f(x) = |x|$  no es diferenciable en el punto 0.

Este resultado puede explicarse geoméricamente: El gráfico de  $f(x) = |x|$  tiene un vértice en el punto  $(0, 0)$ . Este vértice no permite asignarle una recta tangente al gráfico en este punto, ya que al pasar de los puntos a la izquierda de  $(0, 0)$  a los de la derecha hay un cambio brusco de pendientes de  $-1$  a  $1$ .



## LA FUNCION DERIVADA

**DEFINICIÓN.** La derivada de la función  $f$  es la función  $f'$ , tal que su valor en un número  $x$  del dominio de  $f$  es la derivada de  $f$  en  $x$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El dominio de  $f'$  está formado por los puntos  $x$  del dominio de  $f$  en los cuales existe  $f'(x)$ . Es claro que el dominio de  $f'$  es un subconjunto del dominio de  $f$ .

Otro símbolo para  $f'$  es  $Df$ ; esto es  $Df = f'$  y en el caso de que se quiera especificar la variable independiente, se escribe  $D_x f$ , que se lee "la derivada de  $f$  respecto a  $x$ ". Se tiene, entonces

$$D_x f(x) = f'(x)$$

**EJEMPLO 6.** a. Probar que la derivada de  $f(x) = x^2$  es la función  $f'(x) = 2x$ .

b. Usando la parte (a) hallar  $f'(3)$  y observar que el resultado del ejemplo 1 es un caso particular del resultado (a).

### Solución

a. Sea  $x$  un punto cualquiera del dominio de  $f$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

Esto es,  $f'(x) = 2x$  y el dominio de  $f'$  es el mismo que el de  $f$ , que es todo  $\mathbb{R}$ .

b. En  $f'(x) = 2x$ , tomando  $x = 3$ , se tiene que  $f'(3) = 2(3) = 6$ . Este resultado coincide con el obtenido en el ejemplo 1.

**EJEMPLO 7.** a. Probar que la derivada de  $g(x) = \frac{1}{x}$  es la función

$$D_x g(x) = -\frac{1}{x^2}$$

b. Usando la parte (a) hallar  $D_x g(-2)$  y observar que el resultado del ejemplo 2 es un caso particular del resultado (a).

### Solución

a. Sea  $x$  un punto cualquiera del dominio de  $g$ . Esto es  $x \neq 0$ .

$$\begin{aligned} D_x g(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+0)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Esto es,  $D_x g(x) = g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

El dominio de  $D_x g(x) = -\frac{1}{x^2}$  es el mismo que el de  $g(x) = \frac{1}{x}$ , que es  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

b. En  $D_x g(x) = -\frac{1}{x^2}$ , tomando  $x = -2$ , se tiene  $D_x g(-2) = -\frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4}$ .

Este resultado coincide con el obtenido en ejemplo 2:  $g'(-2) = -\frac{1}{4}$ .

### LA NOTACION DE LEIBNIZ

Además de la notación que hemos introducido para designar a la función derivada existen otras. Entre éstas tenemos la notación clásica, que fue introducida por Leibniz durante la época del nacimiento del Cálculo. Esta notación para designar la derivada de una función  $y = f(x)$  usa cualquiera de las cuatro expresiones siguientes:

$$1. \frac{dy}{dx} \quad 2. \frac{df}{dx} \quad 3. \frac{df'(x)}{dx} \quad 4. \frac{d}{dx}(f(x))$$

En el ejemplo 6 encontramos que la derivada de la función  $f(x) = x^2$  es  $f'(x) = 2x$ . Con la notación de Leibniz este resultado se escribe así:

$$\frac{df(x)}{dx} = 2x \quad \text{o bien,} \quad \frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x.$$

y si en lugar de  $f(x) = x^2$  escribimos  $y = x^2$ , entonces su derivada se expresaría así:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2x$$

Regresando a la notación incremental, si una función es denotada por  $y = f(x)$ , entonces el incremento de la función podemos expresarlo así:  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  y a la derivada, con la notación de Leibniz, así:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

En esta expresión nos inspiraremos en un capítulo posterior para asignar significados propios a  $dx$  y a  $dy$ . Aquí  $\frac{dy}{dx}$  no debe interpretarse como una fracción, sino simplemente como otra notación para la derivada  $f'(x)$ .

Si  $y = f(x)$ , con la notación de Leibniz, la derivada  $f'(a)$  se escribe así:

$$y'(a), \quad \frac{dy}{dx}(a), \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} \quad \text{ó} \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a}$$

**EJEMPLO 8.** Probar que  $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , donde  $x > 0$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Observar que el dominio de  $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  es  $(0, +\infty)$ .

**NOTACION.** Si una función se expresa mediante otras variables, que no sean  $x$  ó  $y$ , la notación de la derivada cambiará de acuerdo a las nuevas variables. Así, la derivada de la función  $u = t^2$  se expresa:

$$1. u' = 2t \quad 2. \frac{du}{dt} = 2t \quad 3. \frac{d(t^2)}{dt} = 2t \quad 4. D_t(t^2) = 2t.$$

## DIFERENCIABILIDAD Y CONTINUIDAD

El siguiente es un resultado que relaciona la diferenciabilidad con la continuidad.

**TEOREMA 6.1** Si  $f$  es diferenciable en el punto  $a$ , entonces  $f$  es continua en  $a$ .

**Demostración**

Consideremos la siguiente identidad

$$f(x) - f(a) = (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Tomemos límites a ambos lados:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} \left[ (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \\ &= \left[ \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \right] \left[ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] = 0 \cdot f'(a) = 0 \end{aligned}$$

Esto es,  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$ . De donde,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Esta última igualdad nos dice que  $f$  es continua en  $a$ .

**OBSERVACION.**

El recíproco del teorema anterior no se cumple. Una función puede ser continua en un punto y no ser diferenciable en ese punto. La función valor absoluto nos ilustra el caso. Esta función es continua en el punto 0. Sin embargo, como se mostró en el ejemplo 5, esta función no es diferenciable en 0.

Igual situación ocurre con la función  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ , del ejemplo 4, la cual también es continua en 0, pero no es diferenciable en ese punto.

**RECTAS TANGENTES**

Damos respaldo oficial al problema geométrico de la recta tangente, que nos sirvió de motivación para introducir la derivada.

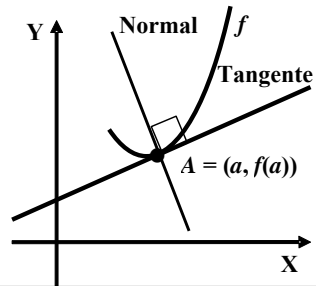
**DEFINICION.** Sea  $f$  una función diferenciable en el punto  $a$ .

a. La **recta tangente** al gráfico de la función  $f$  en el punto  $A = (a, f(a))$  es la recta que pasa por  $A$  y tiene por pendiente  $m = f'(a)$ . O sea, es la recta

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

b. La **recta normal** al gráfico de la función  $f$  en el punto  $A = (a, f(a))$  es la recta que pasa por  $A$  y es perpendicular a la recta tangente en  $A$ . O sea, es la recta

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a), \text{ donde } f'(a) \neq 0.$$



**EJEMPLO 9.** Sea la función  $f(x) = x^2$ . Hallar:

- a. La recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(2, 4)$ .
- b. La recta normal al gráfico de  $f$  en el punto  $(2, 4)$ .

**Solución**

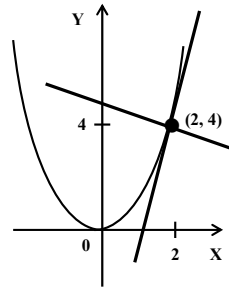
a. En el ejemplo 6 se probó que la derivada de  $f(x) = x^2$  es  $f'(x) = 2x$ . Cuando  $x = 2$  tenemos  $f'(2) = 2(2) = 4$ . Luego, la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(2,4)$  es

$$y - f(2) = f'(x)(x - 2) \Rightarrow y - 4x + 4 = 0$$

b. La recta normal al gráfico de  $f$  en el punto  $(2,4)$  es

$$y - f(2) = -\frac{1}{f'(2)}(x - 2) \Rightarrow y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

$$\Rightarrow 4y + x - 18 = 0$$



**EJEMPLO 10.** Sea la función  $g(x) = \frac{1}{x}$ . Hallar:

- La recta tangente al gráfico de  $g$  en el punto donde  $x = -1/2$
- La recta normal al gráfico de  $g$  en el punto donde  $x = -1/2$

**Solución**

a. Hallemos  $g'(-1/2)$ . Por el ejemplo 7.a. sabemos que

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{y, por tanto,}$$

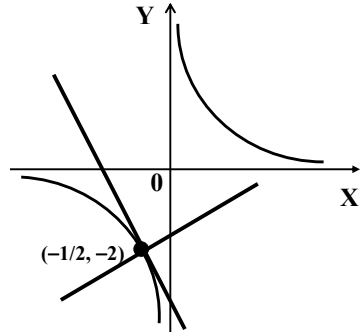
$$g'(-1/2) = -\frac{1}{(-1/2)^2} = -4.$$

Por otro lado,  $g(-1/2) = \frac{1}{-1/2} = -2$ .

Luego, la recta tangente buscada es:

$$y - g(-1/2) = g'(-1/2)(x - (-1/2)) \Rightarrow$$

$$y - (-2) = -4(x + 1/2) \Rightarrow y + 4x + 4 = 0$$



b. La recta normal buscada es

$$y - g(-1/2) = -\frac{1}{g'(-1/2)}(x - (-1/2)) \Rightarrow y - (-2) = -\frac{1}{-4}(x + 1/2)$$

$$\Rightarrow 8y - 2x + 15 = 0.$$

## PROBLEMAS RESUELTOS 6.1

**PROBLEMA 1.** Hallar  $a$  y  $b$  para que la siguiente función sea diferenciable en 1.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

**Solución**

Por el teorema 6.1, si  $f$  es diferenciable en 1,  $f$  debe ser continua en 1. Luego:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

Pero,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + x) = a + b$$

Luego,  $a + b = 1$  (1)

Por otro lado, por ser  $f$  diferenciable en 1, la derivada por la derecha en este punto debe ser igual a su derivada por la izquierda. Esto es,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{a(1+h) + b - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ah + (a+b) - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ah + 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{ah}{h} = a \end{aligned}$$

Luego,  $a = \frac{1}{2}$  (2)

Finalmente, de (1) y (2), obtenemos  $a = \frac{1}{2}$  y  $b = -\frac{1}{2}$ .

**PROBLEMA 2.** Hallar la derivada de la función  $f(x) = x^3$ .

**Solución**

Sea  $x$  un punto cualquiera del dominio de  $f$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[3x^2 + 3xh + h^2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [3x^2 + 3xh + h^2] = 3x^2 \end{aligned}$$

Luego,  $f'(x) = 3x^2$  ó bien  $\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2$ , con dominio todo  $\mathbb{R}$ .

**PROBLEMA 3.** Hallar la derivada de la función  $f(x) = |x|$ .

**Solución**

Sabemos, por el ejemplo 5, que no existe  $f'(0)$ . Veamos qué sucede cuando  $x \neq 0$ .

Si  $x > 0$ , entonces  $|x| = x$ .

Tomamos  $h$  suficientemente pequeño para que  $x + h > 0$ . Luego  $|x + h| = x + h$ .

En este caso tenemos que:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

Si  $x < 0$ , entonces  $|x| = -x$ .

Tomamos  $h$  suficientemente pequeño para que  $x + h < 0$ . Luego,  $|x+h| = -(x+h)$ .

En este caso tenemos que:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

En conclusión, la derivada de la función  $f(x) = |x|$  es

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{con dominio } \mathbb{R} - \{0\}.$$

**PROBLEMA 4.** La tangente a la parábola  $y = x^2$  en cierto punto  $P$  es paralela a la recta  $L: y + 4x + 12 = 0$ .

Hallar el punto  $P$  y la recta tangente.

### Solución

Sea  $P = (a, a^2)$ . Por el ejemplo 6 sabemos que  $y' = 2x$ , luego la pendiente de la recta tangente a la parábola  $y = x^2$  en el  $P = (a, a^2)$  es  $m = 2a$ .

Pero, la pendiente de la recta

$$L: 4x + y + 12 = 0 \text{ es } -4.$$

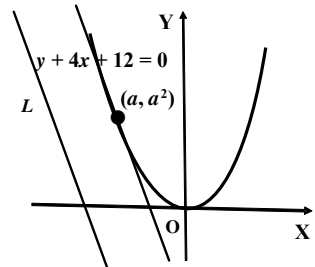
Como  $L$  y la tangente son paralelas, ambos deben tener igual pendiente. Luego,

$$2a = -4 \Rightarrow a = -2.$$

Por lo tanto, el punto buscado es  $P = (-2, (-2)^2) = (-2, 4)$

La recta tangente a la parábola en  $P = (-2, 4)$  es

$$y - 4 = -4(x - (-2)), \quad \text{o sea } 4x + y + 4 = 0$$



## PROBLEMAS PROPUESTOS 6.1

*En los problemas del 1 al 9, hallar la derivada de la función en el punto a indicado.*

1.  $f(x) = 2$  en  $a = 1$       2.  $g(x) = x$  en  $a = 3$       3.  $h(x) = 3x$  en  $a = 2$   
 4.  $f(x) = 4x - 1$  en  $a = 2$     5.  $g(x) = 2x^2 - 5$  en  $a = -1$     6.  $h(x) = \frac{3}{x}$  en  $a = -2$   
 7.  $f(x) = 3x^2 - 5$  en  $a = -1$     8.  $g(x) = x + \frac{1}{x}$  en  $a = 2$       9.  $h(x) = x^3 + 2$  en  $a = -1$

10. Probar que la siguiente función es diferenciable en 0:  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 0 \\ 0, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

11. Probar que la siguiente función no es diferenciable en 0:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{si } x \leq 0 \\ 1-x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

12. Hallar los valores de  $a$  y  $b$  para que  $f$  sea diferenciable en 1:

$$f(x) = \begin{cases} ax+b, & \text{si } x < 1 \\ \sqrt[3]{x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

*En los problemas del 13 al 21, hallar la derivada de la función indicada.*

13.  $f(x) = 2$     14.  $g(x) = x$     15.  $h(x) = 3x$     16.  $f(x) = 4x - 1$     17.  $g(x) = 2x^2 - 5$

18.  $h(x) = \frac{3}{x}$     19.  $f(x) = 3x^2 - 5$     20.  $g(x) = x + \frac{1}{x}$     21.  $h(x) = x^3 + 2$

22. Dada la función  $f(x) = x^3 + x^2$

- a. Hallar la pendiente de la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto donde  $x = 1$ .
- b. Hallar la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto donde  $x = 1$ .
- c. Hallar la recta normal al gráfico de  $f$  en el punto donde  $x = 1$ .

23. Dada la función  $g(x) = \sqrt{x-3}$

- a. Hallar la pendiente de la recta tangente al gráfico de  $g$  en el punto donde  $x = 12$ .
- b. Hallar la recta tangente al gráfico de  $g$  en el punto donde  $x = 12$ .
- c. Hallar la recta normal al gráfico de  $g$  en el punto donde  $x = 12$ .

24. Dada la función  $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 7$

- a. Hallar su función derivada.
- b. ¿En qué punto del gráfico de  $h$  la tangente es paralela a la recta  $y = 3x + 6$ ?
- c. Hallar la recta tangente al gráfico de  $h$  en el punto encontrado en la parte b.

25. Dada la función  $f(x) = \sqrt{2x+1}$

- a. Hallar la función derivada de  $f$ .
- b. Una tangente al gráfico de  $f$  tiene por pendiente  $1/2$ . Hallar una ecuación de esta tangente.

## SECCION 6.2

## TECNICAS BASICAS DE DERIVACION

Llamaremos **derivación o diferenciación** al proceso de hallar la derivada de una función. En la sección anterior, este proceso fue llevado a cabo aplicando directamente la definición, lo cual dependía del laborioso y tedioso trabajo de calcular ciertos límites. En esta sección presentaremos algunos teoremas que nos permitirán encontrar la derivada de un gran número de funciones en forma rápida y mecánica, sin tener que recurrir a los límites.

**TEOREMA 6.2** Regla de la constante.

Si  $f$  es la función constante  $f(x) = c$ , entonces

$$f'(x) = 0. \text{ O bien, } D_x c = 0, \quad \frac{dc}{dx} = 0$$

**Demostración**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

**EJEMPLO 1.** a.  $D_x(2) = 0$    b.  $\frac{d(-8)}{dx} = 0$    c.  $\frac{d(\sqrt{3})}{dx} = 0$    d.  $D_x(\pi) = 0$

**TEOREMA 6.3** Regla de la potencia.

Si  $f(x) = x^n$  y  $n$  es un número real, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}. \text{ O bien } D_x(x^n) = nx^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

**Demostración**

Aquí sólo probaremos este teorema para el caso en el que  $n$  es un número natural.

Tomando en cuenta el problema resuelto 7 de la sección 5.1 tenemos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

**COROLARIO.** La derivada de la identidad,  $f(x) = x$ , es la función constante

$$f'(x) = 1. \text{ O bien } \frac{dx}{dx} = 1, \quad D_x(x) = 1$$

**Demostración**

$$D_x(x) = D_x(x^1) = 1x^0 = 1$$

**EJEMPLO 2.** a.  $D_x(x^2) = 2x$     b.  $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$     c.  $D_x(x^4) = 4x^3$

**EJEMPLO 3.** a.  $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$   
 b.  $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$   
 c.  $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3} \frac{1}{x^{1/3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

**DERIVADA DE LA FUNCION EXPONENCIAL NATURAL**

**TEOREMA 6.4**  $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ .    O bien  $D_x(e^x) = e^x$

**Demostración**

De acuerdo al teorema 5.22 parte 3 de la sección 5.7, tenemos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Ahora, si  $f(x) = e^x$ , tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x(1) = e^x \end{aligned}$$

**DERIVADA DE UNA SUMA O DIFERENCIA**

**TEOREMA 6.5** Regla de la suma y de la diferencia.

Si  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables en  $x$ , entonces  $f \pm g$  es diferenciable en  $x$  y se cumple que:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x) \text{ ó, simplemente, } (f \pm g)' = f' \pm g'$$

La regla de la suma o diferencia, con las otras notaciones, se expresa así:

$$\begin{aligned} D_x [f(x) \pm g(x)] &= D_x f(x) \pm D_x g(x) \\ \frac{d}{dx} [f(x) \pm g(x)] &= \frac{d}{dx} (f(x)) \pm \frac{d}{dx} (g(x)) \end{aligned}$$

**Demostración**

$$\begin{aligned} (f(x) \pm g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) \pm g(x+h)] - [f(x) \pm g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \pm g'(x). \end{aligned}$$


---

Este resultado se puede extender fácilmente al caso de varios sumandos.

**EJEMPLO 4.** a.  $D_x [e^x + x^3] = D_x [e^x] + D_x [x^3] = e^x + 3x^2$

b.  $D_x [x^4 - x^2 + 5] = D_x (x^4) - D_x (x^2) + D_x (5) = 4x^3 - 2x + 0 = 4$

---

**DERIVADA DE UN PRODUCTO****TEOREMA 6.6** Regla del producto.

Si  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables en  $x$ , entonces  $fg$  es diferenciable en  $x$  y se cumple que

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \\ &\text{o, simplemente,} \\ (fg)' &= fg' + gf' \end{aligned}$$

La regla del producto, con las otras notaciones se expresa así:

$$\begin{aligned} D_x [f(x)g(x)] &= f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x) \\ \frac{d}{dx} [f(x)g(x)] &= f(x) \frac{d}{dx} (g(x)) + g(x) \frac{d}{dx} (f(x)) \end{aligned}$$

**Demostración**

Ver el problema resuelto 10.

---

**EJEMPLO 5.**  $D_x [(x^3 + 1)(x^2 - 8)] = (x^3 + 1) D_x [x^2 - 8] + (x^2 - 8) D_x [x^3 + 1]$

$$\begin{aligned} &= (x^3 + 1)(2x - 0) + (x^2 - 8)(3x^2 + 0) \\ &= 5x^4 - 24x^2 + 2x \end{aligned}$$


---

**COROLARIO.** Si  $c$  es una constante y  $f$  es una función diferenciable en  $x$ , entonces  $cf$  es diferenciable en  $x$  y se cumple que:

$$(cf)'(x) = cf'(x). \text{ O bien}$$

$$D_x[cf(x)] = c D_x f(x), \quad \frac{d}{dx} [cf(x)] = c \frac{d}{dx} (f(x))$$

**Demostración**

Aplicando la regla del producto y la regla de la constante tenemos que:

$$D_x[cf(x)] = c D_x f(x) + f(x) D_x c = c D_x f(x) + 0 = c D_x f(x).$$

**EJEMPLO 6.**  $D_x[5x^3] = 5D_x[x^3] = 5(3x^2) = 15x^2$

**DERIVADA DE UN COCIENTE**

**TEOREMA 6.7** Regla del cociente.

Si  $f$  y  $g$  son diferenciables en  $x$  y  $g(x) \neq 0$ , entonces  $\frac{f}{g}$  es diferenciable en  $x$  y se cumple que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \text{ o, simplemente,}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g f' - f g'}{g^2}$$

Con las otras notaciones:

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}(f(x)) - f(x)\frac{d}{dx}(g(x))}{[g(x)]^2}$$

**Demostración**

Ver el problema resuelto 12.

**EJEMPLO 7.**

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2x^3 - 1}{x^2 + 3}\right] = \frac{(x^2 + 3)\frac{d}{dx}(2x^3 - 1) - (2x^3 - 1)\frac{d}{dx}(x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^2}$$

$$= \frac{(x^2+3)(6x^2) - (2x^3-1)(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{2x^4 + 18x^2 + 2x}{(x^2+3)^2}$$

**EJEMPLO 8.** Hallar las rectas tangentes horizontales a la curva  $y = e^2 \frac{1-x}{e^x}$

**Solución**

Teniendo en cuenta que  $e^2$  es una constante y aplicando la regla de cociente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ e^2 \frac{1-x}{e^x} \right] = e^2 \frac{d}{dx} \left[ \frac{1-x}{e^x} \right] = e^2 \frac{e^x \frac{d}{dx}(1-x) - (1-x) \frac{d}{dx}(e^x)}{(e^x)^2}$$

$$= e^2 \frac{e^x(-1) - (1-x)e^x}{e^{2x}} = e^2 \frac{e^x(x-2)}{e^{2x}} = e^2 \frac{x-2}{e^x}$$

Las tangentes horizontales deben tener pendiente 0:

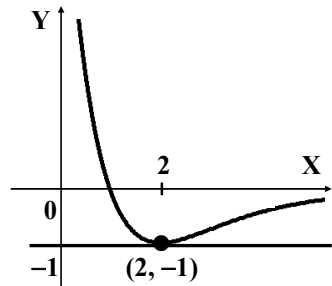
$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow e^2 \frac{x-2}{e^x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Luego, la curva dada tiene sólo una tangente horizontal en el punto donde  $x = 2$ .

Reemplazando  $x = 2$  en la ecuación de la curva:

$$y = \frac{e^2(1-2)}{e^2} = -1.$$

Luego, el punto de tangencia es  $(2, -1)$  y la ecuación de la tangente es  $y = -1$



## PROBLEMAS RESUELTOS 6.2

**PROBLEMA 1.** Hallar la derivada de la función  $y = x\sqrt{x}$ .

**Solución**

Podemos proceder de dos formas:

a. Mediante la regla del producto.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x\sqrt{x}) = x \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) + \sqrt{x} \frac{d}{dx}(x) = x \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \end{aligned}$$

b. Mediante la regla de la potencia.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x(x^{1/2})) = \frac{d}{dx}(x^{3/2}) = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

**PROBLEMA 2.** Hallar la derivada de la función  $u = \frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{3}{\sqrt[3]{v^2}}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{du}{dv} &= \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{3}{\sqrt[3]{v^2}}\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right) - \frac{d}{dv}\left(\frac{3}{\sqrt[3]{v^2}}\right) \\ &= \frac{d}{dv}(v^{-1/2}) - \frac{d}{dv}(3v^{-2/3}) = -\frac{1}{2}v^{-1/2-1} - 3\left(-\frac{2}{3}v^{-2/3-1}\right) \\ &= -\frac{1}{2v^{3/2}} + \frac{2}{v^{5/3}} = -\frac{1}{2\sqrt{v^3}} + \frac{2}{\sqrt[3]{v^5}}. \end{aligned}$$

**PROBLEMA 3.** Hallar la derivada de la función  $y = (1 + \sqrt{x})(x - \sqrt{2})$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (1 + \sqrt{x}) \frac{d}{dx}(x - \sqrt{2}) + (x - \sqrt{2}) \frac{d}{dx}(1 + \sqrt{x}) \\ &= (1 + \sqrt{x}) \left(\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(\sqrt{2})\right) + (x - \sqrt{2}) \left(\frac{d}{dx}(1) + \frac{d}{dx}(\sqrt{x})\right) \\ &= (1 + \sqrt{x})(1 - 0) + (x - \sqrt{2}) \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 1 + \sqrt{x} + \frac{x - \sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} + 2x + x - \sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} + 3x - \sqrt{2}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

**PROBLEMA 4.** Si  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones diferenciables, probar que

$$(fgh)' = fg'h' + fhg' + ghf'$$

**Solución**

Escribimos  $fgh = [fg]h$  y aplicamos la regla del producto:

$$\begin{aligned} (fgh)' &= ([fg]h)' = [fg]h' + h[fg]' \\ &= fg'h' + h(fg' + gf') \\ &= fg'h' + fhg' + ghf' \end{aligned}$$

**PROBLEMA 5.** Si  $a, b$  y  $c$  son constantes, hallar la derivada de la función

$$y = (x - a)(x - b)(x - c).$$

**Solución**

Aplicando el problema anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} [(x - a)(x - b)(x - c)] \\ &= (x - a)(x - b) \frac{d}{dx}(x - c) + (x - a)(x - c) \frac{d}{dx}(x - b) + (x - b)(x - c) \frac{d}{dx}(x - a) \\ &= (x - a)(x - b) + (x - a)(x - c) + (x - b)(x - c) \\ &= x^2 - (a + b)x + ab + x^2 - (a + c)x + ac + x^2 - (b + c)x + bc \\ &= 3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + ac + bc \end{aligned}$$

**PROBLEMA 6.** Hallar la derivada de la función  $y = \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$ .

**Solución**

Aplicamos la regla del cociente

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(a^2 - x^2) \frac{d}{dx}(a^2 + x^2) - (a^2 + x^2) \frac{d}{dx}(a^2 - x^2)}{(a^2 - x^2)^2} \\ &= \frac{(a^2 - x^2)(2x) - (a^2 + x^2)(-2x)}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{2a^2x - 2x^3 + 2a^2x + 2x^3}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{4a^2x}{(a^2 - x^2)^2} \end{aligned}$$

**PROBLEMA 7.** Hallar la parábola  $y = x^2 + bx + c$  que tiene por tangente a la recta  $y = x$  en el punto  $(2, 2)$ .

**Solución**

$$\text{Sea } f(x) = x^2 + bx + c.$$

La pendiente de la recta  $y = x$  es  $m = 1$ .

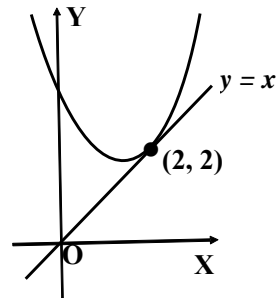
Por otro lado, la pendiente de la tangente a la parábola en el punto  $(2, 2)$  es  $f'(2)$ . En consecuencia, debemos tener que  $f'(2) = 1$ .

Pero,

$$f'(x) = 2x + b \Rightarrow f'(2) = 2(2) + b = 4 + b.$$

$$\text{Luego, } 4 + b = 1 \Rightarrow b = -3.$$

Reemplazando el valor  $b = -3$  en la parábola:  $y = x^2 - 3x + c$



Ahora hallamos el valor de  $c$ . Para esto, usamos el hecho de que el punto  $(2, 2)$  está en la parábola  $y$ , por tanto, debe satisfacer su ecuación. Esto es,

$$2 = (2)^2 - 3(2) + c \Rightarrow c = 4$$

En consecuencia, la parábola buscada es  $y = x^2 - 3x + 4$ .

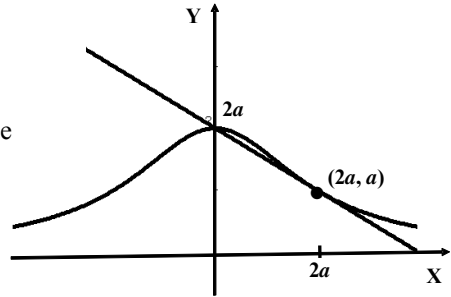
**PROBLEMA 8.** Hallar la recta tangente al gráfico de la función siguiente (**Bruja de Agnesi**) en el punto donde  $x = 2a$ .

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$$

**Solución**

Encontremos la pendiente de la tangente en el punto donde  $x = 2a$ .

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} \right) \\ &= \frac{(x^2 + 4a^2) \frac{d}{dx}(8a^3) - 8a^3 \frac{d}{dx}(x^2 + 4a^2)}{(x^2 + 4a^2)^2} \\ &= \frac{(x^2 + 4a^2)(0) - 8a^3(2x)}{(x^2 + 4a^2)^2} = \frac{-16a^3x}{(x^2 + 4a^2)^2} \end{aligned}$$



Ahora, la pendiente de la recta tangente en el punto donde  $x = 2a$  es:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2a} = \frac{-16a^3(2a)}{((2a)^2 + 4a^2)^2} = \frac{-32a^4}{64a^4} = -\frac{1}{2}$$

Encontremos el punto de tangencia. Reemplazando  $x = 2a$  en la ecuación que define la función tenemos:

$$y = \frac{8a^3}{(2a)^2 + 4a^2} = \frac{8a^3}{8a^2} = a.$$

Luego, el punto de tangencia es  $(2a, a)$ .

Ahora, ya podemos hallar la tangente buscada:

$$y - a = -\frac{1}{2}(x - 2a), \text{ o sea } x + 2y - 4a = 0.$$

**PROBLEMA 9.** Hallar los puntos del gráfico de la siguiente función en los cuales la recta tangente pasa por el origen de coordenadas.

$$f(x) = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$$

**Solución**

Sea  $(a, f(a))$  un punto del gráfico tal que la recta tangente en  $(a, f(a))$  pasa por el origen. En general, la ecuación de la recta tangente es:

$$L: y - f(a) = f'(a)(x - a) \Rightarrow$$

$$L: y = f'(a)x + [f(a) - af'(a)]$$

$$L \text{ pasa por el origen} \Leftrightarrow$$

$$[f(a) - af'(a)] = 0 \Leftrightarrow f(a) = af'(a)$$

Pero,  $f'(a) = 6a^2 + 26a + 5$ . Luego,

$$f(a) = af'(a) \Leftrightarrow$$

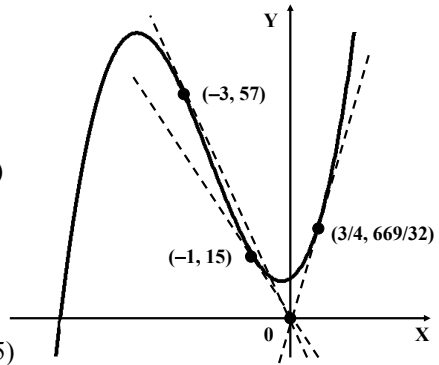
$$2a^3 + 13a^2 + 5a + 9 = a(6a^2 + 26a + 5)$$

$$\Leftrightarrow 4a^3 + 13a^2 - 9 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son  $-3$ ,  $-1$ , y  $3/4$ . Luego, los puntos buscados son:

$$P_1 = (-3, f(-3)) = (-3, 57), \quad P_2 = (-1, f(-1)) = (-1, 15) \quad \text{y}$$

$$P_3 = (3/4, f(3/4)) = (3/4, 669/32)$$



**PROBLEMA 10.** Regla del producto. Si  $f$  y  $g$  son diferenciables en  $x$ , probar:

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

**Solución**

$$(fg)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Restando y sumando  $f(x+h)g(x)$  al numerador tenemos:

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)] + [f(x+h)g(x) - f(x)g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h} \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[ g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= \left[ \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \right] \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] + \left[ \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \right] \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= f(x)g'(x) + g(x)f'(x). \end{aligned}$$

**PROBLEMA 11.** Si  $g$  es una función diferenciable en  $x$  y  $g(x) \neq 0$ , probar que

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

**Solución**

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{g(x+h)g(x)} \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \right] \\ &= \left[ -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \right] \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= -\frac{1}{g(x)g(x)} g'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$


---

**PROBLEMA 12. Regla del cociente.** Si  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables en  $x$  y  $g(x) \neq 0$ , probar que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

**Solución**

Tenemos que  $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \frac{1}{g(x)}$ .

Ahora, aplicamos la regla del producto y el resultado del problema anterior:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f(x) \frac{1}{g(x)}\right)' = f(x) \left(\frac{1}{g(x)}\right)' + \frac{1}{g(x)} f'(x) \\ &= f(x) \left(-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}\right) + \frac{1}{g(x)} f'(x) = \frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)} \\ &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$


---

## PROBLEMAS PROPUESTOS 6.2

*En los problemas del 1 al 38, hallar la derivada de la función indicada. Las letras a, b, c y d son constantes.*

1.  $y = 4x^2 - 6x + 1$

2.  $y = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^6}{6}$

3.  $y = 0,5x^4 - 0,3x^2 + 2,5x$

4.  $u = v^{10} - \frac{3v^8}{4} + 0,4v^3 + 0,1$

5.  $s = 2t^{-5} + \frac{t^3}{3} - 0,3t^{-2}$

6.  $z = \frac{1}{3y} - \frac{3}{y^2} + 2$

7.  $f(x) = 3x^{5/6} - 4x^{-2/3} - 10$

8.  $g(x) = ax^5 - bx^{-4} + cx^{3/2} + d$

9.  $y = -\frac{2x^6}{3a}$

10.  $z = \frac{x^3}{a+b} + \frac{x^5}{a-b} - x$

11.  $z = \frac{t^3 - bt^2 - 3}{6}$

12.  $y = 4\sqrt{x} - \frac{3}{2x^2} + \sqrt{3}$

13.  $z = \sqrt[3]{t} - \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$

14.  $u = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{3}$

15.  $y = (5x^4 - 4x^5)(3x^2 + 2x^3)$

16.  $y = x^3 e^x$

17.  $y = \sqrt{x} e^x$

18.  $y = x^e + e^x$

19.  $y = (x-1)(x-2)(x-3)$

20.  $y = \frac{1}{3}(2x^3 - 1)(3x^2 - 2)(6x - 5)$

21.  $z = \sqrt{t}(t^4 - 1)(t^6 - 2)$

22.  $y = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$

23.  $u = 2\sqrt{x}(x^2 - \sqrt{x} + \sqrt{5})$

24.  $y = (\sqrt{x} - 3)\left(\frac{2}{x} - 1\right)$

25.  $y = \frac{3}{x-9}$

26.  $y = \frac{x}{x-8}$

27.  $y = \frac{x+3}{x-3}$

28.  $z = \frac{t}{t^2 + 1}$

29.  $u = \frac{2t^3 + 1}{t-1}$

30.  $y = \frac{x^3 - 2x}{x^2 + x + 1}$

31.  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x}$

32.  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{\sqrt{x}}$

33.  $y = \frac{ax^2 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

34.  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} - (x-1)(x^2 - 1)$

35.  $y = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$

36.  $y = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}}$

37.  $y = \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + 3\sqrt[3]{x}}$

38.  $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

*En los problemas del 39 al 42, hallar la recta tangente al gráfico de la función en el punto especificado.*

39.  $y = x^4 - 3x^2 + x - 2$ ,  $(1, -3)$

40.  $y = x^2(x - 5)$ ,  $(2, -12)$

41.  $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 3}$ ,  $(-1, 1/2)$

42.  $g(x) = \frac{x^3}{2a - x}$ ,  $(a, a^2)$

43. Hallar el punto en la parábola  $y = 3x^2 - 2x - 1$  en el cual la recta tangente es horizontal (paralela al eje X).

44. Hallar la recta tangente horizontal a la curva  $y = \frac{e^x}{x}$

45. Hallar la recta tangente horizontal a la curva  $y = \frac{e^x}{1 + x^2}$

46. Hallar los puntos del gráfico de la función  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x - \frac{7}{2}$  en los cuales la recta tangente es horizontal (paralela al eje X).

47. Hallar la tangente al gráfico de  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$  que es paralela a la recta  $3x + y - 1 = 0$ .

48. Hallar la tangente al gráfico de  $g(x) = \sqrt{x} + 2$  que es perpendicular a la recta  $2x + y + 8 = 0$ .

49. Hallar la parábola  $y = ax^2 + bx$  que tenga a  $(2, -12)$  como punto más bajo.

50. Hallar la parábola  $y = ax^2 + bx$  que tenga a  $(4, 16)$  como punto más alto.

51. Hallar la parábola  $y = x^2 + bx + c$  que es tangente a la recta  $2x + y + 7 = 0$  en el punto  $(-2, -3)$ .

**SECCION 6.3**

**DERIVADAS DE LAS FUNCIONES**

**TROGONOMETRICAS**

**TEOREMA 6.8**

1.  $D_x(\text{sen } x) = \text{cos } x$

2.  $D_x(\text{cos } x) = -\text{sen } x$

3.  $D_x(\text{tan } x) = \text{sec}^2 x$

4.  $D_x(\text{cot } x) = -\text{cosec}^2 x$

5.  $D_x(\text{sec } x) = \text{sec } x \text{ tan } x$

6.  $D_x(\text{cosec } x) = -\text{cosec } x \text{ cot } x$

**Demostración**

$$1. D_x(\sin x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

Usando la identidad del seno de una suma, tenemos que

$$\begin{aligned} \sin(x+h) - \sin x &= \sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x \\ &= \sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} D_x(\sin x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin h}{h} \\ &= \left( \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \right) \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \left( \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \right) \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= (\sin x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x \end{aligned}$$

2. Se procede como en (1). Ver el problema propuesto 12.

$$\begin{aligned} 3. D_x(\tan x) &= D_x\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \\ &= \frac{\cos x D_x(\sin x) - \sin x D_x(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = \sec^2 x. \end{aligned}$$

4. Se prueba como (3). Ver el problema propuesto 13.

$$\begin{aligned} 5. D_x(\sec x) &= D_x\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{(\cos x)D_x(1) - (1)D_x(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{0 - (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x. \end{aligned}$$

6. Se prueba como (5). Ver el problema propuesto 14.

**EJEMPLO 1.** Hallar la derivada de

a.  $f(x) = x^3 \sin x$       b.  $h(\theta) = \tan \theta - \theta$

**Solución**

a.  $f'(x) = (x^3)'(\sin x) + (x^3)(\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$

b.  $h'(\theta) = \sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$  (Identidad Trig. 6)

**EJEMPLO 2.** Calcular la derivada de

$$\text{a. } y = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \quad \text{b. } y = \frac{1 - \cot x}{\operatorname{cosec} x}$$

**Solución**

$$\begin{aligned} \text{a. } D_{\theta}(y) &= \frac{(1 + \tan \theta)D_{\theta}(1 - \tan \theta) - (1 - \tan \theta)D_{\theta}(1 + \tan \theta)}{(1 + \tan \theta)^2} \\ &= \frac{(1 + \tan \theta)(-\sec^2 \theta) - (1 - \tan \theta)(\sec^2 \theta)}{(1 + \tan \theta)^2} = -\frac{2\sec^2 \theta}{(1 + \tan \theta)^2} \end{aligned}$$

**b. Método 1.**

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\operatorname{cosec} x)D_x(1 - \cot x) - (1 - \cot x)D_x(\operatorname{cosec} x)}{\operatorname{cosec}^2 x} \\ &= \frac{(\operatorname{cosec} x)(0 - (-\operatorname{cosec}^2 x)) - (1 - \cot x)(-\operatorname{cosec} x \cot x)}{\operatorname{cosec}^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{cosec}^3 x + \operatorname{cosec} x \cot x - \operatorname{cosec} x \cot^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{cosec} x (\operatorname{cosec}^2 x + \cot x - \cot^2 x)}{\operatorname{cosec}^2 x} \\ &= \frac{\operatorname{cosec}^2 x + \cot x - \cot^2 x}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1 + \cot^2 x + \cot x - \cot^2 x}{\operatorname{cosec} x} \\ &= \frac{1 + \cot x}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1 + \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x}} = \sin x + \cos x \end{aligned}$$

**Método 2**

$$y = \frac{1 - \cot x}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1 - \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x}} = \sin x - \cos x$$

Luego,

$$y' = D_x(\sin x - \cos x) = D_x(\sin x) - D_x(\cos x) = \cos x + \sin x$$


---

## PROBLEMAS PROPUESTOS 6.3

*En los problemas del 1 al 9 hallar la derivada de la función dada.*

1.  $f(x) = 5\sin x + 2\cos x$       2.  $g(\theta) = \theta \cot \theta$       3.  $y = \tan \alpha \sin \alpha$

4.  $y = \tan x - \cot x$       5.  $h(t) = \frac{\sin t}{1 + \cos t}$       6.  $f(x) = \frac{\tan x}{x}$

7.  $g(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$       8.  $y = \frac{\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t}$       9.  $y = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$

10. Si  $f(x) = \sec x - 2\cos x$ , hallar:

a. La recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(\pi/3, 1)$

b. La recta normal al gráfico de  $f$  en el punto  $(\pi/3, 1)$ .

11. Si la recta tangente al gráfico de función  $f(x) = \sin x$  en el punto  $(a, \sin a)$  pasa por el origen, probar que se cumple que  $\tan a = a$ .

12. Probar que  $D_x \cos x = -\sin x$       13. Probar que  $D_x \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$

14. Probar que  $D_x \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$

### SECCION 6.4

## DERIVADAS DE LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

**TEOREMA 6.9** Derivada de las funciones exponenciales y logarítmicas

1.  $D_x(a^x) = a^x \ln a$

2.  $D_x(\ln x) = \frac{1}{x}$       3.  $D_x(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$

**Demostración**

$$\begin{aligned}
 1. \quad D_x(a^x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h} \\
 &= a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a \quad (\text{Teorema 5.22, parte 4})
 \end{aligned}$$

2. Basta probar 3, ya que 2 sigue de 3, tomando  $a = e$ .

3. De acuerdo al teorema 5.22 parte 1, tenemos que  $\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + ah\right)^{\frac{1}{h}} = e^a$ .

Además, por el corolario al teorema 4.3, sabemos que  $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$

Ahora,

$$\begin{aligned} D_x(\log_a x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left(\frac{x+h}{x}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{1}{x}h\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{1}{x}h\right)^{\frac{1}{h}} = \log_a \left(\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}h\right)^{\frac{1}{h}}\right) \\ &= \log_a \left(e^{1/x}\right) = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a} \end{aligned}$$


---

**EJEMPLO 1.** Hallar la derivada de  $y = x^3 e^x + e5^x$

**Solución**

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x(x^3 e^x + e5^x) = D_x(x^3 e^x) + D_x(e5^x) \\ &= x^3 D_x(e^x) + e^x D_x(x^3) + e D_x(5^x) \\ &= x^3 e^x + e^x(3x^2) + e5^x \ln 5 = x^3 e^x + 3x^2 e^x + (e \ln 5)5^x \end{aligned}$$


---

**EJEMPLO 2.** Hallar la derivada de

$$1. y = \frac{\ln x}{x} \qquad 2. y = \log_2(x^3)$$

**Solución**

$$1. D_x y = \frac{x D_x(\ln x) - \ln x D_x(x)}{x^2} = \frac{x \frac{1}{x} - (\ln x)(1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$2. D_x y = D_x(\log_2(x^3)) = D_x(3 \log_2 x) = 3 \frac{1}{x \ln 2} = \frac{3}{x \ln 2}$$


---

**EJEMPLO 3.** Hallar la recta normal al gráfico de

$$f(x) = x \ln x,$$

en el punto donde  $x = e$

**Solución**

Tenemos que:  $f(e) = e \ln e = e(1) = e$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} f'(x) &= x(\ln x)' + (\ln x)(x)' \\ &= x \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x \Rightarrow \end{aligned}$$

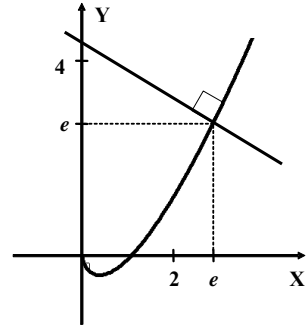
$$f'(e) = 1 + \ln e = 1 + 1 = 2$$

La pendiente de la recta normal en el punto  $(e, e)$  es:

$$m = -\frac{1}{f'(e)} = -\frac{1}{2}$$

Luego, la recta normal en el punto  $(e, e)$  es:

$$y - e = -\frac{1}{2}(x - e) \Rightarrow 2y + x - 3e = 0$$



## PROBLEMAS PROPUESTOS 6.4

*En los problemas del 1 al 9, hallar la derivada de la función dada.*

1.  $y = \sqrt{x}e^x$

2.  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

3.  $y = x^2 2^x$

4.  $y = x^2 e^{-x}$

5.  $y = e^x \ln x$

6.  $y = 2^x \log_2 x$

7.  $y = \frac{\ln x}{e^x}$

8.  $y = \frac{\log_2 x}{2^x}$

9.  $y = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$

10. Hallar la recta tangente horizontal a la curva  $y = \frac{e^x}{1+x^2}$

11. Hallar la recta tangente al gráfico de  $f(x) = xe^{-x}$  en el punto donde  $x = -1$

12. Hallar la recta tangente al gráfico de  $g(x) = \frac{4-x}{\ln x}$  en el punto donde  $x = 4$ .

**SECCION 6.5**  
**LA REGLA DE LA CADENA**

Esta sección la dedicaremos a estudiar la diferenciación de funciones compuestas. El resultado que expresa la derivada de una función compuesta en términos de sus funciones componentes se conoce con el nombre de **regla de la cadena**.

Muchas de las funciones que encontramos con frecuencia se expresan como una composición  $y = f(g(x))$ . A  $f$  la llamaremos función **externa** y a  $g$ , función **interna**.

**TEOREMA 6.10** Regla de la cadena.

Si  $y = f(u)$  es diferenciable en  $u$  y  $u = g(x)$  es diferenciable en  $x$ , entonces la función compuesta  $f \circ g$  es diferenciable en  $x$  y se cumple que

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$$

En palabras, la derivada de una función compuesta es igual al producto de la derivada de la función externa (derivada externa) por la derivada de la función interna (derivada interna).

La regla de la cadena, con las otras notaciones se expresa así:

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) g' , \quad D_x y = D_u y D_x u \quad \text{ó} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

**Demostración**

Ver el problema resuelto 11.

**EJEMPLO 1.** Si  $y = \sqrt{x^2 + 3x}$ , hallar  $\frac{dy}{dx}$ .

**Solución**

Si hacemos  $u = x^2 + 3x$ , entonces  $y = \sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{u}$ .

Además,  $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$  y  $\frac{du}{dx} = 2x + 3$ .

Luego, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} (2x + 3) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}} .$$

**EJEMPLO 2.** Si  $F(x) = \sqrt{g(x)}$ ,  $g(1) = 9$  y  $g'(1) = 18$ , hallar  $F'(1)$ .

**Solución**

Sea  $f(u) = \sqrt{u}$ . Se tiene que  $F(x) = \sqrt{g(x)} = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

Aplicando la regla de la cadena:

$$F'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \quad (1)$$

Pero,  $f(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$  y, por tanto,  $f'(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}$  (2)

Reemplazando (2) en (1)

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} g'(x)$$

En particular, para  $x = 1$  tenemos que

$$F'(1) = \frac{1}{2\sqrt{g(1)}} g'(1) = \frac{1}{2\sqrt{9}}(18) = \frac{1}{2(3)}(18) = 3$$

### TABLA DE DERIVADAS

La regla de la cadena combinada con las derivadas ya encontradas nos da una lista de derivadas más generales. Si  $u = g(x)$  es una función diferenciable de  $x$ , entonces

$$1. \frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx} \quad \text{ó bien} \quad \frac{d}{dx}((g(x))^n) = n(g(x))^{n-1} \frac{d}{dx}(g(x))$$

$$2. \frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

$$3. \frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$4. \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$5. \frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}$$

$$6. \frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$7. \frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$8. \frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$9. \frac{d}{dx}(\cot u) = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$10. \frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$$

$$11. \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$$

La demostración de estas nuevas formulas es inmediata. Como muestra probaremos la primera.

Consideremos la función  $f(u) = u^n$ , cuya derivada es  $\frac{d}{du}(f(u)) = f'(u) = nu^{n-1}$ .

Se tiene:  $(g(x))^n = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ .

Ahora, aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}((g(x))^n) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = n(g(x))^{n-1} \frac{d}{dx}(g(x)).$$

**EJEMPLO 3.** Hallar la derivada de la función  $y = (x^2 + 5x - 6)^3$ .

**Solución**

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2 + 5x - 6)^2 \frac{d}{dx}(x^2 + 5x - 6) = 3(x^2 + 5x - 6)^2(2x + 5).$$

**EJEMPLO 4.** Hallar la derivada de:

a.  $y = e^{\tan x}$

b.  $y = e^{\sqrt{x}}$

**Solución**

a.  $\frac{d}{dx}(e^{\tan x}) = e^{\tan x} \frac{d}{dx}(\tan x) = e^{\tan x}(\sec^2 x) = \sec^2 x e^{\tan x}$

b.  $\frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}}) = e^{\sqrt{x}} \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = e^{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

**EJEMPLO 5.** Hallar la derivada de

a.  $g(x) = \cos(x^2 + 1)$     b.  $u = \sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha$     c.  $y = \cot(\sin 3x)$ .

**Solución**

a.  $g'(x) = -\operatorname{sen}(x^2 + 1) D_x(x^2 + 1) = -2x \operatorname{sen}(x^2 + 1)$

b.  $D_\alpha u = 2(\sec \alpha) D_\alpha(\sec \alpha) + 2(\operatorname{cosec} \alpha) D_\alpha(\operatorname{cosec} \alpha)$   
 $= 2(\sec \alpha)(\sec \alpha \tan \alpha) + 2(\operatorname{cosec} \alpha)(-\operatorname{cosec} \alpha \cot \alpha)$   
 $= 2\sec^2 \alpha \tan \alpha - 2\operatorname{cosec}^2 \alpha \cot \alpha.$

c.  $y' = -\operatorname{cosec}^2(\sin 3x) D_x(\sin 3x) = (-\operatorname{cosec}^2(\sin 3x))(\cos 3x)(3)$   
 $= -3\cos 3x \operatorname{cosec}^2(\sin 3x).$

**EJEMPLO 6.** Hallar la recta tangente al gráfico de  $f(x) = \tan(x/2)$  en el punto donde  $x = \pi/2$ .

**Solución**

Tenemos que  $f(\pi/2) = \tan(\pi/4) = 1$ .

Por otro lado,

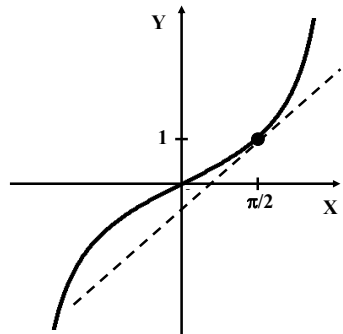
$$f'(x) = \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) D_x\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$f'(\pi/2) = \frac{1}{2} \sec^2(\pi/4) = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 = 1.$$

Luego, la ecuación de la recta tangente es

$$y - f(\pi/2) = f'(\pi/2)(x - \pi/2) \Rightarrow$$

$$y - 1 = 1(x - \pi/2) \Rightarrow y - x + \pi/2 - 1 = 0.$$



**EJEMPLO 7.** Hallar la derivada de  $y = 5^{3x^2-1}$

**Solución**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left( 5^{3x^2-1} \right) = \left( 5^{3x^2-1} \ln 5 \right) \frac{d}{dx} (3x^2-1) = \left( 5^{3x^2-1} \ln 5 \right) (6x) = 6(\ln 5)x 5^{3x^2-1}$$


---

**EJEMPLO 8.** a. Hallar la derivada de  $f(x) = e \ln \ln x + 4$

b. Hallar la recta tangente y la recta normal al gráfico de la función dada en el punto donde  $x = e$

**Solución**

a.  $f'(x) = D_x(e \ln \ln x + 4) = e D_x(\ln \ln x)$   
 $= e \frac{1}{\ln x} D_x(\ln x) = e \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x} = \frac{e}{x \ln x}$

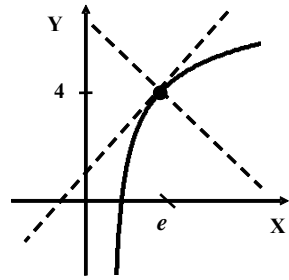
b. Tenemos que:

$$f(e) = e \ln \ln e + 4 = e \ln 1 + 4 = e(0) + 4 = 4 \quad y$$

$$f'(e) = \frac{e}{e \ln e} = \frac{e}{e(1)} = 1. \text{ Luego,}$$

$$\text{Recta tangente: } y - f(e) = f'(e)(x - e) \Rightarrow y - 4 = 1(x - e) \Rightarrow y - x = 4 - e$$

$$\text{Recta normal: } y - f(e) = (-1/f'(e))(x - e) \Rightarrow y - 4 = -1(x - e) \Rightarrow y + x = 4 + e$$



## PROBLEMAS RESUELTOS 6.5

---

**PROBLEMA 1.** Hallar la derivada de  $y = \sqrt[3]{x^6 - 3x}$ .

**Solución**

Se tiene que:  $y = \sqrt[3]{x^6 - 3x} = (x^6 - 3x)^{1/3}$ . Luego,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (x^6 - 3x)^{1/3} = \frac{1}{3} (x^6 - 3x)^{1/3 - 1} \frac{d}{dx} (x^6 - 3x) \\ &= \frac{1}{3} (x^6 - 3x)^{-2/3} (6x^5 - 3) = \frac{6x^5 - 3}{3(x^6 - 3x)^{2/3}} = \frac{2x^5 - 1}{(x^6 - 3x)^{2/3}} \end{aligned}$$


---

**PROBLEMA 2.** Hallar la derivada de la función  $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{x}{(a^2 - x^2)^{1/2}} \right] = \frac{(a^2 - x^2)^{1/2} \frac{d}{dx}(x) - x \frac{d}{dx}(a^2 - x^2)^{1/2}}{\left[ (a^2 - x^2)^{1/2} \right]^2} \\ &= \frac{(a^2 - x^2)^{1/2}(1) - x \left[ \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-1/2} \frac{d}{dx}(a^2 - x^2) \right]}{a^2 - x^2} \\ &= \frac{(a^2 - x^2)^{1/2}(1) - x \left[ \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-1/2}(-2x) \right]}{a^2 - x^2} \\ &= \frac{(a^2 - x^2)^{1/2} + x^2(a^2 - x^2)^{-1/2}}{a^2 - x^2} = \frac{(a^2 - x^2)^{1/2} + \frac{x^2}{(a^2 - x^2)^{1/2}}}{a^2 - x^2} \\ &= \frac{(a^2 - x^2) + x^2}{(a^2 - x^2)^{1/2}(a^2 - x^2)} = \frac{a^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$


---

**PROBLEMA 3.** Derivar la función  $u = \sqrt{t + \sqrt{t+1}}$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \sqrt{t + \sqrt{t+1}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{t + \sqrt{t+1}}} \frac{d}{dt} (t + \sqrt{t+1}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{t + \sqrt{t+1}}} \left[ 1 + \frac{d}{dt} \sqrt{t+1} \right] = \frac{1}{2\sqrt{t + \sqrt{t+1}}} \left[ 1 + \frac{1}{2\sqrt{t+1}} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{t + \sqrt{t+1}}} + \frac{1}{4\sqrt{t+1} \sqrt{t + \sqrt{t+1}}}. \end{aligned}$$


---

**PROBLEMA 4.** Hallar la derivada de

$$\text{a. } y = \sqrt{1+2\tan x} \qquad \text{b. } y = x - \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x$$

**Solución**

$$\begin{aligned} \text{a. } y' &= D_x[(1+2\tan x)^{1/2}] = \frac{1}{2}(1+2\tan x)^{1/2-1} D_x(1+2\tan x) \\ &= \frac{1}{2}(1+2\tan x)^{-1/2} (2\sec^2 x) = \frac{\sec^2 x}{(1+2\tan x)^{1/2}} = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+2\tan x}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } y' &= D_x(x) - D_x(\tan x) + D_x\left(\frac{1}{3}\tan^3 x\right) \\ &= 1 - \sec^2 x + 3\left(\frac{1}{3}\tan^2 x\right)D_x(\tan x) = 1 - \sec^2 x + (\tan^2 x)(\sec^2 x) \\ &= -\tan^2 x + (\tan^2 x)(1 + \tan^2 x) = -\tan^2 x + \tan^2 x + \tan^4 x \\ &= \tan^4 x. \end{aligned}$$


---

**PROBLEMA 5.** Hallar  $\frac{dy}{dx}$  si  $y = \sin^2(\cos 3x)$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= D_x[\sin^2(\cos 3x)] = 2\sin(\cos 3x)D_x[\sin(\cos 3x)] \\ &= (2\sin(\cos 3x))(\cos(\cos 3x))D_x[\cos 3x] \\ &= (2\sin(\cos 3x))(\cos(\cos 3x))(-\sin 3x)D_x[3x] \\ &= (2\sin(\cos 3x))(\cos(\cos 3x))(-\sin 3x)(3) \\ &= (-3\sin 3x)[2\sin(\cos 3x)\cos(\cos 3x)] \\ &= -3\sin 3x [\sin(2\cos 3x)] \qquad \qquad \qquad (\text{Ident. Trig. 27}) \end{aligned}$$


---

**PROBLEMA 6.** Hallar la derivada de  $y = 2^{3^{x^2}}$

**Solución**

$$\begin{aligned} y' &= D_x\left(2^{3^{x^2}}\right) = 2^{3^{x^2}}(\ln 2) D_x\left(3^{x^2}\right) = 2^{3^{x^2}}(\ln 2)3^{x^2}(\ln 3)D_x\left(x^2\right) \\ &= 2^{3^{x^2}}(\ln 2)3^{x^2}(\ln 3)(2x) = 2(\ln 2)(\ln 3)x3^{x^2}2^{3^{x^2}} \end{aligned}$$


---

**PROBLEMA 7.** Hallar la derivada de  $y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

**Solución**

Se tiene que:

$$y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \ln(1) - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Luego,

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x \left( -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right) = - \frac{D_x(x + \sqrt{x^2 - 1})}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= - \frac{1 + D_x(\sqrt{x^2 - 1})}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = - \frac{1 + \frac{D_x(x^2)}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = - \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= - \frac{\frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = - \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{(\sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})} = - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$


---

**PROBLEMA 8.** a. Si  $G(x) = g(ax + bx) + g(ax - bx)$  y  $g$  es diferenciable en  $a$ , hallar  $G'(0)$ .

b. Si  $F(x) = f(f(f(x)))$ ,  $f(0) = 0$  y  $f'(0) = -2$ , hallar  $F'(0)$ .

**Solución**

a. Sea  $f(x) = a + bx$  y  $h(x) = a - bx$ . Se tiene que

$$f'(x) = b, \quad h'(x) = -b \quad \text{y} \quad G(x) = g(f(x)) + g(h(x)).$$

Luego, aplicando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} G'(x) &= [g(f(x)) + g(h(x))]' = [g(f(x))]' + [g(h(x))]' \\ &= g'(f(x))f'(x) + g'(h(x))h'(x) \end{aligned}$$

En particular, para  $x = 0$

$$G'(0) = g'(f(0))f'(0) + g'(h(0))h'(0) = g'(a)(b) + g'(a)(-b) = 0$$

b. Sea  $g(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$ . Se tiene que  $F(x) = f(f(f(x))) = f(g(x))$

Aplicando la regla de la cadena a  $g$  y a  $F$

$$g'(x) = f'(f(x))f'(x) \quad y$$

$$F'(x) = [f(f(f(x)))]' = [f(g(x))]' = f'(g(x)) g'(x) = f'(f(f(x))) f'(f(x)) f'(x).$$

En particular, para  $x = 0$

$$\begin{aligned} F'(0) &= f'(f(f(0)))f'(f(0))f'(0) = f'(f(0))f'(0)f'(0) = f'(0)f'(0)f'(0) \\ &= (-2)(-2)(-2) = -8. \end{aligned}$$

**PROBLEMA 9.** Hallar la recta tangente al gráfico de la siguiente función en el punto que tiene por abscisa  $x = -3$ .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(4+x)^2}}$$

**Solución**

$$\text{Tenemos que } f(-3) = \frac{1}{\sqrt[3]{(4-3)^2}} = 1 \quad y$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\sqrt[3]{(4+x)^2}} \right] = \frac{d}{dx} [(4+x)^{-2/3}] = \frac{-2}{3} (4+x)^{-5/3} \frac{d}{dx} (4+x) \\ &= -\frac{2}{3} (4+x)^{-5/3} (1) = \frac{-2}{3(4+x)^{5/3}} \end{aligned}$$

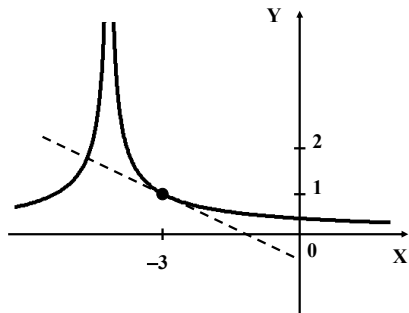
En particular,

$$f'(-3) = \frac{-2}{3(4-3)^{5/3}} = -\frac{2}{3(1)} = -\frac{2}{3}.$$

Luego, la recta tangente buscada es

$$y - f(-3) = f'(-3)(x - (-3)) \Rightarrow$$

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x + 3) \Rightarrow 3y + 2x + 3 = 0.$$



**PROBLEMA 10.** a. Hallar la derivada de la función  $f(x) = 4x^2 e^{-x^2/4}$

b. Hallar los puntos de la gráfica donde la recta tangente es horizontal

**Solución**

$$\begin{aligned}
 \text{a. } f'(x) &= D_x \left( 4x^2 e^{-x^2/4} \right) = (4x^2) D_x \left( e^{-x^2/4} \right) + \left( e^{-x^2/4} \right) D_x \left( 4x^2 \right) \\
 &= (4x^2) \left( e^{-x^2/4} \right) D_x \left( -\frac{x^2}{4} \right) + \left( e^{-x^2/4} \right) (8x) \\
 &= (4x^2) \left( e^{-x^2/4} \right) \left( -\frac{2x}{4} \right) + \left( e^{-x^2/4} \right) (8x) = -2x^3 e^{-x^2/4} + 8x e^{-x^2/4} \\
 &= 2x e^{-x^2/4} (x^2 - 4)
 \end{aligned}$$

b. La recta tangente es horizontal si su pendiente es 0. Luego,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x e^{-x^2/4} (x^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x^2 - 4 = 0$$

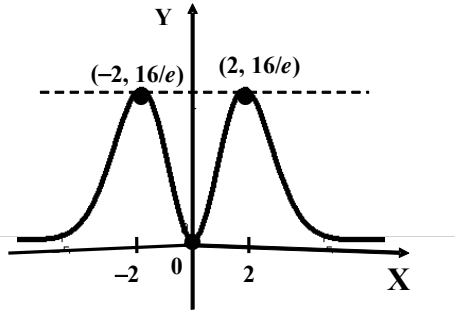
$$\Leftrightarrow x = 0, x = -2 \text{ ó } x = 2$$

Pero,

$$f(0) = 4(0^2) e^{-0^2/4} = 0,$$

$$f(-2) = 4(-2)^2 e^{-(-2)^2/4} = \frac{16}{e} \quad \text{y}$$

$$f(2) = 4(2)^2 e^{-(2)^2/4} = \frac{16}{e}$$



Luego, los puntos buscados son:  $(0, 0)$ ,  $(-2, 16/e)$  y  $(2, 16/e)$

**PROBLEMA 11. Probar la Regla de la cadena.**

Si  $f$  es diferenciable en  $u$  y  $u = g(x)$  es diferenciable en  $x$ , entonces  $f \circ g$  es diferenciable en  $x$  y se cumple que

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

**Solución**

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

Multiplicando el numerador y denominador por  $\Delta g = g(x+h) - g(x)$

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(g(x+h)) - f(g(x))][g(x+h) - g(x)]}{h[g(x+h) - g(x)]}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + \Delta g) - f(g(x))}{\Delta g} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}
 \end{aligned}$$

El segundo límite de la expresión anterior es  $g'(x)$ . En el primer límite: Cuando  $h$  tiende a 0, por ser  $g$  continua (teorema 6.1), la expresión  $\Delta g = g(x+h) - g(x)$  también tiende a 0 y, por lo tanto, este primer límite es  $f'(g(x))$ . En consecuencia,

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

En la demostración anterior, al dividir entre  $\Delta g = g(x+h) - g(x)$ , hemos supuesto implícitamente que  $\Delta g \neq 0$ . Para el caso en el que  $\Delta g = 0$  se debe dar una demostración aparte, que nosotros no haremos.

## PROBLEMAS PROPUESTOS 6.5

*En los problemas del 1 al 61 derivar la función indicada. Las letras  $a$ ,  $b$  y  $c$  denotan constantes.*

1.  $y = (x^2 - 3x + 5)^3$

2.  $f(x) = (15 - 8x)^4$

3.  $g(t) = (2t^3 - 1)^{-3}$

4.  $z = \frac{1}{(5x^5 - x^4)^8}$

5.  $y = (3x^2 - 8)^3(-4x^2 + 1)^4$

6.  $f(u) = \frac{2u^3 + 1}{u^2 - 1}$

7.  $y = \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2$

8.  $g(t) = \left(\frac{3t^2 + 2}{2t^3 - 1}\right)^2$

9.  $y = \sqrt{1-2x}$

10.  $u = \sqrt{1+t-2t^2-8t^3}$

11.  $h(x) = x^2\sqrt{x^4-1}$

12.  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

13.  $y = \sqrt{3x^2-1} \sqrt[3]{2x+1}$

14.  $z = (1-3x^2)^2(\sqrt{x+1})^{-2}$

15.  $h(t) = \frac{1+t}{\sqrt{1-t}}$

16.  $z = \sqrt[3]{\frac{1}{1+t^2}}$

17.  $z = \sqrt[3]{b+ax^3}$

18.  $f(x) = \frac{x}{b^2\sqrt{b^2+x^2}}$

19.  $y = \frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}$

20.  $f(x) = \sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}$

21.  $y = \sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$

22.  $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

23.  $y = \tan 4x$

24.  $y = 2\cot \frac{x}{2}$

25.  $u = \cos(x^3)$

26.  $v = \cos^3 x$

27.  $y = \tan(x^4) + \tan^4 x$

27.  $y = \tan(x^4) + \tan^4 x$

28.  $z = \cos \sqrt{x}$

29.  $u = \sqrt{\cos x}$

30.  $y = \sqrt{\cos \sqrt{x}}$

31.  $y = \sqrt[3]{\tan 3x}$

32.  $y = \cot \sqrt[3]{1+x^2}$

33.  $y = \frac{4}{\sqrt{\sec x}}$

34.  $y = \operatorname{cosec} \frac{1}{x^2}$

35.  $y = \operatorname{sen}^3 \left[ \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right]$

36.  $y = \frac{\tan x}{\sqrt{\sec^2 x + 1}}$

37.  $y = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$

38.  $y = \sqrt{1 + \cot(x+1/x)}$

39.  $y = \frac{\cot(x/2)}{\sqrt{1-\cot^2(x/2)}}$

40.  $y = \sqrt{a \operatorname{sen}^2 x + b \cos^2 x}$

41.  $y = \cos(\cos x)$

42.  $y = \operatorname{sen}(\cos x^2)$

43.  $y = \operatorname{sen}^2(\cos 4x)$

44.  $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

45.  $y = \cos^2(\cos x) + \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)$

46.  $y = \operatorname{sen}(\tan \sqrt{\operatorname{sen} x})$

47.  $y = \tan(\operatorname{sen}^2 x)$

48.  $y = e^{-3x^2+1}$

49.  $y = 2^{\sqrt{x}}$

50.  $y = x^n a^{-x^2}$

51.  $y = 3^{\cot(1/t)}$

52.  $y = 2^{3^{\operatorname{sen}^2 x}}$

53.  $y = \sqrt{\log_5 x}$

54.  $y = \ln \left( \frac{x}{e^x} \right)$

55.  $y = \frac{\ln t}{e^{2t}}$

56.  $y = \ln \frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$

57.  $y = e^{x \ln x}$

58.  $y = \ln \left( \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \right)$

59.  $y = \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{3/5}$

60.  $y = \ln(x^3 \operatorname{sen} x)$

61.  $y = \ln \cos \frac{x-1}{x}$

62. Si  $G(x) = (g(x))^{2/3}$ ,  $g(2) = 125$  y  $g'(2) = 150$ , hallar  $G'(2)$ .

63. Si  $F(t) = [f(\operatorname{sen} t)]^2$ ,  $f(0) = -3$  y  $f'(0) = 5$ , hallar  $F'(0)$ .

64. Dadas  $f(u) = \frac{1}{4}u^3 - 3u + 5$  y  $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ , hallar la derivada de  $f \circ g$  de dos maneras:

a. Encontrando  $(f \circ g)(x)$  y derivando este resultado.

b. Aplicando la regla de la cadena.

**En los ejercicios del 65 al 69, hallar  $h'(x)$  si  $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ .**

65.  $f(u) = u^3 - 2u^2 - 5$ ,  $g(x) = 2x - 1$

66.  $f(v) = \sqrt{v}$ ,  $g(x) = 2x^3 - 4$

67.  $f(t) = t^5$ ,  $g(x) = 1 - 2\sqrt{x}$

68.  $f(u) = \frac{b-u}{b+u}$ ,  $g(x) = cx$

69.  $f(v) = \frac{1}{v}$ ,  $g(x) = a\sqrt{a^2 - x^2}$

En los ejercicios del 70 al 73 hallar  $\frac{dy}{dx}$ .

70.  $y = 3u^3 - 4u^4 - 1$ ,  $u = x^2 - 1$

71.  $y = v^5$ ,  $v = 3a + 2bx$

72.  $y = t^A$ ,  $t = \frac{ax+b}{c}$

73.  $y = \frac{1}{\sqrt{v}}$ ,  $v = 3x^2 - 1$

En los ejercicios del 74 al 81, hallar la recta tangente y la recta normal al gráfico de la función dada en el punto  $(a, f(a))$ , para el valor especificado de  $a$ .

74.  $f(x) = (2x^2 - 1)^3$ ,  $a = -1$

75.  $f(x) = \frac{3}{(2-x^2)^2}$ ,  $a = 0$

76.  $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{3x+6}}$ ,  $a = 1$

77.  $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ,  $a = -7$

78.  $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(3x-2)^2}$ ,  $a = \frac{1}{2}$

79.  $f(x) = \cot^2 x$ ,  $a = \frac{\pi}{4}$

80.  $f(x) = |1 - x^3|$ ,  $a = 2$

81.  $f(x) = |\sin 5x|$ ,  $a = \frac{\pi}{3}$

82. Hallar las rectas tangentes al gráfico de  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$  en los puntos donde el gráfico corta al eje X.

83. Hallar los puntos en la gráfica de  $g(x) = x^2(x-4)^2$  en los cuales la recta tangente es paralela al eje X.

84. Hallar las rectas tangentes al gráfico de  $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$  en los puntos donde este gráfico corta a los ejes. ¿Qué particularidad tienen estas rectas?

85. Hallar las rectas tangentes al gráfico de  $g(x) = \frac{x+4}{x+3}$  que pasan por el origen.

86. Hallar las rectas tangentes al gráfico de  $f(x) = 3x^2 - \ln x$  en el punto  $(1, 3)$ .

87. Hallar las rectas tangentes al gráfico de  $y = \ln(1 + e^x)$  en el punto  $(0, \ln 2)$ .

88. Sean  $f$  y  $g$  dos funciones diferenciables tales que  $f'(u) = \frac{1}{u}$  y  $f(g(x)) = x$ .

Probar que  $g'(x) = g(x)$ .

# 7

---

## OTRAS TECNICAS DE DERIVACION

---

*GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ*  
(1646 – 1716)

**7.1 DERIVACION IMPLICITA Y TEOREMA  
DE LA FUNCION INVERSA**

**7.2 DERIVACION LOGARITMICA**

**7.3 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES  
TRIGONOMETRICAS INVERSAS**

**7.4 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR, VELOCIDAD Y  
ACELERACION**

**7.5 FUNCIONES HIPERBOLICAS Y SUS INVERSAS**

**7.6 RAZON DE CAMBIO**

**7.7 DIFERENCIALES**

*NICOLAS BOURBAKI*  
*LA MISTERIOSA HISTORIA DE UN BRILLANTE MATEMATICO  
QUE NUNCA EXISTIO*

## **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 a 1716)**



**GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ** nació en Leipzig, Alemania. Se graduó y fue profesor en la universidad de Altdort. Fue un genio polifacético. Se desarrolló con excelencia en varios campos: Matemáticas, Filosofía, Lógica, Mecánica, Geología, Jurisprudencia, Diplomacia, etc.

En 1684 se publicaron sus investigaciones sobre lo que sería el **Cálculo Diferencial e Integral**. El, junto con Newton, son considerados como creadores del Cálculo. Sus ideas sobre este tema fueron más claras que las de Newton. La notación que usó para designar la derivada todavía se usa hasta ahora (notación de Leibniz). Inventó una máquina de multiplicar. A temprana edad se graduó con la tesis *De Arte Combinatoria*, que trata sobre un método de razonamiento. En este trabajo están, en germen, las ideas iniciales de la **Lógica Simbólica**.

Durante algún tiempo del reinado de Luis XIV fue embajador de su patria en París. Aquí conoció a científicos, como Huygens, quienes reforzaron su interés por la matemática.

En 1712 surgió una larga e infortunada querrela entre Newton y sus seguidores, por un lado, y Leibniz y sus seguidores, en otro lado, sobre quien de los dos matemáticos realmente inventó el Cálculo. Se lanzaron acusaciones mutuas de plagio y deshonestidad. Los historiadores zanjaron la disputa dando mérito a cada uno. Dicen que cada cual, Newton y Leibniz, lograron sus resultados independientemente.

### **ACONTECIMIENTOS PARALELOS IMPORTANTES**

Durante la vida de Leibniz, en América y en el mundo hispano sucedieron los siguientes hechos notables: La poetisa mejicana Sor Inés de la Cruz (1651-1695) publica sus obras poéticas, obras que fueron fuertemente influenciadas por el Gongorismo. En 1664, los ingleses, bajo el mando del duque de York, toman Nueva Amsterdam y le cambian el nombre a Nueva York. En 1671 el pirata inglés Henry Morgan saquea e incendia la ciudad de Panamá. En 1682 el cuáquero William Penn funda Pensilvania. Ese mismo año, el francés Robert Cavalier de la Salle llega a la desembocadura del río Misisipi, toma posesión de la región y la nombra, en honor a su rey, Luisiana.

**SECCION 7.1**

**DERIVACION IMPLICITA Y TEOREMA DE LA  
FUNCION INVERSA**

Consideremos la ecuación  $xy - 1 = 0$ . En esta ecuación, fácilmente podemos despejar la variable  $y$ :  $y = \frac{1}{x}$ . Esta nueva ecuación define a  $y$  como función de  $x$ .

Casos como el ejemplo anterior suceden con frecuencia. Es decir, una ecuación de la forma  $g(x, y) = 0$  puede dar lugar a una función  $y = f(x)$ . Si esta situación ocurre diremos que la ecuación  $g(x, y) = 0$  define **implícitamente** a  $y$  como función de  $x$ . En cambio, diremos que una ecuación de la forma  $y = f(x)$  define **explícitamente** a  $y$  como función de  $x$ .

No toda ecuación  $g(x, y) = 0$  determina implícitamente una función (real de variable real). Tal es el caso de la ecuación  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ , que no tiene soluciones reales. Puede suceder también que una misma ecuación dé lugar a más de una función. Así, la circunferencia  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  determina dos funciones

$$1. f_1(x) = \sqrt{1-x^2} \qquad 2. f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

Sucede con frecuencia que en funciones definidas implícitamente es difícil despejar la variable dependiente. Por este motivo, sería conveniente contar con una técnica que nos permita encontrar la derivada de una función definida implícitamente, sin la necesidad de contar con la expresión explícita de la función. Esta técnica se llama **diferenciación implícita** y se resume en la siguiente regla.

**Para derivar implícitamente, derivar la ecuación término a término, considerando a la variable dependiente como función de la independiente. Luego, despejar la derivada.**

**EJEMPLO 1.** Hallar  $\frac{dy}{dx}$  si  $x^3y - y^7x = 5$ .

**Solución**

Derivamos término a término.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^3y) - \frac{d}{dx}(y^7x) &= \frac{d}{dx}(5) \Rightarrow \left[ x^3 \frac{dy}{dx} + y \frac{d}{dx}(x^3) \right] - \left[ y^7 \frac{dx}{dx} + x \frac{d}{dx}(y^7) \right] = 0 \\ \Rightarrow x^3 \frac{dy}{dx} + 3yx^2 - y^7 - 7xy^6 \frac{dy}{dx} &= 0 \Rightarrow x^3 \frac{dy}{dx} - 7xy^6 \frac{dy}{dx} = y^7 - 3yx^2 \\ \Rightarrow (x^3 - 7xy^6) \frac{dy}{dx} = y^7 - 3yx^2 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^7 - 3yx^2}{x^3 - 7xy^6} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 2.** Si  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ , hallar  $D_{xy}$ .

**Solución**

$$D_x\left(\sqrt[3]{x^2}\right) + D_x\left(\sqrt[3]{y^2}\right) = D_x\left(\sqrt[3]{a^2}\right) \Rightarrow D_x x^{2/3} + D_x y^{2/3} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}D_{xy} = 0 \Rightarrow x^{-1/3} + y^{-1/3}D_{xy} = 0 \Rightarrow$$

$$D_{xy} = \frac{-x^{-1/3}}{y^{-1/3}} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$


---

**EJEMPLO 3.** Si  $\tan xy = \frac{x}{y}$ , hallar  $D_{xy}$

**Solución**

$$D_x(\tan xy) = D_x\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow \sec^2 xy D_x(xy) = \frac{yD_x x - xD_x y}{y^2} \Rightarrow$$

$$\sec^2 xy (xD_{xy} + y) = \frac{y - xD_x y}{y^2} \Rightarrow x \sec^2 xy D_{xy} + y \sec^2 xy = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} D_{xy}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y^2} + x \sec^2 xy\right) D_{xy} = \frac{1}{y} - y \sec^2 xy$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y^2} (1 + y^2 \sec^2 xy) D_{xy} = \frac{1}{y} (1 - y^2 \sec^2 xy)$$

$$\Rightarrow x(1 + y^2 \sec^2 xy) D_{xy} = y(1 - y^2 \sec^2 xy)$$

$$\Rightarrow D_{xy} = \frac{y(1 - y^2 \sec^2 xy)}{x(1 + y^2 \sec^2 xy)}$$


---

**EJEMPLO 4.** Si  $\ln y + \frac{x}{y} = c$ , hallar  $D_{xy}$

**Solución**

$$D_x\left(\ln y + \frac{x}{y}\right) = D_x(c) \Rightarrow D_x(\ln y) + D_x\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y} D_{xy} + \frac{yD_x(x) - xD_x y}{y^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{y} D_{xy} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} D_{xy} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) D_x y = -\frac{1}{y} \Rightarrow \left(\frac{y-x}{y^2}\right) D_x y = -\frac{1}{y} \Rightarrow D_{xy} = -\frac{1}{y} \frac{y^2}{y-x} = \frac{y}{x-y}$$

**EJEMPLO 5.** Hallar las rectas tangentes a la siguiente circunferencia en los puntos que tienen abscisa  $x = 4$ .

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

**Solución**

Hallemos los puntos en la curva que tienen abscisa  $x = 4$ . Para esto, sustituimos el valor  $x = 4$  en la ecuación de la curva.

$$(4 - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25 \Leftrightarrow (y + 1)^2 = 16 \Leftrightarrow y = 3 \text{ ó } y = -5.$$

Hay dos puntos en la curva con abscisa  $x = 4$ :  $P_1 = (4, 3)$  y  $P_2 = (4, -5)$ .

Hallemos la derivada  $\frac{dy}{dx}$ .

$$\frac{d}{dx}(x-1)^2 + \frac{d}{dx}(y+1)^2 = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\Rightarrow 2(x-1) + 2(y+1) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x-1}{y+1}$$

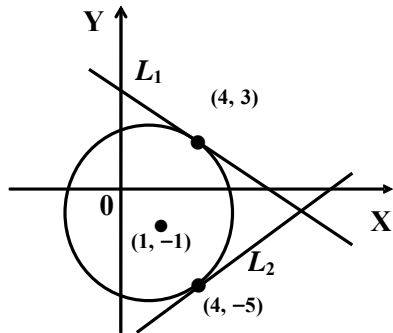
Si  $m_1$  es la pendiente de  $L_1$ , la recta tangente en el punto  $P_1 = (4, 3)$ , entonces

$$m_1 = -\frac{4-1}{3+1} = -\frac{3}{4} \text{ y } L_1: y - 3 = -\frac{3}{4}(x - 4)$$

$$\Rightarrow L_1: 3x + 4y - 24 = 0$$

Si  $m_2$  es la pendiente de  $L_2$ , la recta tangente en el punto  $P_2 = (4, -5)$ , entonces

$$m_2 = -\frac{4-1}{-5+1} = \frac{3}{4} \text{ y } L_2: y + 5 = \frac{3}{4}(x - 4) \Rightarrow L_2: 3x - 4y - 32 = 0.$$



**EJEMPLO 6.** Hallar la recta tangente a la siguiente curva

$$ye^{xy} = 2 + x^2$$

en el punto donde  $x = 0$ .

**Solución**

Hallamos la derivada  $y'$

Derivando ambos miembros de la ecuación se tiene que:

$$(ye^{xy})' = (2 + x^2)' \Rightarrow y'e^{xy} + y(e^{xy})' = 2x \Rightarrow$$

$$y'e^{xy} + y(e^{xy}(y + xy')) = 2x \Rightarrow y'e^{xy} + y^2e^{xy} + xyy'e^{xy} = 2x \Rightarrow$$

$$y'(e^{xy} + xye^{xy}) = 2x - y^2e^{xy} \Rightarrow y' = \frac{2x - y^2e^{xy}}{e^{xy}(1 + xy)}$$

Hallamos la recta tangente:

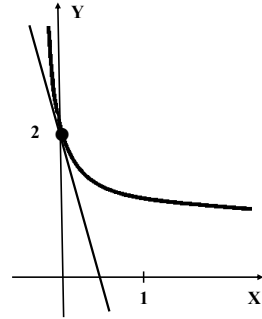
Reemplazando  $x = 0$  en la ecuación de la curva

$$ye^{(0)y} = 2 + 0^2 \Rightarrow y = 2$$

Luego, el punto de tangencia es  $(0, 2)$ .

La pendiente  $m$  de la tangente en  $(0, 2)$  es la derivada  $y'$  en  $(0, 2)$ . Esto es,

$$m = \frac{2(0) - 2^2e^{(0)2}}{e^{(0)2}(1 + 0(2))} = \frac{-4}{1} = -4$$



En consecuencia, la recta tangente a la curva en el punto donde  $x = 0$  es:

$$y - 2 = -4(x - 0), \quad \text{ó bien,} \quad y + 4x = 2$$

### TEOREMA DE LA FUNCION INVERSA

En esta parte trataremos rápidamente las condiciones que garantizan la existencia y la diferenciable de la función inversa. La demostración que presentamos es parcial. El lector interesado puede hallar la prueba total en el problema resuelto 7.

#### **TEOREMA 7.1** Teorema de la función Inversa.

Si  $f$  es diferenciable en un intervalo abierto  $I$  en el cual  $f'$  es continua y no se anula, entonces

- $f$  tiene inversa  $f^{-1}$  en  $I$
- $f^{-1}$  es diferenciable y para cada  $x$  en  $f(I)$  se cumple que:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Este teorema, con la notación de Leibniz, dice que:

$$\frac{dx}{dy} = 1 / \frac{dy}{dx} \quad \text{ó bien,} \quad \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dy} = 1$$

#### **Demostración**

La demostración que aquí presentamos presupone que la inversa  $f^{-1}$  es diferenciable. Derivando implícitamente, deducimos la fórmula enunciada.

Bien, por definición de función inversa tenemos:

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$$

Derivando la segunda igualdad respecto a  $x$  se obtiene:

$$f'(y)y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{f'(y)} \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

**EJEMPLO 7.** Sea la función  $f(x) = x^3 + 3x - 2$ , cuyo dominio es  $\mathbb{R}$ .

- a. Probar que  $f$  tiene inversa en todo su dominio.
- b. Hallar  $(f^{-1})'(2)$
- c. Hallar la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(1, f(1)) = (1, 2)$
- d. Hallar la recta tangente al gráfico de  $f^{-1}$  en el punto  $(2, f^{-1}(2)) = (2, 1)$

**Solución**

a. Tenemos que:  $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ .

La función derivada  $f'(x) = 3x^2 + 3$  es continua y  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Luego, por la parte a. del teorema anterior,  $f$  tiene inversa en su dominio  $\mathbb{R}$ .

b. Se tiene que:  $f'(1) = 3(1)^2 + 3 = 6$ . Además,

$$f(1) = (1)^3 + 3(1) - 2 = 2 \text{ y, por lo tanto, } (f^{-1})(2) = 1$$

$$\text{Luego, } (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$$

c. Recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(1, f(1)) = (1, 2)$ :

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 6(x - 1) \Rightarrow y - 6x = 4$$

d. Recta tangente al gráfico de  $f^{-1}$  en el punto  $(2, f^{-1}(2)) = (2, 1)$

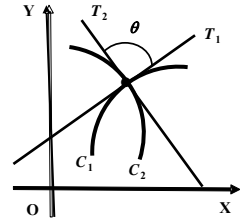
$$y - 1 = (f^{-1})'(2)(x - 2) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{6}(x - 2) \Rightarrow 6y - x = 4$$

### ANGULO ENTRE CURVAS

Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos curvas que se intersectan en un punto  $P$  y sean  $T_1$  y  $T_2$  las rectas tangentes a estas curvas en el punto  $P$ . Llamaremos ángulos entre  $C_1$  y  $C_2$  a los ángulos suplementarios que forman  $T_1$  y  $T_2$ . Si  $m_1$  y  $m_2$  son las pendientes de  $T_1$  y  $T_2$  respectivamente, entonces uno de estos dos ángulos es el ángulo  $\theta$  que cumple:

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Si  $\tan \theta \geq 0$ , el ángulo es agudo; en cambio, si  $\tan \theta < 0$ , el ángulo es obtuso.



Se dice que dos **curvas se cortan ortogonalmente** si las rectas tangentes en el punto de intersección son perpendiculares. O sea, si las curvas se cortan formando un ángulo recto.

**EJEMPLO 8.** Hallar los ángulos que forman las siguientes circunferencias en el puntos de intersección.

$$C_1: x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0, \quad C_2: x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$$

**Solución**

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las circunferencias, hallamos que ellas se intersectan en los puntos  $A = (1, 2)$  y  $B = (3, -2)$

**a. En  $A = (1, 2)$**

Hallamos la derivada  $y'$  para ambas ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$2x + 2yy' + 2y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y+1}$$

En  $A = (1, 2)$ ,

$$y' = -\frac{x}{y+1} = -\frac{1}{2+1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{3}$$

Por otro lado,

$$x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2x + 2yy' - 4 = 0 \Rightarrow y' = \frac{2-x}{y}$$

En  $A = (1, 2)$ ,

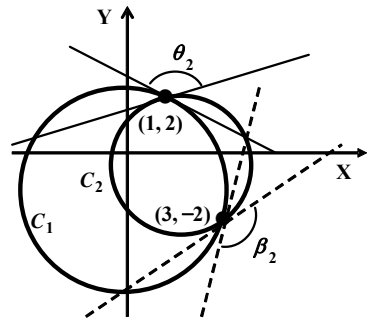
$$y' = \frac{2-x}{y} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

Ahora, si  $\theta_1$  es uno de los ángulos en  $A = (1, 2)$ , entonces

$$\tan \theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{1/2 - (-1/3)}{1 + (-1/3)(1/2)} = 1$$

Luego, el ángulo agudo es  $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$  y el obtuso,  $\theta_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

**b. En  $B = (3, -2)$**



$$y' = -\frac{x}{y+1} = -\frac{3}{-2+1} = 3 \Rightarrow m_1 = 3, \quad y' = \frac{2-3}{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

Ahora, si  $\beta_1$  es uno de los ángulos en  $B = (3, -2)$ , entonces

$$\tan \beta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{1/2 - 3}{1 + (3)(1/2)} = 1$$

Luego, el ángulo agudo es  $\beta_1 = \frac{\pi}{4}$  y el obtuso,  $\beta_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

**EJEMPLO 9.** Probar que cada miembro de la familia (hipérbolas)

$$xy = k, \quad k \neq 0$$

corta ortogonalmente a cada miembro de la familia (hipérbolas).

$$y^2 - x^2 = c, \quad c \neq 0$$

**Solución**

Tenemos que:

$$xy = k \Rightarrow xy' + y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x}$$

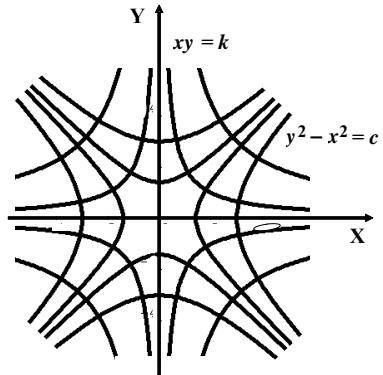
Por otro lado,

$$y^2 - x^2 = c \Rightarrow 2yy' - 2x = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{y}$$

Si  $P = (x, y)$  es un punto donde se interseca un miembro de la primera familia con un miembro de la segunda familia, entonces las pendientes en ese punto son:

$$m_1 = -\frac{y}{x} \quad y \quad m_2 = \frac{x}{y} \Rightarrow m_1 m_2 = \left(-\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y}\right) = -1$$

Luego, las curvas se cortan ortogonalmente.



## PROBLEMAS RESUELTOS 7.1

**PROBLEMA 1.** Hallar la recta tangente a la hoja de Descartes,

$$x^3 + y^3 = 3axy,$$

en el punto  $(3a/2, 3a/2)$

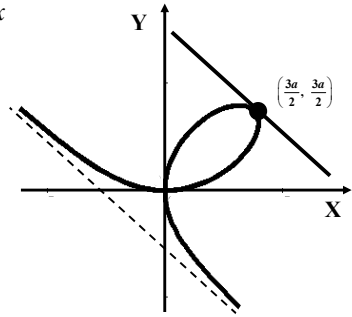
**Solución**

Hallemos  $\frac{dy}{dx}$  derivando implícitamente:

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 = 3axy &\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 3ay + 3ax \frac{dy}{dx} \\&\Rightarrow 3(y^2 - ax) \frac{dy}{dx} = 3(ay - x^2) \\&\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}\end{aligned}$$

Ahora, la pendiente en el punto  $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ , es:

$$m = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} = \frac{a\left(\frac{3a}{2}\right) - \left(\frac{3a}{2}\right)^2}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - a\left(\frac{3a}{2}\right)} = \frac{-3a^2}{3a^2} = -1$$



Luego, la recta tangente en el punto dada es:

$$y - \frac{3a}{2} = (-1)\left(x - \frac{3a}{2}\right) \Rightarrow y + x - 3a = 0$$

**PROBLEMA 2.** Probar que la recta tangente en el punto  $(x_0, y_0)$  a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ es la recta } \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

**Solución**

Multiplicando la ecuación de la elipse por  $a^2 b^2$ :

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \quad (1)$$

Por ser  $(x_0, y_0)$  un punto de la elipse:

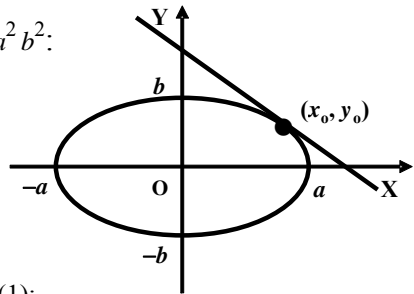
$$b^2 (x_0)^2 + a^2 (y_0)^2 = a^2 b^2 \quad (2)$$

Hallemos la pendiente de la tangente. Para esto, derivamos implícitamente la igualdad (1):

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \Rightarrow 2b^2 x + 2a^2 y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Luego, la pendiente en el punto  $(x_0, y_0)$  es  $m = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$

En consecuencia, la recta tangente en el punto  $(x_0, y_0)$  es



$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0) \Rightarrow a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = a^2 (y_0)^2 + b^2 (x_0)^2$$

$$\Rightarrow a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = a^2 b^2 \quad (\text{por (2)})$$

Finalmente, dividiendo entre  $a^2 b^2$ :

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

**PROBLEMA 3.** El gráfico de la siguiente ecuación es una elipse rotada.

$$x^2 - xy + y^2 = 4$$

Hallar las rectas tangentes a esta curva en los puntos donde ésta corta al eje X. Mostrar que estas rectas son paralelas.

**Solución**

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - x(0) + (0)^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Luego, la curva corta al eje X en los puntos  $(-2, 0)$  y  $(2, 0)$

Derivando implícitamente la ecuación, tenemos:

$$2x - xy' - y + 2yy' = 0 \Rightarrow$$

$$(2y - x) y' = y - 2x \Rightarrow y' = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

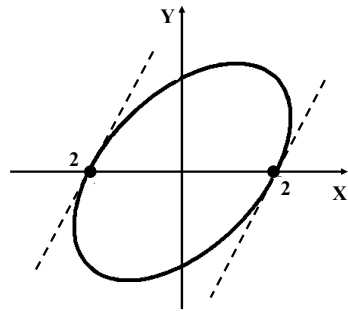
La pendiente de la tangente en  $(-2, 0)$

$$m_1 = \frac{0 - 2(-2)}{2(0) - (-2)} = 2, \text{ y su ecuación es}$$

$$y - 0 = 2(x - (-2)) \Rightarrow y = 2x + 4$$

La pendiente de la tangente en  $(2, 0)$

$$m_2 = \frac{0 - 2(2)}{2(0) - 2} = 2, \text{ y su ecuación es } y - 0 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 4$$



Observar que las dos tangentes tienen la misma pendiente y, por tanto, son paralelas.

**PROBLEMA 4.**

Probar que el segmento comprendido entre los dos ejes coordenadas de cualquier recta tangente a la **Astroide**

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

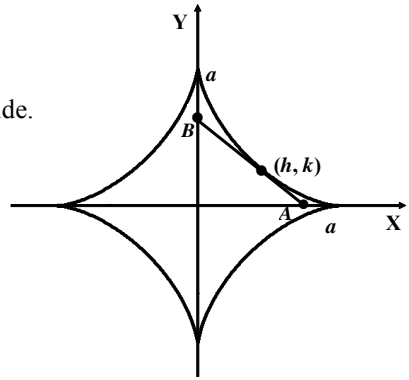
tiene longitud  $a$ .

**Solución**

Sea  $P = (h, k)$  un punto cualquiera de la Astroide.

Se tiene, entonces:

$$h^{2/3} + k^{2/3} = a^{2/3} \quad (1)$$



**Paso 1.** Hallamos la ecuación de la tangente en el punto  $P = (h, k)$ .

Hallemos la pendiente.

Derivando implícitamente:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \Rightarrow \frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3} \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-1/3}y^{1/3} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

La derivada en el punto  $P = (h, k)$ , nos da la pendiente:

$$m = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=h} = -\frac{k^{1/3}}{h^{1/3}}$$

Luego, la ecuación de la recta tangente, teniendo en cuenta (1), es

$$y - k = -\frac{k^{1/3}}{h^{1/3}}(x - h) \Rightarrow y + \frac{k^{1/3}}{h^{1/3}}x = h^{2/3}k^{1/3} + k \Rightarrow$$

$$y + \frac{k^{1/3}}{h^{1/3}}x = k^{1/3}(h^{2/3} + k^{2/3}) \Rightarrow y + \frac{k^{1/3}}{h^{1/3}}x = k^{1/3}a^{2/3} \quad (2)$$

**Paso 2.** Hallamos la intersección de la recta tangente con los ejes coordenados.

Haciendo  $x = 0$  en (2) se tiene:  $y = k^{1/3}a^{2/3}$

Luego, la recta tangente corta al eje Y en el punto  $A = (0, k^{1/3}a^{2/3})$

Haciendo  $y = 0$  en (2) se tiene:

$$\frac{k^{1/3}}{h^{1/3}}x = k^{1/3}a^{2/3} \Rightarrow x = \frac{h^{1/3}}{k^{1/3}}(k^{1/3}a^{2/3}) = h^{1/3}a^{2/3}$$

Luego, la recta tangente corta al eje X en el punto  $B = (h^{1/3}a^{2/3}, 0)$

**Paso 3.** Hallamos la longitud del segmento de extremos A y B.

La longitud de este segmento es la distancia  $d(A, B)$ , de  $A$  a  $B$ .

$$\begin{aligned} [d(A, B)]^2 &= \left(0 - k^{1/3} a^{2/3}\right)^2 + \left(h^{1/3} a^{2/3} - 0\right)^2 \\ &= k^{2/3} a^{4/3} + h^{2/3} a^{4/3} = a^{4/3} (k^{2/3} + h^{2/3}) = a^{4/3} a^{2/3} = a^2 \end{aligned}$$

Luego, a longitud de este segmento de extremos  $A$  y  $B$  es  $d(A, B) = a$ .

**PROBLEMA 5.** Dada la función  $f(x) = 2x + \cos x$ , cuyo dominio es  $\mathbb{R}$ .

- a. Probar que tiene inversa
- b. Hallar  $(f^{-1})'(1)$
- c. Hallar la recta tangente al gráfico de  $f^{-1}$  en el punto  $(1, f^{-1}(1))$ .

**Solución**

a. Tenemos que

$$f'(x) = 2 - \sin x \Rightarrow f'(x) \geq 2 - 1 = 1 \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego, por la parte a. del teorema de la función inversa,  $f$  tiene inversa en  $\mathbb{R}$ .

b. Se tiene que

$$f(0) = 2(0) + \cos(0) = 0 + 1 = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 0$$

Luego, por la parte b. del teorema de la función inversa,

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2 - \sin(0)} = \frac{1}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

c. La recta tangente a la gráfica de  $f^{-1}$  en el punto  $(1, f^{-1}(1)) = (1, 0)$  es

$$y - f^{-1}(1) = (f^{-1})'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y - x + 1 = 0$$

**PROBLEMA 6.** Probar que la familia de parábolas

$$y = ax^2 \quad (1)$$

se cortan ortogonalmente con la familia de las elipses

$$x^2 + 2y^2 = c \quad (2)$$

**Solución**

$$y = ax^2 \Rightarrow y' = 2ax$$

$$x^2 + 2y^2 = c \Rightarrow 2x + 4yy' = 0 \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{x}{2y}$$

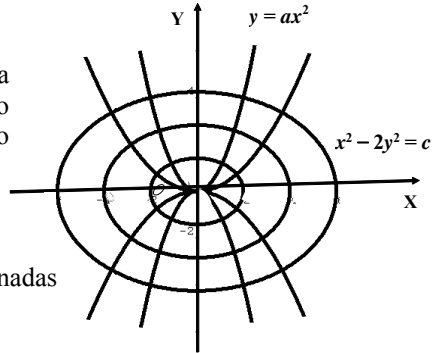
Sea  $P = (x, y)$  un punto donde se interseca un miembro de la primera familia con uno de la segunda. Las pendientes en este punto son:

$$m_1 = 2ax \quad y \quad m_2 = -\frac{x}{2y}$$

Ahora, teniendo en cuenta que las coordenadas de  $P = (x, y)$  satisfacen (1):

$$m_1 m_2 = (2ax) \left( -\frac{x}{2y} \right) = -\frac{ax^2}{y} = -\frac{y}{y} = -1$$

Luego, las familias se cortan ortogonalmente.



**PROBLEMA 7.** Probar el teorema de la función inversa.

Si  $f$  es diferenciable en un intervalo abierto  $I$  en el cual  $f'$  es continua y no se anula, entonces

- a.  $f$ , en todo  $I$ , tiene inversa  $f^{-1}$ .
- b.  $f^{-1}$  es diferenciable y para cada  $x$  en  $f(I)$ , se cumple que:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

**Solución**

- a. Si  $f'$  es continua y no se anula en  $I$ , entonces

$$f'(z) > 0, \forall z \in I \quad \text{ó} \quad f'(z) < 0, \forall z \in I,$$

ya que  $f'$ , de tomar valores positivos y negativos, por el teorema del valor intermedio, existiría un  $c$  en  $I$  tal que  $f'(c) = 0$ . Pero esto contradice la hipótesis.

Por un resultado simple, que veremos más adelante (teorema 8.7), en el primer caso,  $f$  es creciente en  $I$ . En segundo caso,  $f$  es decreciente en  $I$ . Sabemos que, en cualquiera de los casos,  $f$  es inyectiva y, por lo tanto,  $f$  tiene inversa en  $I$ .

- b. Sea  $y = f^{-1}(x)$ ,  $x_0$  un elemento cualquiera de  $f(I)$  y sea  $y_0 = f^{-1}(x_0)$ .

Se tiene que:  $x = f(y), \quad x_0 = f(y_0)$

Ahora,

$$(f^{-1})'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

Como  $f$  es diferenciable en  $I$ ,  $f$  es continua en  $I$ . Por lo tanto,  $f^{-1}$  es continua.

Por otro lado, por ser,  $f^{-1}$  continua, se tiene que:

$$x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow y \rightarrow y_0$$

Regresando a (1), tenemos:

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}} \\ &= \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} \end{aligned}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 7.1

*En los problemas del 1 al 23, derivando implícitamente, hallar  $\frac{dy}{dx}$ . Las letras  $a$ ,*

*$b, c$  y  $r$  denotan constantes.*

1.  $3x^2 - 4y = 1$

2.  $xy - x^2 = 5$

3.  $y^2 = 4px$

4.  $3xy^2 - x^2y^2 = x + 1$

5.  $\frac{1}{x} + y^2 = 2x$

6.  $x^3 + \frac{1}{y} = xy$

7.  $(y^2 - 2xy)^2 = 4y - 3$

8.  $\frac{y}{x-y} - x^3 - 1 = 0$

9.  $x^2 + y^2 = r^2$

10.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

11.  $x + 2\sqrt{xy} + y = b$

12.  $x^2 - 2axy + y^2 = 0$

13.  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$

14.  $\sqrt{y} + \sqrt[3]{y} = x$

15.  $a \cos^2(x + y) = b$

16.  $\tan y = xy$

17.  $\cot(xy) = xy$

18.  $\cos(x - y) = y \operatorname{sen} x$

19.  $y = 1 + xe^y$

20.  $ye^y = e^{x+1}$

21.  $2^x + 2^y = 2^{x+y}$

22.  $2y \ln y = x$

23.  $\ln x + e^{-y/x} = c$

24. Sea la función  $f(x) = 5 - x - x^3$ .

a. Probar que  $f$  tiene inversa en  $\mathbb{R}$ .

b. Hallar  $(f^{-1})'(3)$

c. Hallar la recta tangente al gráfico de  $f$  en el punto  $(1, 3)$

d. Hallar la recta tangente al gráfico de  $f^{-1}$  en el punto  $(3, 1)$

25. Sea la función  $g(x) = x^4 + 3x^2 - 2$ .
- Probar que  $g$  tiene inversa en  $(0, +\infty)$ .
  - Hallar  $(g^{-1})'(2)$
  - Hallar la recta tangente al gráfico de  $g$  en el punto  $(1, 2)$
  - Hallar la recta tangente al gráfico de  $g^{-1}$  en el punto  $(2, 1)$
26. Sea la función  $h(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ .
- Probar que  $h$  tiene inversa en  $\mathbb{R}$ .
  - Hallar  $(h^{-1})'(0)$
  - Hallar la recta tangente al gráfico de  $h$  en el punto  $(0, 0)$
  - Hallar la recta tangente al gráfico de  $h^{-1}$  en el punto  $(0, 0)$

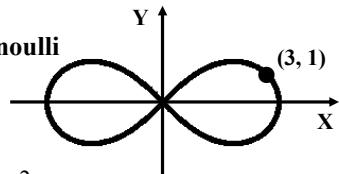
*En los problemas del 27 al 32, hallar la recta tangente a la curva en el punto indicado.*

27.  $y^2 - 4x - 16 = 0$ ;  $(-3, 2)$
28.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ ;  $(-5, -8/3)$
29.  $x^2 - x\sqrt{xy} - 2y^2 = 0$ ;  $(-1, -1)$
30.  $y^4 + 6xy = 4x^4$ ;  $(-1, 2)$
31.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{3} = 1$ ; en los puntos donde  $x = 3$ .
32.  $\left(\frac{x}{a}\right)^{2n} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n} = 2$ ; en los puntos donde  $x = a$ .

33. Hallar la recta tangente a la **Lemniscata de Bernoulli**

$$2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2),$$

en el punto  $(3, 1)$ .



34. Probar que la tangente a la hipérbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  en un punto  $P = (x_0, y_0)$  tiene la siguiente ecuación  $\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$
35. Probar que el segmento de la tangente a la hipérbola  $xy = a^2$ , limitado por los ejes coordenados, tiene por punto medio el punto de tangencia.
36. Probar que la suma de las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados de una tangente cualquiera a la curva  $x^{1/2} + y^{1/2} = b^{1/2}$  es igual a  $b$ .

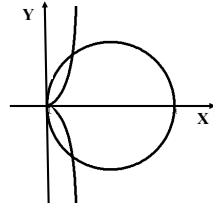
*En los problemas 37 y 38 hallar el ángulo de intersección de las curvas dadas.*

37.  $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ ,  $x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0$
38.  $y = x^2$ ,  $y = x^3$

39. Probar que la elipse  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$  y la hipérbola  $x^2 - y^2 = 5$  se cortan ortogonalmente.

40. Probar que la **Cisoide de Diocles**,  $(2a - x)y^2 = x^3$  y la circunferencia  $x^2 + y^2 = 8ax$  se cortan:

- En el origen, ortogonalmente.
- En los otros puntos, con un ángulo de  $45^\circ$ .



## SECCION 7.2

### DERIVACION LOGARITMICA

Cuando una función tiene un aspecto complicado y está conformada por productos, cocientes, potencias o radicales, el cálculo de su derivada se simplifica si se utiliza el procedimiento llamado **derivación logarítmica**. Para esto, se siguen los siguientes pasos:

- Tomar logaritmos naturales en ambos miembros y, usando las propiedades logarítmicas, transformar los productos, cocientes y exponentes en sumas, restas y multiplicaciones, respectivamente.
- Derivar implícitamente.
- Despejar la derivada y simplificar.

**EJEMPLO 1.** Mediante derivación logarítmica hallar la derivada de

$$y = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2-2}}$$

**Solución**

**Pasos 1: Aplicamos logaritmos y simplificamos:**

$$\ln y = \ln \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2-2}} = 2 \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x^2-2)$$

**Paso 2. Derivamos implícitamente**

$$D_x \ln y = 2D_x \ln(x+1) - \frac{1}{2} D_x \ln(x^2-2) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y} D_x y = 2 \frac{1}{x+1} D_x(x+1) - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2-2} D_x(x^2-2) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y} D_x y = 2 \frac{1}{x+1} (1) - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2-2} (2x) = \frac{2}{x+1} - \frac{x}{x^2-2}$$

**Paso 3. Despejamos la derivada y simplificamos:**

$$D_x y = y \left[ \frac{2}{x+1} - \frac{x}{x^2-2} \right] = y \left[ \frac{x^2-x-4}{(x+1)(x^2-2)} \right] \Rightarrow$$

$$D_x y = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2-2}} \left[ \frac{x^2-x-4}{(x+1)(x^2-2)} \right] = \frac{(x+1)(x^2-x-4)}{(x^2-2)^{3/2}}$$

En la práctica, los 3 pasos dados se dan implícitamente, sin necesidad de especificarlos.

**EJEMPLO 2.** Hallar la derivada de  $y = \left( \frac{t}{1+t} \right)^t$

**Solución**

$$\ln y = \ln \left( \frac{t}{1+t} \right)^t = t \ln \left( \frac{t}{1+t} \right) = t \ln t - t \ln(1+t)$$

Esto es,  $\ln y = t \ln t - t \ln(1+t)$

Derivando respecto a  $t$ :

$$\frac{y'}{y} = t \frac{1}{t} + \ln t - \left[ t \frac{1}{1+t} + \ln(1+t) \right] = 1 + \ln t - \frac{t}{1+t} - \ln(1+t) \Rightarrow$$

$$y' = y \left( 1 - \frac{1}{1+t} + \ln \frac{t}{1+t} \right) = \left( \frac{t}{1+t} \right)^t \left( \frac{t}{1+t} + \ln \frac{t}{1+t} \right)$$

## PROBLEMAS RESUELTOS 7.2

**PROBLEMA 1.** Utilizando derivación logarítmica, hallar la derivada de

$$y = \frac{(x^2-1)(x^3+2)}{\sqrt[3]{x+1}}$$

**Solución**

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln \frac{(x^2-1)(x^3+2)}{\sqrt[3]{x+1}} = \ln \left[ (x^2-1)(x^3+2) \right] - \ln \sqrt[3]{x+1} \\ &= \ln(x^2-1) + \ln(x^3+2) - \frac{1}{3} \ln(x+1) \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} D_x \ln y &= D_x \ln(x^2-1) + D_x \ln(x^3+2) - D_x \frac{1}{3} \ln(x+1) \\ &= \frac{1}{x^2-1} D_x(x^2-1) + \frac{1}{x^3+2} D_x(x^3+2) - \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} D_x(x+1) \Rightarrow \\ \frac{1}{y} D_x y &= \frac{2x}{x^2-1} + \frac{3x^2}{x^3+2} - \frac{1}{3(x+1)} \\ D_x y &= y \left( \frac{2x}{x^2-1} + \frac{3x^2}{x^3+2} - \frac{1}{3(x+1)} \right) \Rightarrow \\ D_x y &= \frac{(x^2-1)(x^3+2)}{\sqrt[3]{x+1}} \left( \frac{2x}{x^2-1} + \frac{3x^2}{x^3+2} - \frac{1}{3(x+1)} \right) \end{aligned}$$

**PROBLEMA 2.** Mediante derivación logarítmica hallar la derivada de

a.  $z = x^x, x > 0$

b.  $y = (x)^{x^x} = x^{x^x}, x > 0$

**Solución**

a.  $z = x^x \Rightarrow \ln z = \ln x^x = x \ln x \Rightarrow \ln z = x \ln x$

Derivamos respecto a  $x$ :

$$\frac{z'}{z} = x \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x \Rightarrow z' = z(1 + \ln x)$$

$$\Rightarrow z' = x^x(1 + \ln x)$$

b.  $y = x^{x^x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{x^x} = x^x \ln x \Rightarrow \ln y = x^x \ln x$

Derivamos respecto a  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= (x^x)' \ln x + x^x (\ln x)' \\ &= [x^x(1 + \ln x)] \ln x + x^x \frac{1}{x} \quad (\text{por la parte a.}) \\ &= x^x \left[ (1 + \ln x) \ln x + \frac{1}{x} \right] = x^x \left[ \ln x + \ln^2 x + \frac{1}{x} \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$y' = y \left( x^x \left[ \ln x + \ln^2 x + \frac{1}{x} \right] \right) = x^{x^x} \left( x^x \left[ \ln x + \ln^2 x + \frac{1}{x} \right] \right) \Rightarrow$$

$$y' = x^x x^{x^x} \left[ \frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right]$$


---

**PROBLEMA 3.** Si  $x^y = y^x$ , hallar  $D_x y$

**Solución**

Aplicamos logaritmos y luego derivamos implícitamente:

$$x^y = y^x \Rightarrow \ln x^y = \ln y^x \Rightarrow y \ln x = x \ln y \Rightarrow$$

$$y D_x (\ln x) + \ln x D_x y = x D_x (\ln y) + \ln y D_x x \Rightarrow$$

$$y \frac{1}{x} + \ln x D_x y = x \frac{1}{y} D_x y + \ln y \Rightarrow \left( \ln x - \frac{x}{y} \right) D_x y = \ln y - \frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$\left( \frac{y \ln x - x}{y} \right) D_x y = \frac{x \ln y - y}{x} \Rightarrow D_x y = \frac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}$$


---

## PROBLEMAS PROPUESTOS 7.2

Utilizando la técnica de la derivación logarítmica hallar la derivada de las siguientes funciones:

1.  $y = x^{x^3}$

2.  $y = x^{\sqrt{x}}$ ,  $x > 0$

3.  $y = x^{\ln x}$ ,  $x > 0$

4.  $y = (\ln x)^{\ln x}$

5.  $y = 2^{3^x}$

6.  $y = a^x x^a$

7.  $y = \sqrt[3]{x}$

8.  $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$

9.  $y = (\sin x)^{\cos x}$

10.  $y = \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x$

11.  $y = \frac{x(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}$

12.  $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2 - 1)}{(x+1)^2}}$

---

**SECCION 7.3**

**DERIVADAS DE LAS FUNCIONES**

**TROGONOMETRICAS INVERSAS**

**TEOREMA 7.2** Si  $u = u(x)$  es una función diferenciable de  $x$ , entonces

- |  |   |
|--|---|
| <p>1. <math>D_x \text{sen}^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u</math></p> <p>3. <math>D_x \text{tan}^{-1}u = \frac{1}{1+u^2} D_x u</math></p> <p>5. <math>D_x \text{sec}^{-1}u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u</math></p> | <p>2. <math>D_x \text{cos}^{-1}u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u</math></p> <p>4. <math>D_x \text{cot}^{-1}u = -\frac{1}{1+u^2} D_x u</math></p> <p>6. <math>D_x \text{cosec}^{-1}u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u</math></p> |
|--|---|

**Demostración**

Es suficiente probar las fórmulas del teorema para el caso  $u = x$ . El caso general se obtiene usando la regla de la cadena.

Sólo probaremos (1), (4) y (5). Las otras fórmulas se obtienen en forma análoga (problema propuesto 18).

En vista de que cada función trigonométrica es diferenciable y su derivada es continua, su correspondiente función inversa es diferenciable.

1. Sea  $y = \text{sen}^{-1}x$ . Luego,  $\text{sen } y = x$  y  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Derivando  $\text{sen } y = x$  respecto a  $x$ :

$$D_x \text{sen } y = D_x x \Rightarrow \cos y D_x y = 1 \Rightarrow D_x y = \frac{1}{\cos y} \quad (i)$$

Pero,  $\cos y = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2 y}$  y  $\cos y > 0$  en el intervalo  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ .

Luego,  $\cos y = \sqrt{1-\text{sen}^2 y}$ .

Reemplazando este valor en (i):

$$D_x y = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow D_x \text{sen}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. Sea  $y = \text{cot}^{-1}x$ . Luego,  $\text{cot } y = x$  y  $0 < y < \pi$ .

Derivando  $\text{cot } y = x$  respecto a  $x$ :

$$D_x \text{cot } y = D_x x \Rightarrow -\text{cosec}^2 y D_x y = 1 \Rightarrow$$

$$D_x y = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = -\frac{1}{1 + \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

5. Sea  $\sec^{-1} x = y$ . Luego,  $\sec y = x$ , donde  $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$  ó  $\pi \leq y < \frac{3\pi}{2}$

Derivando  $\sec y = x$  respecto a  $x$ :

$$D_x \sec y = D_x x \Rightarrow \sec y \tan y D_x y = 1 \Rightarrow$$

$$D_x y = \frac{1}{\sec y \tan y} = \frac{1}{x \tan y} \quad \text{(ii)}$$

Pero,  $\tan y = \pm \sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm \sqrt{x^2 - 1}$ . Además,

$\tan y > 0$  en  $0 < y < \frac{\pi}{2}$  ó en  $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$ . Luego,  $\tan y = \sqrt{x^2 - 1}$

Reemplazando este valor en (ii):

$$D_x y = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow D_x \sec^{-1} x = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

**EJEMPLO 1.** Hallar la derivada de

a.  $y = \sin^{-1} \frac{x}{2}$       b.  $y = \tan^{-1} \sqrt{x}$       c.  $y = \operatorname{cosec}^{-1} e^{3x}$

**Solución**

$$\text{a. } y' = D_x \left( \sin^{-1} \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x/2)^2}} D_x \left( \frac{x}{2} \right) = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\text{b. } y' = D_x (\tan^{-1} \sqrt{x}) = \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} D_x \sqrt{x} = \frac{1}{1 + x} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } y' &= D_x (\operatorname{cosec}^{-1} e^{3x}) = -\frac{1}{e^{3x} \sqrt{(e^{3x})^2 - 1}} D_x (e^{3x}) \\ &= -\frac{1}{e^{3x} \sqrt{e^{6x} - 1}} (3e^{3x}) = -\frac{3}{\sqrt{e^{6x} - 1}} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 2.** Sea la función:

$$f(x) = \sin^{-1} \left( \frac{x-2}{2} \right) - 2 \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{x}}{2} \right), \quad 0 \leq x \leq 4.$$

Verificar que  $f'(x) = 0, \forall x \in [0, 4]$ .

**Solución**

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= D_x \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - 2D_x \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-((x-2)/2)^2}} D_x\left(\frac{x-2}{2}\right) - 2 \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x}/2)^2}} D_x\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{4-(x-2)^2}} \left(\frac{1}{2}\right) - 2 \frac{2}{\sqrt{4-x}} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} = 0
 \end{aligned}$$


---

**PROBLEMAS PROPUESTOS 7.3**

*En los problemas del 1 al 13 hallar la derivada de las funciones especificadas.*

1.  $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{9}\right)$

2.  $y = \operatorname{sec}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

3.  $y = \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{x}$

4.  $y = \operatorname{tan}^{-1}(x^2 + 1)$

5.  $y = \operatorname{cot}^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

6.  $y = x\sqrt{4-x^2} + 4\operatorname{sen}^{-1}(x/2)$

7.  $y = \sqrt{1-x^2} + x \operatorname{cosec}^{-1}(1/x)$

8.  $y = \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{\operatorname{sen} x}$

9.  $y = \operatorname{tan}^{-1}\left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right]$

10.  $y = \operatorname{cos}^{-1}(\ln x)$

11.  $y = \operatorname{tan}^{-1} x + \operatorname{cot}^{-1} x$

12.  $y = \operatorname{tan}(\operatorname{cos}^{-1} x)$

13.  $y = 2\operatorname{cos}^{-1}\left(1-\frac{x}{2}\right) + \sqrt{4x-x^2}$

*En los problemas 14 y 15 hallar la derivada y'.*

14.  $\operatorname{tan}^{-1}(x+y) = x$

15.  $xy = \operatorname{tan}^{-1}(x/y)$

16. Hallar la recta tangente a la curva  $f(x) = \tan^{-1}(3/x)$  en el punto donde  $x = 3$ .

17. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \cos^{-1}[\sqrt{2}(x-1/2)], \text{ en el punto donde } x = 0.$$

18. Probar las fórmulas (2), (3) y (6) del teorema 7.2.

19. Sea la función  $f(x) = (\cos^{-1} x + \operatorname{sen}^{-1} x)^n$ ,  $-1 \leq x \leq 1$

Verificar que  $f'(x) = 0$ ,  $\forall x$  tal que  $-1 \leq x \leq 1$ .

20. Sea la función  $f(x) = 2 \tan^{-1} \sqrt{x} - \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)$ , donde  $x \geq 0$ .

Verificar que  $f'(x) = 0$ ,  $\forall x$  tal que  $x \geq 0$ .

#### SECCION 7.4

### DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.

#### VELOCIDAD Y ACELERACION

Al derivar una función  $f$  obtenemos la función derivada  $f'$ , cuyo dominio está contenido en el dominio de  $f$ . A la derivada  $f'$  podemos volver a derivarla obteniendo otra nueva función  $(f)'$ , cuyo dominio es el conjunto de todos los puntos  $x$  del dominio de  $f'$  para los cuales  $f'$  es derivable en  $x$ ; o sea todos los puntos  $x$  del dominio de  $f'$  para los cuales existe el siguiente límite:

$$(f)''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

La función  $(f)'$  se llama **segunda derivada de  $f$**  y se denota por  $f''$ . Si  $f''(a)$  existe, diremos que  $f$  es dos veces diferenciable en  $a$  y que  $f''(a)$  es la segunda derivada de  $f$  en  $a$ .

Con las otras notaciones, la segunda derivada de  $y = f(x)$  se escribe así:

$$D_x^2(f(x)), \quad D_x^2(y), \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

En vista de que  $f''$  es la segunda derivada de  $f$ , a  $f'$  la llamaremos **primera derivada de  $f$** .

**EJEMPLO 1.** Hallar la primera y la segunda derivadas de cada una de las siguientes funciones:

a.  $f(x) = x^2$       b.  $y = x^3 - 7x^2 - 2x + 1$ .      c.  $u = \frac{1}{t}$ .

**Solución**

a.  $f'(x) = 2x$ ,  $f''(x) = 2$ .      b.  $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 14x - 2$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 14$   
 c.  $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{t^2}$ ,  $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dt}(-t^{-2}) = -(-2)t^{-3} = \frac{2}{t^3}$

El proceso de derivación de una función  $f$  podemos continuarlo más allá de la segunda derivada. Así, si derivamos  $f''$  obtenemos la **tercera derivada de  $f$** , que se denota por  $f'''$ . Esto es,  $f''' = (f'')$ '

Nuevamente, si a  $f'''$  la volvemos a derivar, obtenemos la **cuarta derivada de  $f$** , y así sucesivamente. A las derivadas de una función, a partir de la derivada segunda, se les llama **derivadas de orden superior**.

La notación anterior, cuando el orden de derivación va más allá de 4, es incómoda. Para mayor facilidad, el orden de la derivada se abrevia mediante un superíndice encerrado entre paréntesis, del modo siguiente:

$$f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'', \quad f^{(3)} = f''', \quad f^{(4)} = f'''' , \quad \text{etc.}$$

Estas derivadas, con las otras notaciones, se escriben así:

$$f' = D_x(f) = \frac{df}{dx}, \quad f'' = f^{(2)} = D_x^2(f) = \frac{d^2f}{dx^2},$$

$$f''' = f^{(3)} = D_x^3(f) = \frac{d^3f}{dx^3}, \quad f'''' = f^{(4)} = D_x^4(f) = \frac{d^4f}{dx^4}$$

**EJEMPLO 2.** Hallar todas las derivadas de la función  $f(x) = x^3$

**Solución**

$$f'(x) = 3x^2, \quad f^{(2)}(x) = 6x, \quad f^{(3)}(x) = 6, \quad f^{(4)}(x) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(n)}(x) = 0, \quad \text{para } n \geq 4.$$

**EJEMPLO 3.** Hallar las derivadas hasta de orden 4 de  $y = \frac{1}{x}$ .

**Solución**

1.  $\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$$2. \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = \frac{d}{dx} \left( -x^{-2} \right) = -(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$3. \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left( \frac{2}{x^3} \right) = \frac{d}{dx} \left( 2x^{-3} \right) = 2(-3)x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$

$$4. \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d}{dx} \left( \frac{-6}{x^4} \right) = \frac{d}{dx} \left( -6x^{-4} \right) = -6(-4)x^{-5} = \frac{24}{x^5}$$

## VELOCIDAD

Vimos que para precisar el concepto de velocidad instantánea tuvimos que recurrir a un límite de la velocidad promedio, el cual nos condujo a la derivada. Formalicemos esta idea en la siguiente definición.

**DEFINICION.** Sea  $s = f(t)$  la función posición de un objeto que se mueve a lo largo de una recta. La velocidad (instantánea) del objeto en el instante  $t$  está dada por

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

La velocidad es **positiva** o **negativa** según el objeto se desplaza en el sentido positivo o negativo de la recta numérica. Si la velocidad es 0, el objeto está en reposo.

**EJEMPLO 4.** Un objeto se mueve sobre una recta de acuerdo a la ecuación

$$s = 3t^2 - 8t + 7,$$

donde  $s$  se mide en centímetros y  $t$  en segundos.

- a. Hallar la velocidad del objeto cuando  $t = 1$  y cuando  $t = 5$ .
- b. Hallar la velocidad promedio en el intervalo de tiempo  $[1, 5]$ .

### Solución

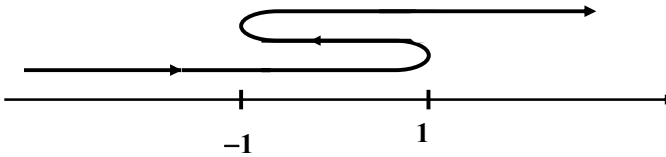
a. Tenemos que  $v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t - 8$ . Luego,

$$v(1) = 6(1) - 8 = -2 \text{ cm/seg} \quad \text{y} \quad v(5) = 6(5) - 8 = 22 \text{ cm/seg}$$

b. La velocidad promedio en el intervalo  $[1, 5]$  es  $\frac{s(5) - s(1)}{5 - 1} = \frac{42 - 2}{4} = 10 \text{ cm/seg}$



El siguiente dibujo muestra, esquemáticamente, el movimiento del objeto. Advertimos que el objeto se mueve sobre la recta y no sobre la curva superior.

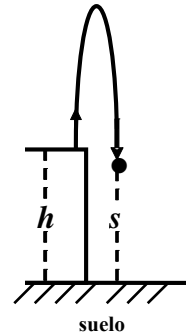


### MOVIMIENTO DE CAIDA LIBRE

Un movimiento de caída libre es un movimiento de aceleración constante, donde la aceleración es la aceleración de la gravedad. El valor de esta aceleración a la orilla del mar es  $g = 9.8 \text{ m/seg}^2$  en el sistema métrico o  $g = 32 \text{ pies/seg}^2$  en el sistema inglés.

Supongamos que un cuerpo es lanzado verticalmente desde una altura  $h$  metros sobre el nivel del suelo con una velocidad inicial de  $v_0 \text{ m/seg}^2$ . Si el sentido positivo es hacia arriba y si despreciamos la fricción del aire, entonces después de  $t$  segundos el objeto se encuentra a una altura de  $s$  metros sobre el suelo, donde

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h = -4.9t^2 + v_0t + h$$



En el caso de que  $s$  y la altura  $h$  se den en pies y la velocidad  $v_0$  en  $\text{pies/seg}^2$ , la fórmula correspondiente es

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h = -\frac{1}{2}(32)t^2 + v_0t + h = -16t^2 + v_0t + h$$

Observar que la aceleración es  $\frac{d^2s}{dt^2} = -g$

**EJEMPLO 6.** Una pelota es lanzada hacia arriba desde la azotea de un edificio de 58.8 m de altura y con una velocidad inicial de 19.6 m/seg.

- ¿Cuándo la pelota alcanza su máxima altura?
- ¿Cuál es esta altura máxima (respecto al suelo)?
- ¿Cuándo la pelota llega al suelo?
- ¿Con qué velocidad llega al suelo?

#### Solución

Tenemos que  $h = 58.8 \text{ m}$ . y  $v_0 = 19.6 \text{ m/seg}$ . Luego,

$$s = -4.9t^2 + 19.6t + 58.8 \quad \text{y} \quad v(t) = -9.8t + 19.6$$

a. La pelota alcanza su máxima altura cuando:

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow -9.8t + 19.6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{19.6}{9.8} = 2. \text{ Esto es, después de 2 segundos.}$$

b. La altura máxima es el valor de  $s$  cuando  $t = 2$ . Esto es,

$$s = -4.9(2)^2 + 19.6(2) + 58.8 = 78.4 \text{ metros}$$

c. La pelota llega al suelo cuando  $s = 0$ . Esto es, cuando

$$\begin{aligned} -4.9t^2 + 19.6t + 58.8 = 0 &\Rightarrow t^2 - 4t - 12 = 0 \quad (\text{dividiendo entre } -4.9) \\ &\Rightarrow (t - 6)(t + 2) \Rightarrow t = 6 \quad \text{ó} \quad t = -2 \end{aligned}$$

La pelota llega al suelo después de 6 segundos. Desechamos  $-2$  por ser negativo.

d. La velocidad con que llega al suelo es la velocidad en el instante 6 seg. Esto es,

$$v(6) = -9.8(6) + 19.6 = -39.2 \text{ m/seg.}$$

## PROBLEMAS RESUELTOS 7.4

**PROBLEMA 1.** Hallar las tres primeras derivadas de la función

$$y = \frac{1}{ax + b}$$

**Solución**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{ax + b} \right) = \frac{d}{dx} (ax + b)^{-1} = -(ax + b)^{-2} \frac{d}{dx} (ax + b) \\ &= -(ax + b)^{-2} (a) = -\frac{a}{(ax + b)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( -\frac{a}{(ax + b)^2} \right) = \frac{d}{dx} \left( -a(ax + b)^{-2} \right) \\ &= (-2)(-a)(ax + b)^{-3} \frac{d}{dx} (ax + b) = 2a(ax + b)^{-3} (a) = \frac{2a^2}{(ax + b)^3} \end{aligned}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{2a^2}{(ax + b)^3} \right) = \frac{d}{dx} \left( 2a^2(ax + b)^{-3} \right)$$

$$= -3(2a^2)(ax+b)^{-4} \frac{d}{dx}(ax+b) = -3(2a^2)(ax+b)^{-4}(a) = -\frac{6a^3}{(ax+b)^4}$$


---

**PROBLEMA 2.** Probar que la función  $y = (x^2 - 1)^2$  satisface la ecuación

$$(x^2 - 1)y^{(4)} + 2xy^{(3)} - 6y^{(2)} = 0$$

**Solución**

En primer lugar calculamos  $y^{(2)}$ ,  $y^{(3)}$ ,  $y^{(4)}$

$$y^{(1)} = \frac{d}{dx}(x^2 - 1)^2 = 2(x^2 - 1)(2x) = 4x^3 - 4x$$

$$y^{(2)} = \frac{d}{dx}(4x^3 - 4x) = 12x^2 - 4 \quad (1)$$

$$y^{(3)} = \frac{d}{dx}(12x^2 - 4) = 24x \quad (2)$$

$$y^{(4)} = 24 \quad (3)$$

Ahora, reemplazando (1), (2) y (3) en la ecuación dada:

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)y^{(4)} + 2xy^{(3)} - 6y^{(2)} &= (x^2 - 1)(24) + 2x(24x) - 6(12x^2 - 4) \\ &= 24x^2 - 24 + 48x^2 - 72x^2 + 24 = 0 \end{aligned}$$


---

**PROBLEMA 3.** Si  $x^2 + y^2 = r^2$ , Hallar: a.  $y'$    b.  $y''$    c.  $y'''$

**Solución**

a. Derivando implícitamente a  $x^2 + y^2 = r^2$ :

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

b. Derivando implícitamente a  $2x + 2yy' = 0$ :

$$2 + 2(y')^2 + 2yy'' = 0 \Rightarrow$$

$$y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y} = -\frac{1 + (-x/y)^2}{y} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{r^2}{y^3}$$

c. Derivando implícitamente a  $2 + 2(y')^2 + 2yy'' = 0$ :

$$4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' = 0 \Rightarrow 3y'y'' + yy''' = 0$$

$$y''' = -\frac{3y'y''}{y} = -\frac{3\left(-\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{r^2}{y^3}\right)}{y} = -\frac{3xr^2}{y^5}$$


---

**PROBLEMA 4.** Probar que la derivada de orden  $n$  de la función

$$y = \operatorname{sen} ax \quad \text{es} \quad y^{(n)} = a^n \operatorname{sen} (ax + n\pi/2).$$

**Solución**

Usaremos la identidad trigonométrica:  $\operatorname{sen}(\theta + \pi/2) = \cos\theta$

$$y^{(1)} = (\operatorname{sen} ax)' = (\cos ax)(ax)' = a \operatorname{sen} (ax + \pi/2)$$

$$\begin{aligned} y^{(2)} &= [a \operatorname{sen}(ax + \pi/2)]' = [a \cos(ax + \pi/2)](ax + \pi/2)' \\ &= [a \cos(ax + \pi/2)](a) = a^2 \cos(ax + \pi/2) = a^2 \operatorname{sen}((ax + \pi/2) + \pi/2) \\ &= a^2 \operatorname{sen}(ax + 2\pi/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{(3)} &= [a^2 \operatorname{sen}(ax + 2\pi/2)]' = [a^2 \cos(ax + 2\pi/2)](ax + 2\pi/2)' \\ &= a^2 \cos(ax + 2\pi/2)(a) = a^3 \cos(ax + 2\pi/2) = a^3 \operatorname{sen}((ax + 2\pi/2) + \pi/2) \\ &= a^3 \operatorname{sen}(ax + 3\pi/2). \end{aligned}$$

Observando las tres primeras derivadas conjeturamos que se cumple la igualdad

$$y^{(n)} = a^n \operatorname{sen}(ax + n\pi/2). \tag{1}$$

Probemos la validez de esta fórmula por inducción. Sólo falta verificar que se cumple para  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= [y^{(n)}]' = [a^n \operatorname{sen}(ax + n\pi/2)]' = [a^n \cos(ax + n\pi/2)](ax + n\pi/2)' \\ &= [a^n \cos(ax + n\pi/2)](a) = a^{n+1} \cos(ax + n\pi/2) \\ &= a^{n+1} \operatorname{sen}((ax + n\pi/2) + \pi/2) = a^{n+1} \operatorname{sen}(ax + (n+1)\pi/2). \end{aligned}$$

Luego, (1) se cumple para todo  $n$  natural.

---

**PROBLEMA 5.** Probar que  $D_x^n \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$

**Solución**

$$D_x \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = \frac{(1-x)(1) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2(1)}{(1-x)^2} = \frac{2(1!)}{(1-x)^2}$$

$$\begin{aligned} D_x^2 \left( \frac{1+x}{1-x} \right) &= D_x \left( \frac{2(1!)}{(1-x)^2} \right) = 2D_x \left[ (1-x)^{-2} \right] = 2(-2)(1-x)^{-3}(-1) \\ &= \frac{2(2)}{(1-x)^3} = \frac{2(2!)}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x^3 \left( \frac{1+x}{1-x} \right) &= D_x \frac{2(2!)}{(1-x)^3} = 2(2!)D_x \left[ (1-x)^{-3} \right] = 2(2!)(-3)(1-x)^{-4}(-1) \\ &= \frac{2(2!)(3)}{(1-x)^4} = \frac{2(3!)}{(1-x)^4} \end{aligned}$$

Observando las tres primeras derivadas conjeturamos que se cumple la igualdad

$$D_x^n \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}} \quad (1)$$

Probemos esta fórmula por inducción. Sólo falta verificar que esta fórmula se cumple para  $n+1$ :

$$\begin{aligned} D_x^{n+1} \left( \frac{1+x}{1-x} \right) &= D_x \left[ D_x^n \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \right] = D_x \left[ \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}} \right] = 2n! D_x (1-x)^{-(n+1)} \\ &= 2n!(-n-1)(1-x)^{-(n+1)-1}(-1) = \frac{2(n+1)n!}{(1-x)^{n+2}} = \frac{2(n+1)!}{(1-x)^{n+2}} \end{aligned}$$

Luego, (1) se cumple para todo  $n$  natural.

**PROBLEMA 6.** Si  $y = f(u)$  y  $u = g(x)$  tienen derivadas de segundo orden, probar que:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{du^2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{du} \frac{d^2 u}{dx^2}$$

**Solución**

A la igualdad de la regla de la cadena le volvemos aplicar la misma regla:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{du} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{d}{dx} \frac{dy}{du} \right) \left( \frac{du}{dx} \right) + \frac{dy}{du} \left( \frac{d}{dx} \frac{du}{dx} \right) = \left( \frac{d^2 y}{du^2} \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{du}{dx} \right) + \frac{dy}{du} \frac{d^2 u}{dx^2} \\
 &= \frac{d^2 y}{du^2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{du} \frac{d^2 u}{dx^2}
 \end{aligned}$$

**PROBLEMA 7.** Si  $y = f(u)$  y  $u = g(x)$  tienen derivadas de tercer orden, probar que:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d^3 y}{du^3} \left( \frac{du}{dx} \right)^3 + 3 \frac{d^2 y}{du^2} \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{du}{dx} + \frac{dy}{du} \frac{d^3 u}{dx^3}$$

**Solución**

A la igualdad del problema anterior volvemos aplicar la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^3 y}{dx^3} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{du^2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{du} \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \\
 &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{du^2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right) + \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{du} \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \\
 &= \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{du^2} \right) \right) \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{d^2 y}{du^2} \frac{d}{dx} \left( \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right) + \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{du} \right) \right) \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \frac{dy}{du} \frac{d^3 u}{dx^3} \\
 &= \left( \frac{d^3 y}{du^3} \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{d^2 y}{du^2} \left( 2 \frac{du}{dx} \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \left( \frac{d^2 y}{du^2} \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right) + \frac{dy}{du} \frac{d^3 u}{dx^3} \\
 &= \frac{d^3 y}{du^3} \left( \frac{du}{dx} \right)^3 + 3 \frac{d^2 y}{du^2} \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{du}{dx} + \frac{dy}{du} \frac{d^3 u}{dx^3}
 \end{aligned}$$

**PROBLEMAS PROPUESTOS 7.4**

En los problemas del 1 al 6 hallar  $y''$ .

1.  $y = \sqrt{b^2 - x^2}$

2.  $y = \ln \sqrt[3]{1 + x^2}$

3.  $y = (1 + x^2) \tan^{-1} x$

$$4. y = \sqrt{1-x^2} \operatorname{sen}^{-1}x \quad 5. y = e^{\sqrt{x}} \quad 6. y = (\operatorname{sen}^{-1}x)^2$$

*En los problemas del 7 al 14 hallar las derivadas de segundo y tercer orden.*

$$7. y = x^5 - 4x^3 - 2x + 2 \quad 8. z = \frac{1}{4}x^8 - \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{2}x^2 \quad 9. f(x) = (x-1)^4$$

$$10. g(x) = (x^2 + 1)^3 \quad 11. y = \sqrt{x} \quad 12. h(x) = \frac{x}{2+x}$$

$$13. y = x \operatorname{sen} x \quad 14. y = x^3 e^{2x}$$

*En los problemas del 15 al 20 hallar  $y''$ .*

$$15. xy = 1 \quad 16. y^2 = 4ax \quad 17. x^3 + y^3 = 1$$

$$18. x^2 = y^3 \quad 19. \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \quad 20. b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \quad a \text{ y } b \text{ constantes}$$

$$21. \text{Probar que la función } y = x^4 + x^3 \text{ satisface la ecuación } 2xy' - x^2y'' = -4x^4$$

$$22. \text{Probar que la función } y = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2) \text{ satisface la ecuación } 2yy'' - 2y' = x^2$$

$$23. \text{Probar que la función } y = \frac{x^4}{4} - \frac{a}{x} + b, \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son constantes, satisface la ecuación}$$

$$\frac{1}{6}x^4y''' - x^3y'' + 2x^2y' = 5a$$

*En los problemas del 24 al 38 hallar la derivada de orden  $n$  de la función dada.*

$$24. y = x^n \quad 25. y = x^{n-1} \quad 26. y = x^{n+1}$$

$$27. y = ax^n \quad 28. y = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \quad 29. y = (ax + b)^n$$

$$30. y = \frac{1}{x} \quad 31. y = \frac{1}{1-x} \quad 32. y = \frac{1}{x-a}$$

$$33. y = \cos ax \quad 34. y = \operatorname{sen}^2x \quad 35. y = e^{ax}$$

$$36. y = xe^x \quad 37. y = x \ln x \quad 38. y = \ln(1+x)$$

*En los problemas del 39 al 42 hallar  $y''$  para los valores indicados.*

$$39. y = (2-x^2)^4; \quad x = 1$$

$$40. y = x\sqrt{x^2+3}; \quad x = -1$$

41.  $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}; x = 1$

42.  $x^2 + 2y^2 = 6; x = 2, y = 1$

*En los problemas 43 y 44 se da la función de posición, con las unidades en metros y segundos. Contestar las siguientes preguntas:*

- a. ¿En qué instantes la velocidad es 0?
- b. ¿En qué instantes la aceleración es 0?
- c. ¿Cuándo el objeto se mueve a la derecha?
- d. ¿Cuándo el objeto se mueve a la izquierda?

43.  $s = t^3 - 3t^2 - 24t + 8$

44.  $s = t^2 + \frac{54}{t}$

*En los problemas 45 y 46 se da la función de posición, con las unidades en metros y segundos. Hallar la aceleración en los puntos donde la velocidad es nula.*

45.  $s = \frac{5+t^2}{2+t}$

46.  $s = \sqrt{2t} + \frac{1}{\sqrt{2t}}$

47. Un objeto se mueve en línea recta de acuerdo a la función  $s = t^3 - 3t^2 - 24t + 8$ . Hallar su velocidad en los instantes donde la aceleración es nula.

48. Una roca es lanzada hacia arriba desde la parte superior de una torre. La posición de la roca después de  $t$  segundos es  $s = -16t^2 + 48t + 160$  pies.

- a. ¿Cuál es la altura de la torre?
- b. ¿Cuál es la velocidad inicial de la roca?
- c. ¿Cuándo alcanza la altura máxima?
- d. ¿Cuándo alcanza el suelo?
- e. ¿A qué velocidad alcanza el suelo?

49. Si un proyectil es disparado desde el suelo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial  $v_0$ , la altura del proyectil, después de  $t$  segundos, está dada por

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t.$$

- a. Probar que el proyectil alcanza su máxima altura cuando  $t = v_0/g$ .
- b. Probar que la altura máxima es  $s = v_0^2/2g$ .

50. ¿Con qué velocidad inicial  $v_0$  debe dispararse un proyectil desde el suelo verticalmente hacia arriba para que alcance una altura máxima de 705.6 metros? Sugerencia: Ver el problema 49.

51. Desde lo alto de un acantilado es lanzada una piedra verticalmente hacia abajo, en dirección al mar, con una velocidad inicial  $v_0$ . Si el sentido positivo es hacia abajo, la posición de la roca después de  $t$  segundos es  $s = 4.9t^2 + v_0t$  metros. La roca llega al agua después de 4 segundos y con una velocidad de 58.8 m/seg. Hallar la altura del acantilado.

52. Desde lo alto de un acantilado se dejan caer dos rocas (velocidad inicial nula), una tras otra con 3 segundos de diferencia. Probar que las rocas se separan con una velocidad de 3g metros por segundo.

## SECCION 7.5

## FUNCIONES HIPERBOLICAS Y SUS INVERSAS

Las **funciones hiperbólicas** se definen en términos de la función exponencial.

Estas funciones están relacionadas con la hipérbola:  $x^2 - y^2 = 1$ , de donde derivan su nombre. Las funciones, al igual que las trigonométricas, son seis:

- |                                |                                    |
|--------------------------------|------------------------------------|
| 1. seno hiperbólico (sinh)     | 2. coseno hiperbólico (cosh)       |
| 3. tangente hiperbólica (tanh) | 4. cotangente hiperbólica (coth)   |
| 5. secante hiperbólica (sech)  | 6. cosecante hiperbólica (cosech). |

**DEFINICION.** 1.  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

2.  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

3.  $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

4.  $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

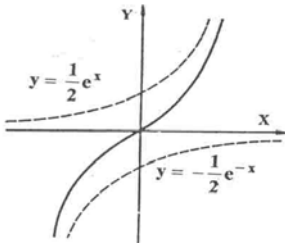
5.  $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$

6.  $\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}$

Los dominios, rangos y gráficos de estas funciones son como sigue:

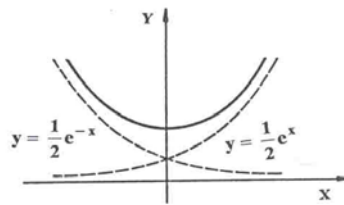
$y = \sinh x$

Dom. =  $\mathbb{R}$ , Rang. =  $\mathbb{R}$



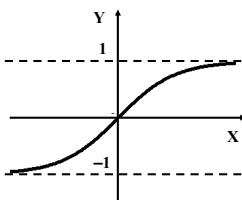
$y = \cosh x$

Dom. =  $\mathbb{R}$ , Rang. =  $[1, +\infty)$



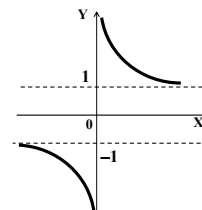
$y = \tanh x$

Dom. =  $\mathbb{R}$ , Rang. =  $(-1, 1)$



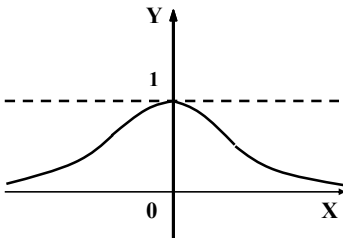
$y = \coth x$

Dom. =  $\mathbb{R} - \{0\}$ , Rang. =  $\mathbb{R} - [-1, 1]$



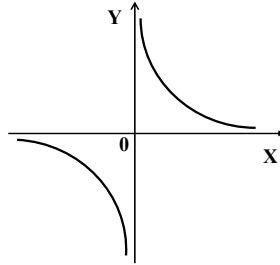
$$y = \operatorname{sech} x$$

$$\text{Dom.} = \mathbb{R}, \text{Rang.} = (0, 1]$$



$$y = \operatorname{cosech} x$$

$$\text{Dom.} = \mathbb{R} - \{0\}, \text{Rang.} = \mathbb{R} - \{0\}$$



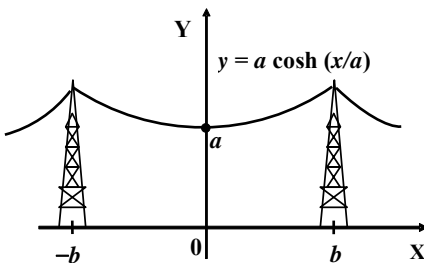
Una curva muy conocida es la **catenaria** (de catena, palabra latina que significa cadena). Esta curva es descrita mediante el coseno hiperbólico:

$$y = a \cosh (x/a).$$

La catenaria es la curva que forma un cable flexible suspendido de dos puntos a la misma altura. La ecuación de esta curva es  $y = a \cosh (x/a)$ .

El arco Gateway de San Luís, Missouri es una de las estructuras más notables y elegantes de los Estados Unidos. Da la falsa impresión que es un arco de parábola y que es más alto que ancho. En realidad es una catenaria al revés, hecha de acero inoxidable hueco, que tiene 630 pies de alto y 630 pies de ancho. Fue terminado en 1965. El arco es 75 pies más alto que el monumento a Washington y 175 pies más alto que la Estatua de la Libertad. La ecuación de este arco es

$$y = 693.86 - (68.767) \cosh (3x/299)$$



La catenaria



Arco Gateway  
San Luís, Missouri

Las funciones hiperbólicas se comportan de una manera muy similar a las funciones trigonométricas. Las siguientes identidades nos muestran parte de esta similitud.

## IDENTIDADES HIPERBOLICAS

**TEOREMA 7.3** Se cumple:

1.  $\sinh(-x) = -\sinh x$
2.  $\cosh(-x) = \cosh x$
3.  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
4.  $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
5.  $1 - \coth^2 x = -\operatorname{cosech}^2 x$
6.  $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
7.  $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$
8.  $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
9.  $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
10.  $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$
11.  $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$

**Demostración**

Estas igualdades siguen inmediatamente de la definición de las funciones hiperbólicas. Aquí sólo probaremos 3, 4 y 10. La igualdad 6 la probamos en el problema resuelto 3. Las otras, las dejamos como ejercicios al lector.

$$\begin{aligned} 3. \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{4e^x e^{-x}}{4} = 1 \end{aligned}$$

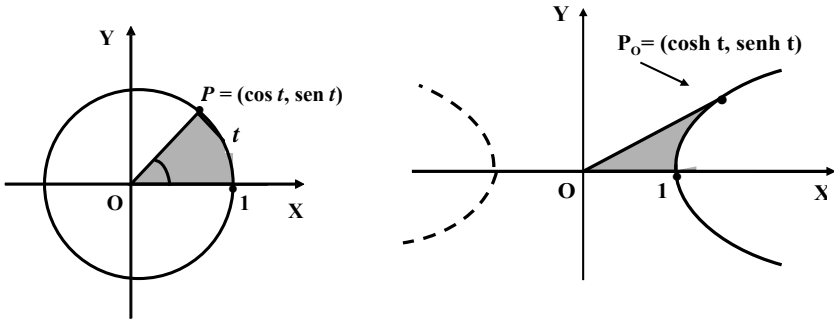
4. Si en 3 dividimos entre  $\cosh^2 x$ , obtenemos:

$$\frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x} - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \Rightarrow 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

10. De la identidad 3 obtenemos:  $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ . Reemplazando este valor de  $\cosh^2 x$  en 9:

$$\cosh(2x) = 1 + 2\sinh^2 x \Rightarrow \sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

La identidad 3 nos permite comparar las funciones trigonométricas con las hiperbólicas. Tomamos la circunferencia (círculo trigonométrico)  $x^2 + y^2 = 1$ , la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$  y un número real  $t > 0$ .



El punto  $P = (\cos t, \text{sen } t)$  se encuentra sobre el círculo trigonométrico, ya que  $\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$ . En este caso,  $t$  puede interpretarse como la medida, en radianes, del ángulo POX.

Por otro lado, el punto  $P_0 = (\cosh t, \text{senh } t)$  está sobre la hipérbola, ya que de acuerdo a la identidad 3,  $\cosh^2 t - \text{senh}^2 t = 1$ . En este caso,  $t$  no representa ningún ángulo. Sin embargo, existe una propiedad común para  $t$  en ambos casos: Se prueba que el área del sector circular determinado por  $t$  en el círculo trigonométrico es igual al área de la región sombreada en la figura de la hipérbola. Esta área común es  $A = \frac{t}{2}$ . Este resultado lo probaremos en el próximo curso.

**DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS**

**TEOREMA 7.4** Si  $u = u(x)$  es una función diferenciable de  $x$ , entonces

- 1.  $D_x \text{senh } u = \cosh u D_x u$
- 2.  $D_x \cosh u = \text{senh } u D_x u$
- 3.  $D_x \tanh u = \text{sech}^2 u D_x u$
- 4.  $D_x \coth u = -\text{cosech}^2 u D_x u$
- 5.  $D_x \text{sech } u = -\text{sech } u \tanh u D_x u$
- 6.  $D_x \text{cosech } u = -\text{cosech } u \coth u D_x u$

**Demostración**

Probamos sólo 1 y 3. Las otras se prueban en forma análoga.

$$\begin{aligned}
 1. \quad D_x \text{senh } x &= D_x \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{D_x e^x - D_x e^{-x}}{2} = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} \\
 &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad D_x \tanh x &= D_x \frac{\text{senh } x}{\cosh x} = \frac{\cosh x D_x \text{senh } x - \text{senh } x D_x \cosh x}{\cosh^2 x} \\
 &= \frac{\cosh^2 x - \text{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \text{sech}^2 x
 \end{aligned}$$

**EJEMPLO 1.** Si  $y = \ln \tanh 2x$ , hallar  $D_x y$ .

**Solución**

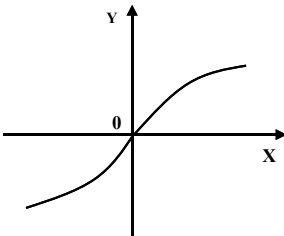
$$\begin{aligned} D_x y &= D_x (\ln \tanh 2x) = \frac{D_x \tanh 2x}{\tanh 2x} = \frac{\operatorname{sech}^2 2x D_x 2x}{\tanh 2x} = \frac{2 \operatorname{sech}^2 2x}{\tanh 2x} \\ &= 2 \operatorname{sech}^2 2x \frac{1}{\tanh 2x} = 2 \frac{1}{\cosh^2 2x} \frac{\cosh 2x}{\sinh 2x} = 2 \frac{1}{\sinh 2x \cosh 2x} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{2} \sinh 4x} = \frac{4}{\sinh 4x} = 4 \operatorname{cosech} 4x \end{aligned}$$

### FUNCIONES HIPERBOLICAS INVERSAS

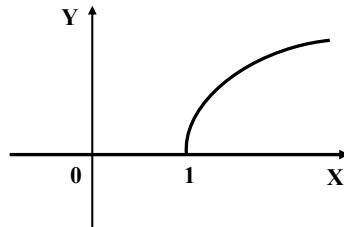
Mirando las gráficas de las funciones hiperbólicas vemos que cuatro son inyectivas. Las no inyectivas son  $y = \cosh x$  e  $y = \operatorname{sech} x$ . De estas dos funciones, restringimos sus dominio a  $[0, +\infty)$  para lograr inyectividad. De este modo, conseguimos las funciones inversas de las seis funciones hiperbólicas.

Aquí están las gráficas de estas inversas.

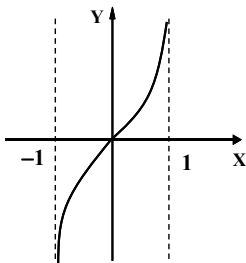
$\sinh^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



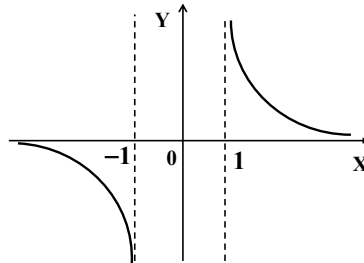
$\cosh^{-1}: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$



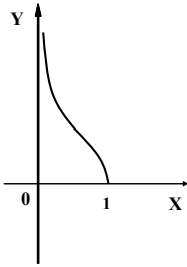
$\tanh^{-1}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$



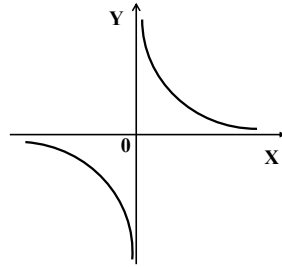
$\coth^{-1}: (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$



$\operatorname{sech}^{-1}: (0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$



$\operatorname{cosech}^{-1}: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$



El siguiente teorema nos presenta a las funciones hiperbólicas inversas en términos de la función logaritmo natural.

**TEOREMA 7.5**

1.  $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

2.  $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1$

3.  $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, |x| < 1$

4.  $\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, |x| > 1$

5.  $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}, 0 < x \leq 1$

6.  $\operatorname{cosech}^{-1} x = \ln \left( \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|} \right), x \neq 0$

**Demostración**

Ver el problema resuelto 5.

**DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS INVERSAS**

**TEOREMA 7.6** Si  $u = u(x)$  es una función diferenciable de  $x$ , entonces

1.  $D_x \sinh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} D_x u$

2.  $D_x \cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} D_x u$

3.  $D_x \tanh^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} D_x u$

4.  $D_x \coth^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} D_x u$

5.  $D_x \operatorname{sech}^{-1} u = - \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} D_x u$

6.  $D_x \operatorname{cosech}^{-1} u = - \frac{1}{|u| \sqrt{1+u^2}} D_x u$

**Demostración**

Probaremos sólo 1, las otras se dejan como ejercicio para el lector.

1. Lo haremos de 2 formas.

**Método 1**

Si  $y = \sinh^{-1}x$ , entonces  $x = \sinh y$ .

Derivamos implícitamente respecto a  $x$  esta última igualdad:

$$D_x x = D_x \sinh y \Rightarrow 1 = \cosh y D_x y \Rightarrow D_x y = \frac{1}{\cosh y} \Rightarrow$$

$$D_x \sinh^{-1}x = \frac{1}{\cosh y} \quad (\mathbf{a})$$

Por otro lado, de la identidad  $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$  y de  $\cosh y \geq 0$  obtenemos:

$$\cosh y = \sqrt{1 + \sinh^2 y} = \sqrt{1 + x^2}$$

Reemplazando este valor en (a) obtenemos lo deseado:

$$D_x \sinh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

**Método 2**

De acuerdo a la igualdad 1 del teorema 7.5:

$$\begin{aligned} D_x \sinh^{-1}x &= D_x \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} D_x\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 2.** Si  $y = \operatorname{sech}^{-1}(\cos x)$ , hallar  $D_x y$ .

**Solución**

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x \operatorname{sech}^{-1}(\cos x) = - \frac{1}{\cos x \sqrt{1 - \cos^2 x}} D_x \cos x \\ &= - \frac{1}{\cos x \sqrt{\sin^2 x}} (-\sin x) = \frac{1}{\cos x} = \sec x \end{aligned}$$

## PROBLEMAS RESUELTOS 7.5

**PROBLEMA 1.** Hallar la derivada de:

a.  $y = \tanh^{-1}(\tan x)$                       b.  $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \coth^{-1} x + \frac{x}{2}$

**Solución**

a.  $D_x y = \frac{1}{1 - \tan^2 x} \sec^2 x = \frac{1}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{\cos 2x} = \sec 2x$

b.  $D_x y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \frac{1}{1 - x^2} + x \coth^{-1} x + \frac{1}{2}$   
 $= -\frac{1}{2} + x \coth^{-1} x + \frac{1}{2} = x \coth^{-1} x$

**PROBLEMA 2.** Una línea eléctrica se sostiene sobre dos postes que están a 30 m. de distancia uno del otro. El cable toma la forma de la catenaria

$$f(x) = 25 \cosh(x/25) - 13$$

a. Hallar pendiente de la curva en el punto donde se encuentra con el poste derecho.

b. Hallar el ángulo  $\theta$  que forma la línea eléctrica con el poste.

**Solución**

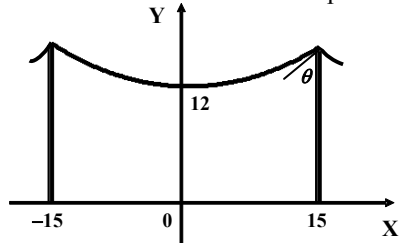
a. Se tiene que:

$$f'(x) = 25 \sinh(x/25) \frac{1}{25} = \sinh(x/25)$$

La pendiente en el punto indicado es:

$$m = f'(15) = \sinh(15/25)$$

$$= \sinh(0.6) = \frac{e^{0.6} - e^{-0.6}}{2} = 0.6367$$

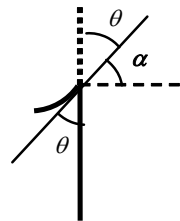


b. Si  $\alpha$  es el ángulo de inclinación de la recta tangente en el punto indicado, entonces

$$\alpha = \tan^{-1}(0.6367) = 0.567 \text{ rad.} = \frac{180}{\pi}(0.567) = 32.48^\circ$$

Luego, el ángulo que forma la curva con el poste es:

$$\theta = 90^\circ - 32.48^\circ = 57.52^\circ$$



**PROBLEMA 3.** Probar las siguientes identidades:

- a.  $\cosh x + \sinh x = e^x$       b.  $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$   
 c.  $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

**Solución**

$$\text{a. } \cosh x + \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2e^x}{2} = e^x$$

$$\text{b. } \cosh x - \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2e^{-x}}{2} = e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \sinh(x+y) &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \frac{1}{2} [e^x e^y - e^{-x} e^{-y}] \\ &= \frac{1}{2} [(\cosh x + \sinh x)(\cosh y + \sinh y) \\ &\quad - (\cosh x - \sinh x)(\cosh y - \sinh y)] \\ &= \frac{1}{2} [2\sinh x \cosh y + 2\cosh x \sinh y] \\ &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \end{aligned}$$

**PROBLEMA 4.** Probar las igualdades dadas en el teorema 7.5:

$$1. \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad 2. \cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$$

$$3. \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1 \quad 4. \coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1$$

$$5. \operatorname{sech}^{-1} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x}, \quad 0 < x < 1 \quad 6. \operatorname{cosech}^{-1} x = \ln \left( \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \right), \quad x \neq 0$$

**Solución**

Probamos 1, 3 y 6. Las otras tres se resuelven de manera análoga.

1. Sea  $y = \sinh x$ . Luego,  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ . Despejamos  $x$  en términos de  $y$ :

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Rightarrow e^{2x} - 1 = 2ye^x \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

Resolvemos esta ecuación de segundo grado:

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Como,  $\sqrt{y^2 + 1} > y$ , tenemos  $y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$ ,  $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$ .

Como  $e^x > 0$ , escogemos la raíz positiva. Esto es,  $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ .

Tomando logaritmo:  $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$

Cambiando de variables:  $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

3. Sea  $y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{(e^x - e^{-x})/2}{(e^x + e^{-x})/2} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

Despejamos  $x$  en términos de  $y$ :

$$y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \Rightarrow e^{2x} - 1 = y(e^{2x} + 1) \Rightarrow e^{2x} - 1 = ye^{2x} + y \Rightarrow$$

$$e^{2x} - ye^{2x} = 1 + y \Rightarrow e^{2x}(1 - y) = 1 + y \Rightarrow e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y}$$

Tomando logaritmo y luego, cambiando de variables:

$$2x = \ln \frac{1 + y}{1 - y} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

6. Sea  $y = \operatorname{cosech} x$ . Luego,

$$y = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{(e^x - e^{-x})/2} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$$

Despejamos  $x$  en términos de  $y$ :

$$y = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} \Rightarrow y(e^{2x} - 1) = 2e^x \Rightarrow ye^{2x} - 2e^x - y = 0 \Rightarrow$$

$$e^x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4y^2}}{2y} \Rightarrow e^x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + y^2}}{y}$$

Como  $e^x > 0$ , debemos escoger el valor positivo de  $\frac{1 \pm \sqrt{1 + y^2}}{y}$ . Para esto, analizamos dos casos:  $y < 0$ ,  $y > 0$

Si  $y < 0$ , el cociente  $\frac{1 \pm \sqrt{1 + y^2}}{y}$  es positivo si el numerador es negativo, y esto

sucede cuando tomamos como numerador a  $1 - \sqrt{1 + y^2}$ . Luego,

$$e^x = \frac{1 - \sqrt{1 + y^2}}{y} = \frac{1}{y} - \frac{\sqrt{1 + y^2}}{y} = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1 + y^2}}{-y} = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1 + y^2}}{|y|}$$

Si  $y > 0$ , el cociente  $\frac{1 \pm \sqrt{1+y^2}}{y}$  es positivo si el numerador es positivo, y esto

sucede cuando tomamos como numerador a  $1 + \sqrt{1+y^2}$ . Luego,

$$e^x = \frac{1 + \sqrt{1+y^2}}{y} = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{y} = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{|y|}$$

En cualquiera de los dos casos hemos conseguido que:

$$e^x = \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1+y^2}}{|y|}$$

Tomando logaritmo y cambiando de variables, obtenemos que

$$y = \ln \left( \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} \right)$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 7.5

*En los problemas del 1 al 10, hallar la derivada  $y' = D_x y$  de la función dada.*

1.  $y = \tanh^{-1}(\cosh x)$

2.  $y = e^{\sinh 2x}$

3.  $y = x^{\tanh x}$ ,  $x > 0$

4.  $y = \frac{1}{2} \tanh \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \tanh^3 \frac{x}{2}$

5.  $y = e^{ax} \cosh bx$

6.  $y = 4 \sqrt{\frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}}$

7.  $y = (\operatorname{cosech}^{-1} x)^2$

8.  $y = \sinh^{-1} \frac{x^2}{a^2}$

9.  $y = \tanh^{-1}(\sec x)$

10.  $y = \tan^{-1} x + \tanh^{-1} x$

11. Probar las siguientes identidades dadas en el teorema 4.3:

a.  $\sinh(-x) = -\sinh x$     b.  $\cosh(-x) = \cosh x$     c.  $1 - \coth^2 x = -\operatorname{cosech}^2 x$

d.  $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

12. Probar las identidades:

a.  $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$

b.  $\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$

c.  $\cosh x + \cosh y = 2\cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$

d.  $\sinh x + \sinh y = 2\sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2}$

e.  $\cosh x - \cosh y = 2\sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$

f.  $\sinh 3x = 3 \sinh x + 4 \sinh^3 x$

13. Probar las igualdades 2, 3, 4, 5 y 6 del teorema 7.6.

**SECCION 7.6**

**RAZON DE CAMBIO**

Razón de cambio es otro nombre que se le da a la derivada cuando ésta es vista como el límite de un cociente (razón) incremental. Por definición, si  $x_0$  es un punto del dominio de la función  $y = f(x)$ , entonces

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ donde } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ y } \Delta x = x - x_0$$

El incremento  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  mide el cambio experimentado por  $y = f(x)$  cuando cambia de  $x_0$  a  $x_0 + \Delta x$ . El cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

es la razón de cambio promedio de  $y$  respecto a  $x$ , cuando  $x$  cambia de  $x_0$  a  $x_0 + \Delta x$ . El límite de este cambio promedio cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  es la razón de cambio instantáneo de  $y$  respecto a  $x$  en  $x_0$ . Pero éste no es otra cosa que la derivada  $f'(x_0)$ . En resumen:

**Si  $y = f(x)$ , la razón de cambio (instantánea) de  $y$  respecto a  $x$  en  $x_0$  es  $f'(x_0)$ .**

Esta nueva interpretación de la derivada como una razón de cambio amplía el panorama de sus aplicaciones. El mundo en que vivimos es un mundo dinámico y cambiante. La población aumenta, los recursos naturales disminuyen, la inflación baja o sube, la producción baja o sube, etc. De estos fenómenos, que pueden ser cuantificados mediante una función, es importante conocer su correspondiente razón de cambio. Así, a un ingeniero le interesa saber la razón con que sale el agua de una represa; a un demógrafo o biólogo le interesa saber la tasa de crecimiento de una población (humana o de insectos); etc. Conocemos ya dos razones de cambio: la velocidad y la aceleración. La velocidad es la razón de cambio de la distancia respecto al tiempo y la aceleración es la razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo.

**EJEMPLO 1.** Sea  $V$  el volumen de un cubo de  $x$  cm. de arista. Esto es  $V = x^3$ .

a. Hallar la razón de cambio promedio de  $V$  cuando  $x$  cambia de 5 a 5.1

b. Hallar la razón de cambio de  $V$  cuando  $x = 5$ .

**Solución**

a. Tenemos que  $x_0 = 5$ ,  $\Delta x = 5.1 - 5 = 0.1$ . Luego,

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}{\Delta x} = \frac{V(5 + 0.1) - V(5)}{0.1} = \frac{(5.1)^3 - 5^3}{0.1} = 76.51 \text{ cm}^3$$

b. Nos piden  $V'(5)$ .

$$V'(5) = 3x^2 \Rightarrow V'(5) = 3(5)^2 = 75 \text{ cm}^3$$

En Economía se usa el término **marginal** para referirse a la razón de cambio. Así, el costo marginal es la razón de cambio (derivada) de la función costo.

**EJEMPLO 2.** Una empresa estima que el costo de producir  $x$  artículos es

$$C(x) = 0.5x^2 + 6x + 2000$$

a. Hallar la función costo marginal.

b. Hallar el costo marginal al nivel de producción de 100 artículos.

**Solución**

a.  $C'(x) = x + 6$

b.  $C'(100) = 100 + 6 = 106$

## RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS

Supongamos que tenemos dos variables  $x$  e  $y$ , que son, ambas, funciones del tiempo:  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$  y que estas variables estén relacionadas mediante una ecuación  $F(x, y) = 0$ . Derivando implícitamente esta ecuación respecto al tiempo, se

obtiene otra ecuación que relaciona las razones de cambio  $\frac{dx}{dt}$  y  $\frac{dy}{dt}$ . Por este motivo

diremos que  $\frac{dx}{dt}$  y  $\frac{dy}{dt}$  son **razones de cambio relacionadas**. En esta situación, si se conoce una de ellas, es posible encontrar la otra.

### ESTRATEGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS

Se sugiere los siguientes pasos en la solución de un problema de razones de cambio relacionadas. Estos pasos pueden tener variaciones ocasionales.

- Paso 1.** Construir una figura que ilustre el problema, indicando las constantes y las variables.
- Paso 2.** Identificar la información que se pide. Además, escribir los datos que se proporcionan.
- Paso 3.** Escribir las ecuaciones que relacionan a las variables y las constantes.
- Paso 4.** Derive (implícitamente) la ecuación hallada en el paso 3.
- Paso 5.** Sustitúyase, en la ecuación que resulta al derivar, todos los datos pertinentes al momento particular para el que se pide la respuesta.

**EJEMPLO 3.**

Una bailarina de ballet de 1.60 m. de estatura se encuentra ensayando en una habitación que está alumbrada por un foco colocado en el centro a 4 m. de altura. Si en determinado instante la bailarina se aleja del centro a razón de 45 m/min. ¿A razón de cuántos metros por minuto crece su sombra en ese instante?

**Solución**

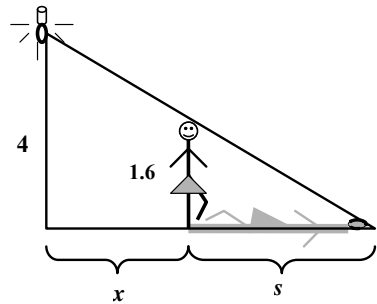
**Paso 1.** Construcción de una figura.

**Paso 2.** Identificar la información que se pide.  
 Sea  $t_0$  el instante en el que la bailarina se aleja a 45 m/min. O sea cuando

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0} = 45 \text{ m/min.}$$

Se pide hallar  $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=t_0}$ , donde  $s$  es la

longitud de la sombra.



**Paso 3.** Por semejanza de triángulos se tiene que

$$\frac{s}{s+x} = \frac{1.6}{4} \Rightarrow s = \frac{2}{3}x \quad (1)$$

**Paso 4.** Derivamos la ecuación (1):  $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3} \frac{dx}{dt}$

**Paso 5.** En la ecuación anterior, tomando  $t = t_0$  se tiene:

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{2}{3} \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0} \Rightarrow \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{2}{3} (45 \text{ m/min}) = 30 \text{ m/min}$$

Esto es, en el instante  $t_0$ , la sombra crece a razón de 30 m/min

En la práctica, los 5 pasos enunciados anteriormente, no se especifican, quedando sobreentendidos.

**EJEMPLO 4.** Los extremos de una escalera de 5 m de longitud están apoyados sobre una pared vertical y sobre un piso horizontal. Si al empujarla por la base se logra que ésta se aleje de la pared a razón de 20 m/seg. ¿Con que rapidez baja el extremo superior de la escalera cuando la base está a 3 m de la pared?

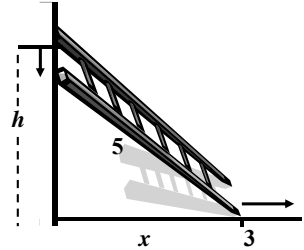
**Solución**

Sea  $x$  la distancia de la pared al extremo inferior de la escalera.

Sea  $h$  la altura desde el suelo al extremo superior de la escalera.

Nos piden hallar la rapidez con que baja el extremo superior de la escalera cuando la base está a 3 m de la pared. En otros términos, nos piden la razón de cambio de  $h$  respecto al tiempo cuando  $x = 3$ . Es decir, nos piden:

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{x=3}$$



Como dato nos dan la razón con que la base de la escalera se aleja de la pared. Es decir, nos dan

$$\frac{dx}{dt} = 20/\text{seg}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$h^2 + x^2 = 5^2 \quad (1)$$

Derivamos implícitamente esta ecuación respecto a  $t$ . En la ecuación resultante, sustituimos los datos que son válidos para el momento en que  $x = 3$ .

$$2h \frac{dh}{dt} + 2x \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dh}{dt} = - \frac{x}{h} \frac{dx}{dt} \quad (2)$$

Pero,  $\frac{dx}{dt} = 20$  m/seg. Además, cuando  $x = 3$ , de (1) se tiene que

$$h = \sqrt{5^2 - x^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

Reemplazando estos valores en (2):

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{x=3} = - \frac{3}{4} (20 \text{ m/seg}) = -15 \text{ m/seg.}$$

**EJEMPLO 5.** Un avión vuela horizontalmente a una altura constante de 4 Km. y a una velocidad constante de 300 Km/hora. La trayectoria pasa por una estación de radar desde donde el operador observa al avión. Hallar la velocidad con que cambia el ángulo de inclinación  $\theta$  de la línea de observación en el instante en que la distancia horizontal del avión a la estación de radar es de 3 Km.

**Solución**

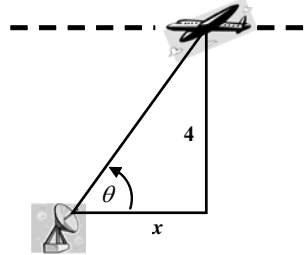
Sea  $x$  la distancia horizontal del avión al radar.

Se tiene que:

$$\cot \theta = \frac{x}{4}, \text{ o bien } \theta = \cot^{-1}(x/4)$$

Derivando respecto a  $t$ :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{1+(x/4)^2} \left( \frac{1}{4} \right) \frac{dx}{dt} = \frac{-4}{16+x^2} \frac{dx}{dt}$$



Nos dicen que  $\frac{dx}{dt} = -300$  Km/h, donde el signo negativo significa que la distancia  $x$  es decreciente.

Ahora, cuando  $x = 3$ :

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{x=3} = \frac{-4}{16+3^2} (-300) = 48 \text{ rad/h}$$

**PROBLEMAS RESUELTOS 7.6**

**PROBLEMA 1.** Un barco navega con dirección norte a razón de 12 Km/h. Otro barco navega con dirección Este a 16 Km/h. El primero pasa por la intersección de las trayectorias a las 3:30 P. M. y el segundo a las 4 P. M. ¿Cómo está cambiando la distancia entre los barcos,

a. A las 3:30 P. M.?

b. A las 5 P. M.?

**Solución**

Comenzamos a computar el tiempo desde el instante en que el segundo barco pasa por la intersección de las trayectorias. Esto es,  $t = 0$  a las 4 PM. En este instante el primer barco se encuentra a  $12(1/2) = 6$  Km. al norte de la intersección. Después de transcurrir  $t$  horas el primer barco se encuentra a  $6 + 12t$  Km. de la intersección, y el segundo a  $16t$  Km.

Sea  $d(t)$  la distancia entre los barcos  $t$  horas después de las 4 P. M. Se tiene que a las 3:30 P. M,

$$t = -\frac{1}{2} \text{ y a las 5 P. M, } t = 1.$$

Se pide hallar:

a.  $d'(-1/2)$     y    b.  $d'(1)$

Por Pitágoras se tiene que:

$$d^2(t) = (6 + 12t)^2 + (16t)^2 \Rightarrow$$

$$d^2(t) = 400t^2 + 144t + 36$$

Derivando la última ecuación con respecto al tiempo  $t$ :

$$2d(t)d'(t) = 800t + 144 \Rightarrow d'(t) = \frac{400t + 72}{\sqrt{400t^2 + 144t + 36}}$$

a. Ahora, a las 3:30 PM.  $t = -\frac{1}{2}$ . Luego

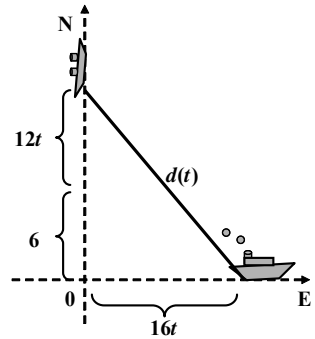
$$d'(-1/2) = \frac{400(-1/2) + 72}{\sqrt{400(-1/2)^2 + 144(-1/2) + 36}} = -16 \text{ Km/h.}$$

Esto es, a las 3:30 PM. la distancia entre los barcos está cambiando a razón de  $-16$  Km/h. (el signo negativo significa que en el instante dado la distancia está decreciendo).

b. A las 5 P. M.  $t = 1$ . Luego,

$$d'(1) = \frac{400(1) + 72}{\sqrt{400(1)^2 + 144(1) + 36}} = 19.60 \text{ Km/h.}$$

A las 5 P. M. la distancia entre los barcos está cambiando a razón de 19.60 Km/h.



**PROBLEMA 2.**

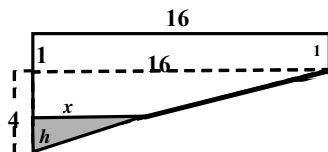
Una piscina tiene 16 m. de largo, 12 m. de ancho y una profundidad de 1 m. en un extremo y 5 m. en el otro, teniendo como fondo un plano inclinado. Se vierte agua en la piscina a razón de  $4 \text{ m}^3/\text{min}$ . ¿Con qué velocidad se eleva el nivel del agua cuando éste es de 1 m. en el extremo más profundo?

**Solución**

Sea  $h$  el nivel del agua y sea  $x$  el largo de la superficie del agua cuando está a nivel  $h$ .

Se pide encontrar

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=1}$$

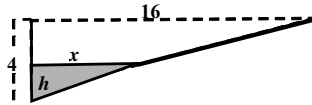


Además, si  $V$  es el volumen del agua en la piscina, nos dicen que éste está creciendo a razón de  $4 \text{ m}^3/\text{min}$ . Esto es, nos dicen que

$$\frac{dV}{dt} = 4 \text{ m}^3/\text{min}.$$

Bien, por semejanza de triángulos:

$$\frac{x}{16} = \frac{h}{4} \Rightarrow x = 4h \quad (1)$$



Por otro lado, el volumen del agua de la piscina es:

$$V = \frac{xh}{2}(12) = 6xh$$

Reemplazando (1) en esta igualdad:  $V = 24h^2$

Derivando esta ecuación respecto a  $t$ :  $\frac{dV}{dt} = 48h \frac{dh}{dt}$

Recordando que  $\frac{dV}{dt} = 4 \text{ m}^3/\text{min}$ . y particularizándola para  $h = 1$ , se tiene:

$$4 = 48(1) \left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=1} \Rightarrow \left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=1} = \frac{1}{12}$$

El nivel del agua, cuando éste está a 1 m. de altura, crece a razón de  $1/12 \text{ m}/\text{min}$ .

**PROBLEMA 3.** Un ciclista está corriendo en una pista circular a razón de  $360 \text{ m}/\text{min}$ . En el centro de la pista alumbran un foco el cual proyecta la sombra del ciclista sobre una pared que es tangente a la pista en un punto  $P$ . ¿Con qué velocidad se mueve la sombra en el instante en que el ciclista ha recorrido  $1/12$  de la pista desde  $P$ ?

**Solución**

Sean:

$r$  = el radio de la pista

$s$  = la longitud del recorrido del ciclista a partir del punto  $P$ .

$S$  = la longitud del recorrido de la sombra sobre la pared.

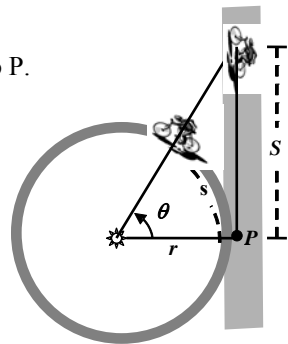
Nos piden  $\frac{dS}{dt}$  cuando  $s = \frac{1}{12}$  de la pista desde  $P$ ,

y nos dicen que  $\frac{ds}{dt} = 360 \text{ m}/\text{min}$ .

Se tiene que:

$$\theta = \frac{s}{r} \text{ radianes}, \quad S = r \tan \theta \Rightarrow S = r \tan \left( \frac{s}{r} \right)$$

Derivando la última ecuación respecto a  $t$ :



$$\frac{dS}{dt} = r \sec^2\left(\frac{s}{r}\right) \frac{d}{dt}\left(\frac{s}{r}\right) = r \left(\frac{1}{r}\right) \sec^2\left(\frac{s}{r}\right) \frac{ds}{dt} = \sec^2\left(\frac{s}{r}\right) \frac{ds}{dt} \quad (1)$$

Pero, cuando  $s = \frac{1}{12}$  de la pista desde  $P$  se tiene que:

$$s = \frac{1}{12}(2\pi r) = \frac{1}{6}\pi r \Rightarrow \frac{s}{r} = \frac{\pi}{6}$$

Luego, cuando  $s = \frac{1}{12}$  de la pista, de (1), se tiene:

$$\frac{dS}{dt} = \sec^2\left(\frac{\pi}{6}\right)(360) = (2/\sqrt{3})^2 (360 \text{ m/min}) = 480 \text{ m/min.}$$

**PROBLEMA 4.** Un abrevadero tiene 10 pies de largo y tiene por extremos dos trapecios de 4 pies de altura y bases de 4 pies y 8 pies. Se vierte agua al abrevadero a razón de 24 pies<sup>3</sup>/min. ¿Con qué rapidez crece el nivel del agua cuando el agua tiene 2 pies de profundidad?

### Solución

Sean:

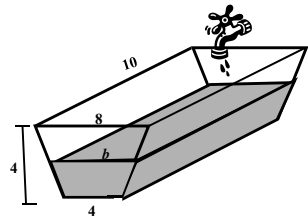
$h$  = altura del agua en el instante  $t$  ( $t$  en minutos)

$b$  = el ancho de la superficie del agua al nivel  $h$ .

$V$  = el volumen del agua cuando ésta tiene nivel  $h$ .

Nos piden  $\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=2}$

Nos dicen que  $\frac{dV}{dt} = 24$  pies<sup>3</sup>/min.

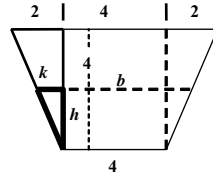


Hallemos  $V$ . Sabemos que  $V = 10A$ , donde  $A$  es el área de una cara lateral.

Como esta cara es un trapecio, se tiene

$$A = \frac{1}{2}(b+4)h \quad (1)$$

Sacamos aparte el trapecio que conforma la cara del frente, al cual lo hemos agrandado para obtener una mejor visualización. Los dos triángulos remarcados son semejantes. Luego,



$$\frac{k}{2} = \frac{h}{4} \Rightarrow k = \frac{h}{2}$$

Pero, es fácil ver que  $k = \frac{b-4}{2}$ . Luego,  $\frac{b-4}{2} = \frac{h}{2} \Rightarrow b = h + 4$

Reemplazando este valor  $b$  en (1) tenemos:  $A = \frac{1}{2}(h+4+4)h = \frac{1}{2}(h+8)h$

En consecuencia, el volumen del agua es

$$V = 10 \left( \frac{1}{2}(h+8)h \right) = 5h^2 + 40h$$

Derivando respecto a  $t$

$$\frac{dV}{dt} = (10h + 40) \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{10h + 40} \frac{dV}{dt}$$

En particular, cuando  $h = 2$

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=2} = \frac{1}{10h + 40} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{h=2} = \frac{1}{60} (24 \text{ pies}^3 / \text{min}) = 0.4 \text{ pies}^3 / \text{min}.$$

**PROBLEMA 5.** Un tanque tiene la forma de un cono invertido de 8 m de radio y 24 m. de altura. Se vierte agua al tanque a razón de 40 m<sup>3</sup>/hora. y a la vez se saca agua para regar. El nivel del agua está subiendo a razón de 4 m/hora cuando éste tiene 3 m. de altura. ¿Con qué rapidez sale el agua en ese instante?

**Solución**

Sean:

$t$  = el tiempo medido en horas.

$r$  = el radio en metros de la superficie del agua en el instante  $t$ .

$h$  = la altura del nivel del agua en el instante  $t$ .

$V$  = el volumen del agua en el instante  $t$ .

$S$  = la cantidad de agua que ha salido hasta el instante  $t$ .

Nos piden hallar  $\left. \frac{dS}{dt} \right|_{h=3}$

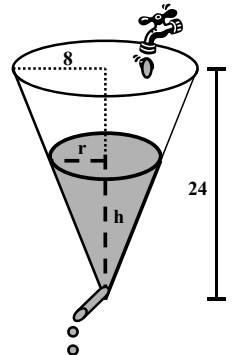
Nos dicen que  $\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=3} = 4$  m/hora.

Es claro que:

Razón de cambio de  $V$  = Razón de entrada del agua – Razón de salida

Esto es,

$$\frac{dV}{dt} = 40 - \frac{dS}{dt} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 40 - \frac{dV}{dt} \Rightarrow \left. \frac{dS}{dt} \right|_{h=3} = 40 - \left. \frac{dV}{dt} \right|_{h=3} \quad (1)$$



Pero, el volumen del agua es  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$  (2)

Por semejanza de triángulos se tiene

$$\frac{r}{s} = \frac{8}{24} \Rightarrow r = \frac{1}{3} h \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2):  $V = \frac{1}{27} \pi h^3$

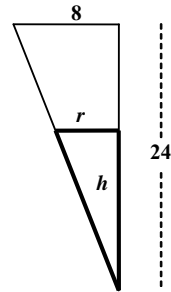
Derivando respecto a  $t$ :  $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{9} \pi h^2 \frac{dh}{dt}$

En particular, cuando  $h = 3$ , se tiene

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{h=3} = \frac{1}{9} \pi h^2 \left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=3} = \frac{1}{9} \pi (3)^2 (4 \text{ m/hora}) = 4\pi \text{ m}^3/\text{hora}$$

Reemplazando este resultado en (1):

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{h=3} = 40 - \left. \frac{dV}{dt} \right|_{h=3} = 40 - 4\pi \approx 27.43 \text{ m}^3/\text{h}.$$



### PROBLEMA 6.

Se tiene un tanque semiesférico de 5 m. de radio, que está lleno de agua. Se comienza a vaciar el tanque abriendo una pluma situada en el fondo. Por la pluma salen 3,500 litros/hora. ¿Con qué velocidad baja el nivel del agua cuando éste tiene 1.25 m. de altura? Se sabe que el volumen de un casquete esférico de altura

$h$  en una esfera de radio  $r$  es  $V = \pi r h^2 - \frac{1}{3} \pi h^3$ .

### Solución

Nos piden hallar  $\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=1.25}$

Sabemos que 3,500 litros/h = 3.5 m<sup>3</sup>/h

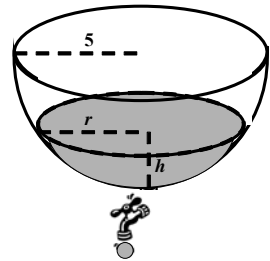
Nos dicen que  $\frac{dV}{dt}$  es constante y que

$$\frac{dV}{dt} = 3,500 \text{ litros/h} = -3.5 \text{ m}^3/\text{h}.$$

El volumen de agua, tomando en cuenta que  $r = 5$  m, es

$$V = 5\pi h^2 - \frac{1}{3} \pi h^3$$

Derivamos esta función respecto al tiempo  $t$  ( $t$  en horas)



$$\frac{dV}{dt} = 10\pi h \frac{dh}{dt} - \pi h^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi h(10-h)} \frac{dV}{dt}.$$

En esta última igualdad, particularizando para  $h = 1.25$ , tenemos:

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=1.25} = \frac{1}{\pi(1.25)(10-1.25)}(-3.5) \approx -0.1019 \text{ m/h}.$$

**PROBLEMA 7.**

Un bombillo ilumina desde el extremo superior de un poste de 48 pies de altura. Desde un punto situado a 64 pies de altura se suelta una pelota de acero, cuya trayectoria está a 15 pies de distancia del bombillo. Hallar la velocidad con que se mueve la sombra de la pelota en el instante en que ésta golpea el piso. La posición de la pelota, después de  $t$  segundos, es  $s = 16t^2$ .

**Solución**

Sea  $T$  el punto donde la pelota golpea el piso. Sea  $x$  la distancia desde el punto  $T$  a la sombra  $S$ .

La pelota golpea el suelo cuando

$$s = 64 \Rightarrow 16t^2 = 64 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = 2$$

O sea, la pelota golpea el suelo 2 seg.

después de soltarla.

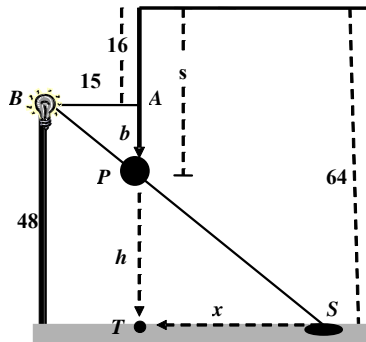
Nos piden hallar:  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=2}$

Los triángulos  $STP$  y  $BAP$  son semejantes.

Luego,  $\frac{x}{15} = \frac{h}{b} \Rightarrow x = 15 \frac{h}{b}$

Pero,  $h = 64 - s$  y  $b = s - 16$ .

En consecuencia,  $x = 15 \frac{64-s}{s-16}$



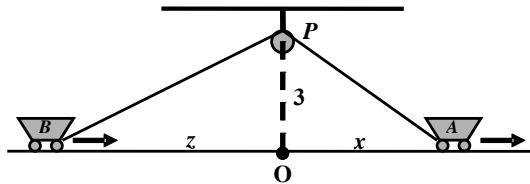
Derivando esta ecuación respecto al tiempo,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 15 \frac{(s-16) \left( -\frac{ds}{dt} \right) - (64-s) \left( \frac{ds}{dt} \right)}{(s-16)^2} = -15 \frac{48}{(s-16)^2} \frac{ds}{dt} \\ &= -15 \frac{48}{(16t^2-16)^2} (32t) = -15 \frac{48}{(16)^2 (t^2-1)^2} (32t) = -\frac{90t}{(t^2-1)^2} \end{aligned}$$

Ahora, para  $t = 2$  se tiene  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=2} = -\frac{90(2)}{(2^2 - 1)^2} = -20$  pies/seg.

**PROBLEMA 8.**

Un cable de 14 metros de longitud que pasa por una polea  $P$  y enlaza dos carritos. El punto  $O$  está en el suelo, directamente debajo de la polea  $P$  y a 3 metros de ésta. El carrito  $A$  es halado alejándolo del punto  $O$  a una velocidad de 40 m/min. ¿Con que velocidad se acerca el carrito  $B$  al punto  $O$  en el instante en que el carrito  $A$  está a 4 metros de  $O$ .

**Solución**

Sean  $x$  y  $z$  las distancias de los carritos  $A$  y  $B$  al punto  $O$ , respectivamente.

Nos dicen que  $\frac{dx}{dt} = 40$  m/min y nos piden  $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{x=4}$

Los carritos  $A$  y  $B$ , el punto  $O$  y la polea  $P$  forman dos triángulos rectángulos cuyas hipotenusas están cubiertas por el cable.

Las longitudes de las hipotenusas son  $\sqrt{z^2 + 3^2}$  y  $\sqrt{x^2 + 3^2}$ . Luego,

$$\sqrt{z^2 + 9} + \sqrt{x^2 + 9} = 14 \quad (1)$$

Derivando respecto a  $t$ :

$$\frac{2z}{2\sqrt{z^2 + 9}} \frac{dz}{dt} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -\frac{x\sqrt{z^2 + 9}}{z\sqrt{x^2 + 9}} \frac{dx}{dt} \quad (2)$$

Si  $x = 4$ , de (1) obtenemos:

$$\sqrt{z^2 + 9} + \sqrt{4^2 + 9} = 14 \Rightarrow \sqrt{z^2 + 9} + 5 = 14 \Rightarrow \sqrt{z^2 + 9} = 9 \Rightarrow z = 6\sqrt{2}$$

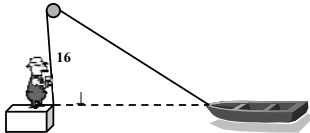
Luego, reemplazando  $x = 4$  e  $z = 6\sqrt{2}$  en (2)

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{x=4} = -\frac{4(9)}{6\sqrt{2}} (40 \text{ m/min}) = -\frac{48}{\sqrt{2}} = -24\sqrt{2} \approx -33.94 \text{ m/min}$$

El signo negativo de la velocidad anterior significa que distancia del carrito  $B$  al punto  $O$  es decreciente.

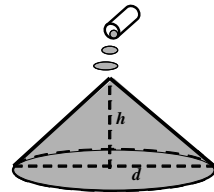
## PROBLEMAS PROPUESTOS 7.6

1. El consumo anual de gasolina de cierto país es  $C(t) = 32.8 + 0.3t + 0.15t^2$  donde  $C(t)$  es dado en millones de litros y  $t$  es dado en años computados al iniciarse el año 2004. Hallar la tasa de consumo anual al iniciarse el año 2010.
2. Se ha determinado que dentro de  $t$  años la población de una comunidad será de  $P(t) = 12 - \frac{20}{t+3}$  miles de habitantes. Hallar:
  - a. La tasa de crecimiento después de 7 años.
  - b. La tasa porcentual después de 7 años. Tasa porcentual =  $100 \frac{P'(t)}{P(t)}$ .
3. Se arroja una piedra a un estanque y produce olas circulares cuyos radios crecen a razón de 0.5 m/seg. Hallar la razón con que aumenta el área del círculo encerrado por una ola cuando el radio de ésta es de 3 m.
4. Un tanque de agua tiene la forma de un cono invertido de 15 m. de altura y 5m. de radio. Si se le está llenando de agua a razón de  $6\pi \text{ m}^3$  por minuto. ¿Con qué rapidez crece el nivel del agua cuando éste tenga 6 m. de profundidad?
5. Los extremos de una escalera de 20m. están apoyados sobre una pared vertical y un piso horizontal. Si el extremo inferior de la escalera se aleja de la pared a una velocidad de 6 m/min. ¿A qué velocidad se mueve el extremo superior cuando la parte inferior está a 12 m. de la pared?
6. Un barco navega con dirección Norte a razón de 6 Km/h. Otro barco navega con dirección Este a 8 Km/h. A las 11 A. M. el segundo barco cruzó la ruta del primero en un punto en el cual éste pasó 2 horas antes. ¿Cómo está cambiando la distancia de los barcos a las 10 A. M.?
7. Desde la parte superior de un poste de 7.2 m. alumbrado un bombillo. Un policía de 1.80 m. de altura se aleja caminando desde el poste, a una velocidad de 48 m/min. ¿Con qué velocidad crece su sombra?
8. Se estaciona un bote en el muelle halándolo con una polea que está a 16 pies encima de la cubierta del bote. Si la polea enrolla la cuerda a razón de 48 pies/min, hallar la velocidad del bote cuando quedan 20 pies de cuerda.
 


9. Una partícula se mueve sobre la parábola  $y = x^2 + 6x$ . Hallar la posición de la partícula cuando la razón de cambio de la coordenada  $y$  es 4 veces la razón de cambio de la coordenada  $x$ .
10. Cada lado de un triángulo equilátero mide  $x$  cm. y aumenta a razón de 10 cm /min. ¿Con que rapidez aumenta el área del triángulo cuando  $x = 20$  cm?

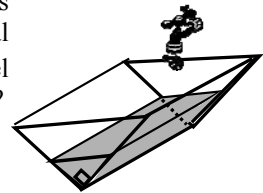
11. Las dimensiones de un cilindro circular recto están variando. En un cierto instante, el radio y la altura son 8 cm. y 20 cm., respectivamente. Si el volumen permanece constante y el radio aumenta a razón de 3 cm/seg., hallar la variación de la altura en ese instante.
12. El gas de un globo esférico se escapa a razón de 360 pies<sup>3</sup>/min. Hallar:
- La rapidez con que disminuye el radio en el instante en que éste es de 3 pies.
  - La rapidez con que disminuye el área de la superficie en el instante en que el radio es de 3 pies. Se sabe que el área de la superficie esférica es  $A = 4\pi r^2$ .
13. Sean  $V$ ,  $A$  y  $r$  el volumen, el área de la superficie y el radio de una esfera respectivamente. Probar que:  $\frac{dV}{dt} = \frac{r}{2} \frac{dA}{dt}$ . Se sabe que:  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  y  $A = 4\pi r^2$ .
14. En cada uno de los extremos de un cilindro circular recto de radio  $r$  y altura  $h$  se coloca una semiesfera de radio  $r$ . El radio aumenta a razón de 0.5 m/min. Si el volumen permanece constante, hallar la razón de variación de la altura en el instante en que  $r = 4$  m. y  $h = 6$  m.
15. Un avión vuela horizontalmente a una altura constante de 900 m. de altura y con velocidad constante. La trayectoria pasa sobre una estación de radar desde donde el operador observa el avión. Cuando el ángulo de inclinación de la línea de observación es de  $\pi/3$ , este ángulo está cambiando a razón de  $\frac{1}{45}$  rad/seg. Hallar la velocidad del avión.

16. En una planta de materiales de construcción una cinta transportadora deposita arena en el piso a razón de 3 m<sup>3</sup>/min. La arena forma un cono cuyo diámetro de la base es 3 veces la altura. Hallar con que rapidez cambia la altura del cono cuando ésta es de 2 m.

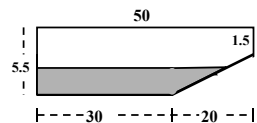


17. Un tanque tiene 5 m. de largo. Su sección transversal es un triángulo rectángulo isósceles. Se vierte agua al tanque a razón de 15 m<sup>3</sup>/hora. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando éste tiene 0.5 m. de profundidad?

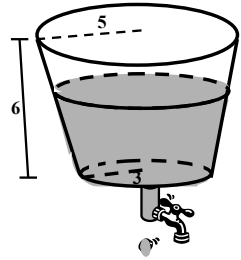
*Sugerencia: En un triángulo rectángulo isósceles, la altura correspondiente al ángulo recto es igual a la mitad de la hipotenusa.*



18. Una piscina tiene 50 m. de largo, 25 m. de ancho y su profundidad aumenta uniformemente de 1.5 m. a 5.5 m. en una distancia horizontal de 20 m., continuando horizontalmente los 30 m. restantes. La piscina se está llenando a razón de 120 m<sup>3</sup>/hora. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua en el instante en que éste está a 3 m. de la parte más profunda?

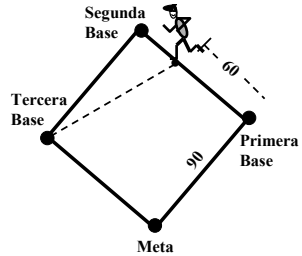


19. Un tanque tiene la forma de un cono circular recto truncado de 6 m. de altura, de 5 m. de radio mayor y 3 m. de radio menor. El tanque se está desaguando a razón de  $16.9\pi$  m<sup>3</sup>/hora. Hallar la rapidez con que baja el nivel del agua cuando éste tiene 4 m. El volumen  $V$  de un cono circular recto truncado de altura  $h$  radios  $r$  y



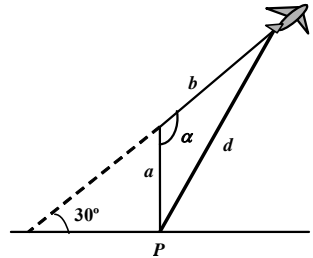
$$R \text{ en los extremos es } V = \frac{\pi}{3} h(r^2 + R^2 + rR)$$

20. Un campo de béisbol es un cuadrado de 90 pies de lado. Un jugador está corriendo de la primera base a la segunda con una velocidad de 17 pies/seg. Hallar la velocidad con que se acerca el jugador a la tercera base en el instante en que éste se encuentra a 60 pies de la primera base.



21. Un edificio de 60 m. proyecta su sombra sobre el piso horizontal. El ángulo que forman los rayos solares con el piso disminuye a razón de  $15^\circ$  por hora. En determinado instante del día la sombra del edificio es de 80 m. Hallar la razón en que cambia la sombra en ese instante.

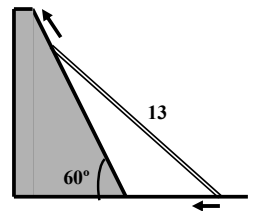
22. Un avión se eleva con un ángulo de inclinación de  $30^\circ$  y a una velocidad constante de 600 Km/hora. El avión pasa a 2 Km. por encima de un punto  $P$  en el suelo. Hallar la razón de cambio de la distancia de  $P$  al avión 1 minuto más tarde.



Sugerencia: ley de los cosenos,

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

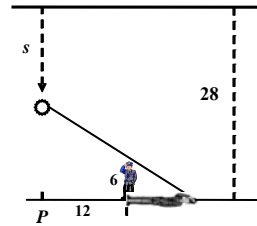
23. Una escalera de 13 m. de longitud está apoyada sobre un talud inclinado a  $60^\circ$  respecto de la horizontal. La base es empujada hacia el talud a razón de 2.9 m/seg. Hallar la rapidez con que se desplaza el extremo superior de la escalera cuando la base está a 5 m. del talud. Sugerencia: Ver la ley de los cosenos en el problema anterior.



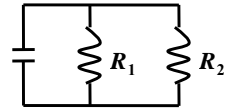
24. Un faro está situado a 2 Km. de una playa recta y su luz gira a razón de 2 revoluciones por minuto. Hallar la rapidez con que se mueve el rayo de luz a lo largo de la playa en el momento en que éste pasa por un punto situado a 1 Km. del punto frente al faro.

25. Un bombillo alumbrá desde el extremo superior de un poste de 60 pies de altura. Desde un punto situado a la misma altura se suelta una pelota de acero, cuya trayectoria está a 20 pies de distancia del bombillo. Hallar la velocidad con que se mueve la sombra 0.5 segundos después de soltarla. Recordar que la posición de la pelota, después de  $t$  segundos, es  $s = 16t^2$ .

26. Un policía de 6 pies de altura está haciendo guardia a 12 pies del punto  $P$  que está directamente debajo de una lámpara que cuelga a 28 pies sobre el suelo. La lámpara comienza a caer por lo cual la sombra del policía comienza a crecer. Se sabe que la longitud de la trayectoria de la linterna es  $s = 16t^2$  pies en  $t$  segundos. ¿Con qué velocidad crece la sombra cuando  $t = 1$  segundo?



27. Dos resistencias,  $R_1$  y  $R_2$ , están conectadas en paralelo, como indica la figura. Se sabe que la resistencia total  $R$  es tal que:
- $$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



$R_1$  cambia a razón de 0.5 Homs/seg. y  $R_2$  cambia a razón de 0.3 ohms/seg, ¿Cómo cambia  $R$  cuando  $R_1 = 60$  ohms y  $R_2 = 80$  ohms?

28. Sabiendo que un trozo de hielo esférico se derrite a una razón proporcional al área de su superficie,
- Probar que la razón con que se contrae su radio es constante.
  - Si, además se sabe que después de una hora el hielo que queda es un  $1/8$  de la cantidad inicial, hallar el tiempo que tardará en derretirse completamente. *Sugerencia: Si  $r_0$  es el radio inicial y  $\frac{dr}{dt} = k$ , entonces*

$$r = kt + r_0.$$

## SECCION 7.7

### APROXIMACIONES LINEALES Y DIFERENCIALES

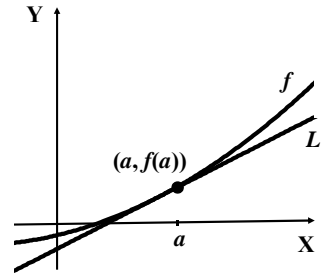
#### APROXIMACION LINEAL

Sea  $y = f(x)$  una función diferenciable en  $a$ . La recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$  tiene por ecuación:

$$L: y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Comparando la gráfica de  $f$  y la recta tangente observamos que, para los  $x$  cercanos a  $a$ , los puntos  $(x, f(x))$  de la gráfica de  $f$  están próximos a los puntos  $(x, f(a) + f'(a)(x - a))$  de la recta tangente. Por consiguiente, para los puntos  $x$  próximos a  $a$ , se cumple que:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (1)$$



A esta aproximación se le llama **aproximación lineal o aproximación tangencial de  $f$  en  $a$**  y la función lineal

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (2)$$

es la **linearización de  $f$  en  $a$** .

**EJEMPLO 1.** a. Hallar la linearización de la función  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $x = 4$

b. Usar la linearización encontrada para aproximar:

$$\sqrt{3.95} \quad \text{y} \quad \sqrt{4.02}$$

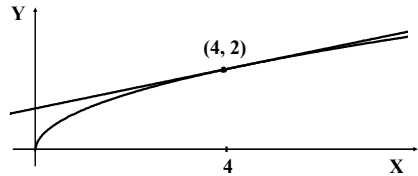
**Solución**

a. Buscamos:  $L(x) = f(4) + f'(4)(x - 4)$ .

Se tiene:

$$f(4) = \sqrt{4} = 2 \quad \text{y} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$



Luego, la linearización buscada es:

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) = \frac{x}{4} + 1$$

b. La aproximación lineal es  $\sqrt{x} \approx \frac{x}{4} + 1$ . Luego,

$$\sqrt{3.94} \approx \frac{3.94}{4} + 1 = 0.985 + 1 = 1.985$$

$$\sqrt{4.02} \approx \frac{4.02}{4} + 1 = 1.005 + 1 = 2.005$$

Mi calculadora dice que  $\sqrt{3.94} = 1.984943324$  y que  $\sqrt{4.02} = 2.004993766$

## DIFERENCIALES

Sea  $y = f(x)$  una función diferenciable. Según la notación de Leibniz, el símbolo  $\frac{dy}{dx}$  representa a la derivada de  $y$  respecto a  $x$ . Ahora introducimos el concepto de diferencial que dará significado propio tanto a  $dx$  como a  $dy$  en tal forma que  $\frac{dy}{dx}$  pueda ser vista como un cociente de  $dy$  sobre  $dx$ .

Si  $\Delta x$  es cualquier incremento de  $x$ , entonces

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (3)$$

es el correspondiente incremento de  $y$ . Sabemos que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Luego, si  $\Delta x$  es pequeño, la razón incremental  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  es una aproximación a la

derivada  $f'(x)$ . Este hecho lo expresamos así  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$ . De aquí obtenemos:

$$\Delta y \approx f'(x) \Delta x \quad (4)$$

Esta expresión nos dice que cuando  $\Delta x$  es pequeño, la expresión  $f'(x)\Delta x$  está próximo al incremento de  $\Delta y$ . Por este motivo es conveniente fijar la atención en esta expresión. A continuación le damos un nombre y nos ocupamos de ella.

**DEFINICION.** Sea  $y = f(x)$  una función diferenciable y  $\Delta x$  un incremento de  $x$ . Llamaremos:

**a. Diferencial de  $x$** , denotada por  $dx$ , es el incremento  $\Delta x$ . Esto es,

$$dx = \Delta x$$

**b. Diferencial de  $y$** , denotada por  $dy$  o  $df$ , a

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

Notar que  $dy$  es función de dos variables,  $x$  y  $\Delta x$ .

**EJEMPLO 2.** Si  $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ , hallar

**a.**  $dy$                       **b.** Evaluar  $dy$  cuando  $x = 2$  y  $dx = 0.03$

**Solución**

**a.**  $dy = \frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + x + 3)dx = (3x^2 - 4x + 1)dx$

**b.** Cuando  $x = 2$  y  $dx = 0.03$ , se tiene

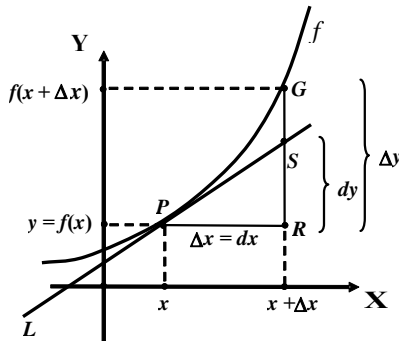
$$dy = [3(2)^2 - 4(2) + 1](0.03) = 0.15$$


---

**OBSERVACION.** Si en  $dy = f'(x)dx$  exigimos que  $dx \neq 0$ , podemos dividir ambos lados por  $dx$  para obtener  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ . Esto nos dice que el símbolo  $\frac{dy}{dx}$ , que es la derivada de  $y$  respecto a  $x$ , puede ser pensado como el cociente de la diferencial  $dy$  entre la diferencial  $dx$ .

**REPRESENTACION GEOMETRICA DE LA DIFERENCIAL**

La figura nos muestra una representación geométrica de la diferencial.



La recta  $L$  es la recta tangente al gráfico de  $y = f(x)$  en el punto  $P = (x, y)$ . La pendiente de esta tangente es  $f'(x)$ . Por lo tanto,

$$\text{Longitud del segmento } \overline{RS} = f'(x)dx = dy.$$

Por otro lado,  $G$  es el punto  $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$  y la longitud del segmento  $\overline{RG}$  es igual a  $\Delta y$ .

Se ve que para  $dx = \Delta x$  pequeño se tiene nuevamente la expresión (4):

$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx \quad (4)$$

**EJEMPLO 3.** Sea  $y = f(x) = x^2 + 4x - 3$ . Hallar,  $\Delta y$ ,  $dy$  y  $\Delta y - dy$

a. Para cualquier  $x$  y cualquier  $\Delta x$

b. Para  $x = 2$  y  $dx = 0.01$

**Solución**

a.  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 + 4(x + \Delta x) - 3 - (x^2 + 4x - 3)$

$$= 2x\Delta x + 4\Delta x + (\Delta x)^2 = 2(x + 2)\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$dy = f'(x)dx = (2x + 4)dx = 2(x + 2)dx$$

$$\Delta y - dy = (\Delta x)^2$$

b. Si  $x = 2$ ,  $\Delta x = dx = 0.01$ , reemplazando en (a), tenemos

$$\Delta y = 2(2 + 2)(0.01) + (0.01)^2 = 0.08 + 0.0001 = 0.0801$$

$$dy = 2(2 + 2)(0.01) = 0.08$$

$$\Delta y - dy = (0.01)^2 = 0.0001$$

### APROXIMACION LINEAL EN TERMINOS DE LA DIFERENCIAL

Tenemos la aproximación lineal:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (1)$$

Ahora queremos expresar esta fórmula en términos de la diferencial. Para esto, hacemos  $x = a + \Delta x$ , de modo que  $\Delta x = x - a$ . Luego, reemplazando en (1) obtenemos:

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x, \text{ o bien } f(a + \Delta x) \approx f(a) + dy$$

Por último, cambiando  $a$  por  $x$ , se tiene:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy \quad (5)$$

Esta fórmula también se puede obtener fácilmente de las fórmulas (3) y (4). Sin embargo, preferimos la deducción que hemos hecho, porque ella nos indica que ambas fórmulas, la (1) y la (5), expresan la misma aproximación y, por lo tanto, las dos nos conducen al mismo resultado.

**EJEMPLO 4.** Usando diferenciales hallar un valor aproximado de  $\sqrt[3]{65}$ .

#### Solución

Consideremos la función  $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ . Su diferencial es:

$$dy = f'(x)dx = \frac{1}{3x^{2/3}} dx$$

Reemplazando estos valores en la expresión (5) tenemos:

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3x^{2/3}} dx$$

El número entero más próximo a 65 que tiene raíz cúbica exacta es 64. Luego, haciendo  $x = 64$  y  $\Delta x = dx = 1$  en la expresión anterior tenemos:

$$\sqrt[3]{65} = \sqrt[3]{64+1} \approx \sqrt[3]{64} + \frac{1}{3(64)^{2/3}}(1) = 4 + \frac{1}{48} \approx 4.0208333$$

Se sabe que las 8 primeras cifras de  $\sqrt[3]{65}$  son 4.0207258. La aproximación que hemos encontrado es exacta hasta la tercera cifra decimal.

### ESTIMACION DE ERRORES

La diferencial tiene aplicación en la estimación de los efectos causados por los errores cometidos al medir ciertas magnitudes. Sea  $x$  la variable cuyo valor es estimado con cierto error posible. Sea  $y = f(x)$  otra variable que es función de  $x$ . Al calcular  $y = f(x)$  a partir de  $x$  también se cometerá un error. Si el valor correcto es  $x + dx$ , entonces el **error de medición es  $dx$** . Por otro lado, el valor correcto de la variable  $y$  es  $f(x + dx)$ , y el valor calculado con error es  $f(x)$ . Luego, el error cometido en la variable  $y$ , llamado el **error de propagación**, es

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x).$$

En consecuencia, si el error  $dx$  es pequeño, que es lo esperado, el error  $\Delta y$  puede ser aproximado por la diferencial  $dy = f'(x)dx$ . Esto es

**Error de  $y = \Delta y \approx dy = f'(x)dx$**

No es igual cometer un error de 1 cm. al medir un metro que cometer el mismo error al medir 10 metros. Para distinguir estas situaciones se define el error relativo y el error porcentual.

**DEFINICION.** Si  $\Delta y$  es el error de  $y$ , entonces

1. El **error relativo** de  $y$  es el cociente  $\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y}$
2. El **error porcentual** de  $y$  es  $100 \frac{\Delta y}{y} \approx 100 \frac{dy}{y}$

En general, el valor exacto del error cometido no es conocido, ya que de serlo, sería muy fácil corregirlo. Lo común es que se conozca un margen del error; es decir, un número  $\epsilon > 0$  tal que

$$|dx| \leq \epsilon$$

**EJEMPLO 5.** Se ha encontrado un tumor en forma esférica en el cuerpo de cierta persona. Se calculó que el radio del tumor es de 2 cm. con un margen de error de 0.05 cm.

- a. Estimar el margen de error al calcular el volumen del tumor.
- b. Estimar el margen de error relativo.
- c. Estimar el margen de error porcentual.

**Solución**

a. El volumen de una esfera de radio  $r$  está dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{y, por tanto,} \quad dV = 4\pi r^2 dr$$

El margen de error al medir el radio es 0.05 cm. Luego,

$$|dr| \leq 0.05 \quad \text{y} \quad |\Delta V| \approx |dV| = |4\pi r^2 dr| \leq 4\pi (2)^2(0.05) \approx 2.51 \text{ cm}^3$$

Esto es, una estimación del margen de error al calcular el volumen con los datos dados es  $2.51 \text{ cm}^3$ .

$$\text{b. } \left| \frac{\Delta V}{V} \right| \approx \left| \frac{dV}{V} \right| = \left| \frac{4\pi r^2 dr}{(4/3)\pi r^3} \right| = \frac{3|dr|}{r} \leq 3 \frac{0.05}{2} = 0.075$$

$$\text{c. } \left| 100 \frac{\Delta V}{V} \right| \approx \left| 100 \frac{dV}{V} \right| \leq 100(0.075) = 7.5\%$$

**TEOREMA 7.7** Si  $u$  y  $v$  son funciones diferenciables de  $x$  y  $c$  es una constante, entonces

$$1. \quad d(c) = 0$$

$$2. \quad d(cu) = cdu$$

$$3. \quad d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$4. \quad d(uv) = u dv + v du$$

$$5. \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

$$6. \quad d(u^n) = nu^{n-1} du$$

### Demostración

Cada una de estas igualdades viene de las correspondientes fórmulas de derivación. Aquí probaremos (4) y (5), dejando las otras como ejercicio para el lector.

4. Sabemos por definición que:

$$du = \frac{du}{dx} dx \quad \text{y} \quad dv = \frac{dv}{dx} dx$$

Por otro lado, por la regla de la derivada de un producto, sabemos que:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Luego,

$$d(uv) = \left( u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \right) dx = u \frac{dv}{dx} dx + v \frac{du}{dx} dx = u dv + v du$$

5. Por regla de la derivada de un cociente sabemos que:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Luego,

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} dx = \frac{v \frac{du}{dx} dx - u \frac{dv}{dx} dx}{v^2} = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

**EJEMPLO 6.** Hallar  $dy$  si  $y = \frac{e^{2x}}{x^2 + 1}$

**Solución**

$$\begin{aligned}
 dy &= \frac{(x^2 + 1) d(e^{2x}) - e^{2x} d(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} && \text{(por 5)} \\
 &= \frac{(x^2 + 1)(2e^{2x} dx) - e^{2x}(2x dx)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2e^{2x}(x^2 - x + 1)}{(x^2 + 1)^2} dx
 \end{aligned}$$

## PROBLEMAS RESUELTOS 7.7

**PROBLEMA 1.** Hallar  $dy$  si  $y^3 + 3xy + x^3 = 4$

**Solución**

Aplicando las propiedades de la diferencial enunciadas en el teorema 7.7 tenemos:

$$\begin{aligned}
 d(y^3) + d(3xy) + d(x^3) &= d(4) \Rightarrow 3y^2 dy + 3x dy + 3y dx + 3x^2 dx = 0 \Rightarrow \\
 3(y^2 + x) dy &= -3(x^2 + y) dx \Rightarrow dy = -\frac{x^2 + y}{y^2 + x} dx
 \end{aligned}$$

**PROBLEMA 2.** Sea  $A$  el área de un cuadrado cuyo lado mide  $x$ . Esto es,  $A = x^2$

- a. Hallar  $\Delta A$ ,  $dA$  y  $\Delta A - dA$
- b. Mostrar gráficamente a  $A$ ,  $\Delta A$ ,  $dA$  y  $\Delta A - dA$

**Solución**

a.  $\Delta A = (x + dx)^2 - x^2 = 2x dx + (dx)^2$

$$dA = 2x dx, \quad \Delta A - dA = (dx)^2$$

b. Dibujemos los cuadrados de lados  $x$  y  $(x + dx)$ .

Las áreas de los rectángulos formados son:

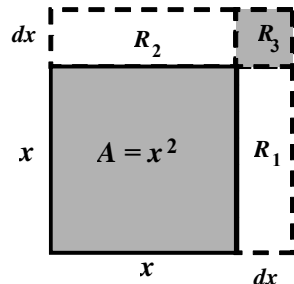
$$R_1 = x dx, \quad R_2 = x dx \quad \text{y} \quad R_3 = (dx)^2$$

Luego,

$$\Delta A = 2x dx + (dx)^2 = R_1 + R_2 +$$

$$dA = 2x dx = x dx + x dx = R_1 + R_2$$

$$\Delta A - dA = R_3$$



**PROBLEMA 3.** Aproximar el valor de  $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} + 0.08\right)$  mediante:

a. Aproximación lineal    b. Aproximación con la diferencial.

**Solución**

Sea  $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ . Se tiene que:

$$f(\pi/4) = \operatorname{sen}^2(\pi/4) = (\sqrt{2}/2)^2 = 1/2$$

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x \Rightarrow f'(\pi/4) = \operatorname{sen}(2\pi/4) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$$

a. Sabemos que:  $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$ . Tomando  $a = \frac{\pi}{4}$  se tiene:

$$f(x) \approx f(\pi/4) + f'(\pi/4)(x - \pi/4) = \frac{1}{2} + 1(x - \pi/4)$$

Luego, la aproximación lineal de  $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$  en  $a = \pi/4$  es:

$$\operatorname{sen}^2 x \approx x + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

Ahora, para  $x = \pi/4 + 0.08$ , se tiene:

$$\operatorname{sen}^2(\pi/4 + 0.08) \approx (\pi/4 + 0.08) + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + 0.08 = 0.508$$

b. Sabemos que:  $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)dx$ .

Luego, para  $x = \pi/4$  y  $dx = \Delta x = 0.08$  se tiene:

$$f(\pi/4 + \Delta x) \approx f(\pi/4) + f'(\pi/4)dx = \frac{1}{2} + 1(0.08) \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}^2(\pi/4 + 0.08) \approx \frac{1}{2} + 1(0.08) = 0.508$$

**PROBLEMA 4.** Se quiere calcular el volumen de un cubo a partir de su arista en tal forma que el margen de error sea de 6%. Estimar el margen de error porcentual con que debe medirse la arista.

**Solución**

Si  $V$  es volumen del cubo y  $x$  es la arista, entonces

$$V = x^3, \quad dV = 3x^2 dx \quad \text{y} \quad \frac{dV}{V} = \frac{3x^2 dx}{x^3} = 3 \frac{dx}{x}$$

Luego,

$$\left| 100 \frac{dV}{V} \right| \leq 6 \Rightarrow \left| 100 \left( 3 \frac{dx}{x} \right) \right| \leq 6 \Rightarrow \left| 100 \frac{dx}{x} \right| \leq 2$$

Por tanto, el margen de error porcentual de la arista debe ser de 2%

**PROBLEMA 5.** El periodo de un péndulo es el tiempo que demora para dar una oscilación completa y este viene dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

donde  $L$  es la longitud del péndulo,  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $T$  se mide en segundos. El péndulo de un reloj, debido al calor, se ha dilatado y su longitud ha aumentado 0.4 %.

- a. Calcular el porcentaje aproximado del cambio del periodo.
- b. Calcular el error aproximado del reloj en un día.

**Solución**

a. Nos dicen que:  $100 \frac{dL}{L} = 0.4$ . Además:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g}} \Rightarrow dT = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \left( \frac{dL}{2\sqrt{L}} \right) = \frac{\pi dL}{\sqrt{g} \sqrt{L}}$$

Luego,

$$100 \frac{dT}{T} = 100 \frac{\pi dL / \sqrt{g} \sqrt{L}}{2\pi \sqrt{L} / \sqrt{g}} = 100 \frac{dL}{2L} = \frac{1}{2} \left( 100 \frac{dL}{L} \right) = \frac{1}{2} (0.4) = 0.2 \%$$

b. En cada segundo, el reloj tiene un error aproximado del 0.2 %, o sea, de 0.002 segundos. Luego, en un día, el error aproximado es de:

$$24(60) (60) (0.002) = 172.8 \text{ segundos} = 2.88 \text{ minutos}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 7.7

*En los problemas del 1 al 3 hallar:* a.  $\Delta y$ , b.  $dy$  c.  $\Delta y - dy$

1.  $y = x^2 - 1$

2.  $y = e^x$

3.  $y = \ln x$

*En los problemas del 4 y 5 calcular:* a.  $\Delta y$  b.  $dy$  c.  $\Delta y - dy$ , para los valores de  $x$  y  $dx$  dados.

4.  $y = x^2 - 4x$ ,  $x = -1$ ,  $dx = 0.03$

5.  $y = 10^x$ ,  $x = 1$ ,  $dx = -0.01$

*En los problemas del 6 al 9 se proporcionan aproximaciones lineales de la funciones dadas en  $a = 0$ . Verificar que estas aproximaciones son correctas.*

6.  $\sqrt{x+3} \approx \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}x$

7.  $\text{sen } x \approx x$

8.  $\tan x \approx x$

9.  $e^x \approx 1 + x$

*En los problemas del 10 al 15 hallar  $dy$*

10.  $y = e^{-3x^2}$

11.  $y = \sqrt{1-x^2}$

12.  $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$

13.  $x^2 + y^2 = 25$

14.  $x^2 + 2\sqrt{xy} - y^2 = 1$

15.  $y = \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}}$

16. Probar que para valores pequeños de  $|\Delta x|$  se cumple que

$$\sqrt[n]{x+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\Delta x}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

*En los problemas del 16 al 21 hallar un valor aproximado de la expresión indicada.*

17.  $\sqrt{80}$

18.  $\sqrt[4]{82}$

19.  $\sqrt[3]{218}$

20.  $\sqrt{2 + \sqrt[3]{8.2}}$

21.  $\tan^{-1}(e^{0.08})$

22.  $\ln 1.07$

23. Aproximar el valor de  $\cos^4(\pi/4 + 0.01)$

24. Aproximar el valor de  $\sin(60^\circ 1')$ . *Sugerencia:*  $60^\circ 1' = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{60} \left( \frac{\pi}{180} \right)$

25. Un cubo de metal tiene 12 cm. de arista. La arista aumenta en 0.2 cm.

- Aproximar con la diferencial el incremento del volumen.
- Hallar el valor exacto del incremento.
- Aproximar con la diferencial el incremento del área total.
- Hallar el incremento exacto del área total.

26. Se tiene un tubo de hierro de 8 m. de largo, 6 cm. de radio y 0.4 cm. de espesor. Usando la diferencial aproximar el volumen de hierro del tubo. El volumen de un cilindro circular recto es  $V = \pi r^2 h$ , donde  $r$  es el radio y  $h$  la altura.

27. Se quiere calcular el área  $A$  de una esfera a partir del radio  $r$  mediante la fórmula  $A = 4\pi r^2$  y en tal forma que el margen de error sea de 5%. Estimar el margen de error porcentual con que debe medirse el radio.

28. Al medir el radio de una esfera se obtiene 4m. Esta medida es segura hasta 0.01 m.

- Estimar el margen de error al calcular el volumen de la esfera.
- Estimar el margen de error porcentual.

29. Al medir una circunferencia mayor de una esfera se obtiene 72 cm. con un margen de error de 0.5 cm.

- Estimar el margen de error al calcular el área de la esfera.  $A = 4\pi r^2$
- Estimar el margen de error relativo al calcular el área.
- Estimar el margen de error al calcular el volumen de la esfera.  $V = (4/3)\pi r^3$
- Estimar el margen de error relativo al calcular el volumen.

*Sugerencia:*  $C = 2\pi r$  y  $dC = 2\pi dr$

30. Un cateto de un triángulo rectángulo mide exactamente 30 cm. Al medir el ángulo opuesto a este cateto se obtiene  $60^\circ$ , con un margen de error de  $0.5^\circ$ .
- Estimar el margen de error al calcular la hipotenusa.
  - Estimar el margen de error porcentual al calcular la hipotenusa.
31. Se estima que el próximo mes, se venderán 8,000 unidades de cierto producto. Esta estimación tiene un margen de error de 3%. La función ganancia es

$$G(x) = 5x - 0.0002x^2 \text{ dólares,}$$

donde  $x$  es el número de unidades vendidas por mes.

- Calcular la ganancia que dejarán los 8,000 artículos
- Estimar el margen de error de la ganancia con el cálculo anterior.
- Estimar el margen de error relativo.
- Estimar el margen de error porcentual.

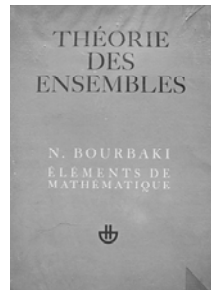
## NICOLAS BOURBAKI

### LA MISTERIOSA HISTORIA DE UN BRILLANTE MATEMÁTICO QUE NUNCA EXISTIO

**NICOLAS BOURBAKI**, de nacionalidad francesa y nombre de origen griego, es uno de los matemáticos más influyentes en el desarrollo de la Matemática en siglo XX. Sus obras, no sólo revolucionaron la Matemática, sino a las demás ramas de Ciencia, a la Filosofía y a las Humanidades. En la enseñanza de la Matemática en las escuelas y liceos de todo el mundo dio origen, en los años sesenta, al movimiento llamado **La Matemática Moderna o La Matemática Moderna**.

Su nombre comienza a ser conocido en el mundo científico a finales de los años treinta, cuando la prestigiosa revista *Comptes Rendus de la Academia de Ciencias de París* publicó un trabajo firmado por Nicolás Bourbaki quien, supuestamente, era miembro de la **Academia de Poldavia** (que nunca existió).

Desde 1939, **Bourbaki** ha estado publicando su obra monumental, **Elementos de Matemáticas**. El nombre insinúa la intención de emular a la más famosa obra de la antigüedad, **Los Elementos de Euclides**. Hasta la actualidad ya se han publicado más de treinta volúmenes. El primero de ellos **Teoría de Conjuntos** y uno de los últimos, **Teoría Espectral**.



Lo más curioso de **Nicolás Bourbaki** es que este matemático nunca existió. **Nicolás Bourbaki** es el seudónimo tras del cual un grupo de jóvenes y brillantes matemáticos, publicaron sus ideas. La asociación fue organizada en 1935, con el objetivo de reconstruir la Matemática rigurosamente sobre bases **axiomáticas** y a partir de la **Teoría de Conjuntos**.

Estos jóvenes matemáticos de los años treinta (ahora ya ausentes), en su gran mayoría eran franceses y egresados de la prestigiosa *Escuela Normal Superior de París*. Entre estos destacan: **André Weil** (1906–1998), **Henri Cartán** (1904–2008), **Jean Dieudonné** (1906–1998), **Charles Ehresmann** (1905–1979). Más tarde se incorporaron, entre otros, **Lurent Schwartz** (1915–2002), **Serge Lang** (1927–2005), **Alexandre Grothendieck** (1928–),



### Algunos de los primeros miembros del grupo Bourbaki

En la formación de la asociación aparecen aspectos misteriosos y jocosos. Una de las reglas de la asociación establece que el miembro que cumple 50 años de edad, deja el grupo y es reemplazado.

Existen una leyenda jocosa que cuentan sobre la forma como los fundadores escogieron el nombre **Bourbaki** para su asociación. Se dice que la elección fue inspirada en un personaje anecdótico, el general Charles Denis Bourbaki, quien tuvo un desenvolvimiento desastroso en la guerra Franco–Prusiana (1871–1872). Se cuenta que intentó suicidarse, pero que aún en esta intensión fracasó.



Ch. D. Bourbaki

El grupo Bourbaki sigue en producción. Se reúne con frecuencia, especialmente en verano, en algún balneario vacacional francés. El costo es totalmente cubierto por la asociación, que cuenta con el dinero producido la venta de sus libros.

# 8

---

## APLICACIONES DE LA DERIVADA

---

*GUILLAUME F. A. M. DE L'HÔPITAL*  
(1661–1704)

**8.1 MAXIMOS Y MINIMOS**

**8.2 TEOREMA DEL VALOR MEDIO**

**8.3 MONOTONIA, CONCAVIDAD Y CRITERIOS  
PARA EXTREMOS LOCALES**

**8.4 FORMAS INDETERMINADAS. REGLA DE  
L'HÔPITAL**

**8.5 TRAZADO CUIDADOSO DEL GRAFICO DE UNA  
FUNCION**

**8.6 PROBLEMAS DE OPTIMIZACION**

**8.7 METODO DE NEWTON–RAPHSON**

G. F. A.

**MARQUES DE L'HÔPITAL**

(1661 – 1704)



**GUILLAUME FRANÇOIS AANTOIE NE MARQUÉS DE L'HÔPITAL** nació en París el año 1661, dentro de una familia noble y acomodada. Cuando joven pretendió hacer una carrera militar. Debido a su corta visión tuvo que abandonar su pretensión, para dedicarse a la Matemática. Fue discípulo y amigo de un famoso matemático de aquella época, el suizo Johann Bernoulli (1667–1748). En 1692 publicó el primer libro de cálculo de la historia: **“Analyse des Infiniment petit”** (Análisis de los infinitamente pequeños). En este texto aparece un método para calcular el límite de un cociente donde ambos límites, numerador y denominador, son nulos. Este método lo ha hecho famoso gracias a que le dieron el nombre de **“Regla de L'Hôpital”**. J. Bernoulli sostuvo que él fue el creador de esta famosa regla. La veracidad de esta afirmación recién fue comprobada en 1922, cuando en la biblioteca de Berna se encontró el texto del curso de Cálculo que dictaba Bernoulli, en el cual aparece la regla.

### ACONTECIMIENTOS PARALELOS IMPORTANTES

Durante la vida de L'Hôpital, en América y en el mundo hispano sucedieron los siguientes hechos notables: La poetisa mejicana Sor Inés de la Cruz (1651-1695) publica sus obras poéticas, obras que fueron fuertemente influenciadas por el Gongorismo. En 1664, los ingleses, bajo el mando del duque de York, toman Nueva Amsterdam y le cambian el nombre a Nueva York. En 1671 el pirata inglés Henry Morgan saquea e incendia la ciudad de Panamá. En 1682 el cuáquero Willian Penn funda Pensilvania. Ese mismo año, el francés Robert Cavalier de la Salle llega a la desembocadura del río Misisipi, tomó posesión de la región y la nombró Luisiana, en honor a su rey, Luis XIV.

## SECCION 8.1

### MAXIMOS Y MINIMOS

Las distintas actividades a que se dedica el hombre le plantean continuamente problemas de optimización. El comerciante busca maximizar sus ganancias; el industrial busca minimizar sus costos de producción, un conductor cualquiera, casi siempre, busca la distancia o el tiempo mínimo de recorrido, etc. Algunos de estos problemas se reducen a encontrar el valor máximo o el valor mínimo de una función. Tales problemas son llamados **problemas de optimización**.

#### EXTREMOS ABSOLUTOS

**DEFINICION.** Sea  $c$  un punto del dominio de la función  $f$ . Diremos que:

a.  $f(c)$  es el **valor máximo de  $f$** , el máximo absoluto de  $f$  o, simplemente, el máximo de  $f$ , si

$$f(c) \geq f(x), \quad \forall x \in \text{Dom}(f).$$

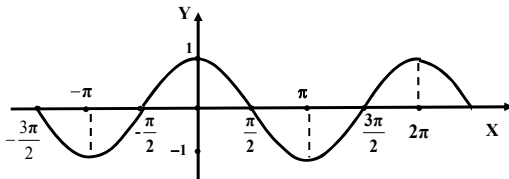
b.  $f(c)$  es el **valor mínimo de  $f$** , el mínimo absoluto de  $f$  o, simplemente, el mínimo de  $f$ , si

$$f(c) \leq f(x), \quad \forall x \in \text{Dom}(f).$$

c.  $f(c)$  es un **valor extremo de  $f$**  si  $f(c)$  es un máximo o un mínimo.

**EJEMPLO 1.**

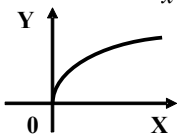
a. El máximo  $f(x) = \cos x$  es 1 y el mínimo es  $-1$ . Estos valores son alcanzados infinitas veces. En efecto:  $\cos 2n\pi = 1$  y  $\cos (2n + 1)\pi = -1$  para todo entero  $n$ .



b. El mínimo de  $g(x) = \sqrt{x}$  que es  $g(0) = \sqrt{0} = 0$ ; pero  $g$  no tiene máximo.

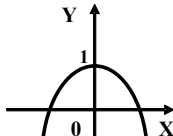
c. El máximo de  $h(x) = 1 - x^2$  es  $h(0) = 1$ ; pero  $h$  no tiene mínimo.

d. La función  $f(x) = \frac{1}{x}$  no tiene máximo ni mínimo.



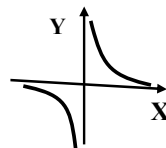
$$g(x) = \sqrt{x}$$

Max = no tiene, Min = 0



$$h(x) = 1 - x^2$$

Max = 1, Min = no tiene



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

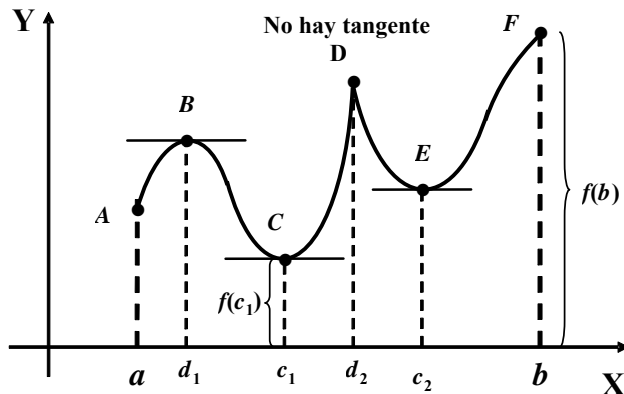
Max = no tiene, Min = no tiene

Los ejemplos anteriores nos muestran que algunas funciones tienen los dos valores extremos, otras sólo uno y otras, ninguno. Necesitamos algunos criterios que nos aseguren la existencia de extremos. Aquí tenemos uno de los más simples, conocido con el nombre de teorema del valor extremo. La demostración de éste no está al alcance de nuestro texto, por lo cual la omitimos.

**TEOREMA 8.1** Teorema del valor extremo.

Si  $f$  es una función **continua** en un intervalo **cerrado**  $[a, b]$ , entonces  $f$  tiene máximo y mínimo en  $[a, b]$ ; es decir existen dos puntos  $c$  y  $d$  en el intervalo  $[a, b]$  tales que  $f(c)$  es el valor máximo y  $f(d)$  es el valor mínimo de  $f$ .

**EJEMPLO 2.** El siguiente gráfico es el de una función continua  $f$  en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Determinar su máximo y su mínimo.



**Solución**

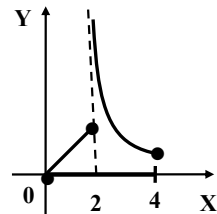
El punto más alto del gráfico es el punto  $F$  y el más bajo es el punto  $C$ . Luego, el máximo de  $f$  es  $f(b)$  y el mínimo es  $f(c_1)$ .

**EJEMPLO 3 .** Hallar una función, con dominio un intervalo cerrado, que no tenga máximo.

**Solución**

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{x-2}, & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

$\text{Dom}(f) = [0, 4]$   $f$  no tiene máximo. Observar que  $f$  no cumple la hipótesis del teorema del valor extremo, ya que  $f$  es discontinua en 2.



### EXTREMOS RELATIVOS

En gráfico del ejemplo 2, los puntos  $B$  y  $D$  son tales que, aunque no son los más altos del gráfico, son los más altos comparados con los puntos vecinos. Análogamente, los puntos  $C$  y  $E$  son los más bajos de su vecindario. Esta observación nos lleva al concepto de extremos locales o extremos relativos.

**DEFINICION.** Sea  $c$  un punto del dominio de la función  $f$ . Diremos que:

a.  $f(c)$  es un **máximo local** o un **máximo relativo de  $f$** , si existe un intervalo abierto  $I$  que contiene a  $c$  y se cumple que

$$f(c) \geq f(x), \quad \forall x \in I.$$

b.  $f(c)$  es un **mínimo local** o un **mínimo relativo de  $f$** , si existe un intervalo abierto  $I$  que contiene a  $c$  y se cumple que:

$$f(c) \leq f(x), \quad \forall x \in I.$$

c.  $f(c)$  es un **extremo local** o un **extremo relativo de  $f$**  si  $f(c)$  es un máximo local o un mínimo local.

Observar que, de acuerdo a esta definición,  $c$  es un punto interior del intervalo  $[a, b]$ , o sea, si  $a < c < b$ . Observar también que si  $f(c)$  es un extremo absoluto en un intervalo  $[a, b]$  y si  $a < c < b$ , entonces  $f(c)$  también es un extremo local. Esto no sucede si  $f(a)$  o  $f(b)$  es un extremo absoluto.

Observando los puntos  $B, C, D$ , y  $E$  la gráfica del ejemplo 2, que corresponden a extremos locales, se puede conjeturar que las rectas tangentes en estos puntos son horizontales (pendiente nula) o que no tienen rectas tangentes (la derivada no existe). A continuación formalizamos y demostramos esta conjetura.

**DEFINICION.** Un **número crítico de una función  $f$**  es un número  $c$  en el dominio de  $f$  tal que  $f'(c) = 0$  o  $f'(c)$  no existe. En este caso, el punto  $(c, f(c))$  es un **punto crítico**.

**TEOREMA 8.2** Teorema de Fermat

Si  $f$  tiene un extremo local en  $c$ , entonces  $c$  es un número crítico.

#### Demostración

Si  $f'(c)$  no existe, el teorema se cumple. Supongamos que  $f'(c)$  existe.

#### Caso 1. $f(c)$ es máximo local

Como existe  $f'(c)$ , debemos tener que:

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad (1)$$

Por ser  $f(c)$  un máximo local, existe un intervalo abierto  $I$  que contiene a  $c$  tal que para los  $c+h$  que están en el intervalo  $I$ , se cumple:

$$f(c+h) \leq f(c) \text{ y, por tanto, } f(c+h) - f(c) \leq 0 \quad (2)$$

Luego, para  $h > 0$  se tiene:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Ahora, para  $h < 0$ , tomando en cuenta (2), se tiene

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

De (1), (3) y (4) obtenemos que  $f'(c) = 0$ .

**Caso 2.**  $f(c)$  es mínimo local.

Sea  $g(x) = -f(x)$ . Como  $f(c)$  es un valor mínimo de  $f$ , entonces  $g(c) = -f(c)$  es máximo de  $g$ . Por el caso 1,  $g'(c) = 0$ . Por tanto,  $f'(c) = -g'(c) = -0 = 0$ .

**OBSERVACION.** La proposición recíproca teorema de Fermat no es cierta. En efecto, los siguientes dos ejemplos son contraejemplos.

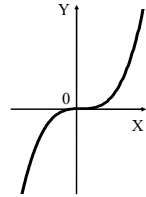
**EJEMPLO 4.** Sea la función:  $f(x) = x^3$ . Demostrar que 0 es número crítico. Observar que  $f(0) = 0$  no es un extremo local.

**Solución**

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$$

Luego 0 es número crítico de  $f$ .

Mirando el gráfico se ve que  $f$  no tiene un extremo local en 0.



**EJEMPLO 5.** Hallar los números críticos de la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$$

**Solución**

Hallemos la derivada de  $f$ :

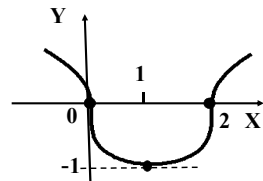
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x} \Rightarrow f(x) = (x^2 - 2x)^{1/3} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 2x)^{-2/3}(2x - 2) = \frac{2}{3} \frac{x - 1}{(x(x - 2))^{2/3}}$$

$$\text{Ahora, } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Además, vemos que  $f'(x)$  no está definida en  $x = 0$  ni en  $x = 2$ . Luego, los números críticos de  $f$  son 1, 0 y 2.

Observar en el gráfico que  $f(1) = -1$  es un mínimo local (y absoluto). Sin embargo, ni  $f(0) = 0$  ni  $f(2) = 0$  son extremos locales.



## ESTRATEGIA PARA HALLAR LOS VALORES EXTREMOS EN INTERVALOS CERRADOS FINITOS

De los dos teoremas anteriores obtenemos la siguiente estrategia para hallar los valores extremos de una función continua  $f$  en un **intervalo cerrado**  $[a, b]$ .

**Paso 1.** Hallar los puntos críticos de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ .

**Paso 2.** Evaluar  $f$  en  $a$ , en  $b$  y en los puntos críticos.

El mayor de los valores del paso 2 es el máximo; y el menor, es el mínimo.

**EJEMPLO 6.** Hallar los extremos absolutos de la siguiente función en el intervalo  $[1, 9]$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 3$$

**Solución**

**Paso 1.** Hallar los puntos críticos de  $f$  en el intervalo  $[1, 9]$ :

$$f'(x) = x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ó } x = 6$$

Por tanto, los puntos críticos de  $f$  son 2 y 6 y ambos están en  $[1, 9]$

**Paso 2.** Evaluamos  $f$  en la frontera de  $[1, 9]$  y en los puntos críticos.

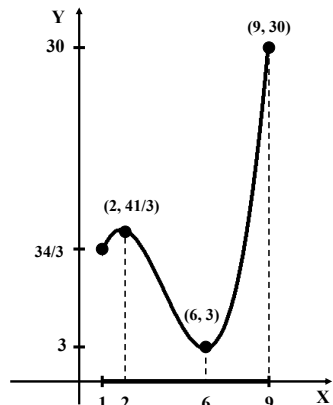
$$f(1) = \frac{1^3}{3} - 4(1)^2 + 12(1) + 3 = \frac{34}{3},$$

$$f(9) = \frac{9^3}{3} - 4(9)^2 + 12(9) + 3 = 30$$

$$f(2) = \frac{2^3}{3} - 4(2)^2 + 12(2) + 3 = \frac{41}{3},$$

$$f(6) = \frac{6^3}{3} - 4(6)^2 + 12(6) + 3 = 3$$

Luego, el máximo es  $f(9) = 30$  y el mínimo,  $f(6) = 3$ .



**EJEMPLO 7.** Hallar los extremos de la siguiente función en el intervalo  $[0, 4]$

$$g(x) = 3 - \sqrt[3]{(x-3)^2}$$

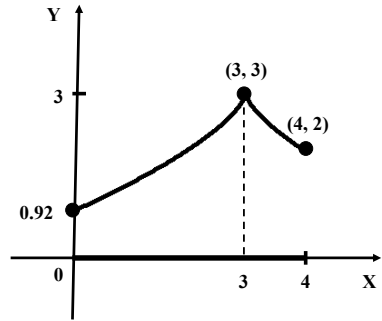
**Solución**

**Paso 1.** Hallemos los puntos críticos de  $g$  en el intervalo  $[0, 4]$ :

$$g(x) = 3 - (x - 3)^{2/3} \Rightarrow g'(x) = -\frac{2}{3}(x - 3)^{-1/3} \Rightarrow$$

$$g'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-3}}$$

$g'$  no está definida en  $x = 3$  y no se anula en ningún punto. Luego,  $g$  tiene un único punto crítico que es 3 y éste está en el intervalo  $[0, 4]$ .



**Paso 2.** Evaluamos  $g$  en la frontera de  $[0, 4]$  y en los puntos críticos:

$$g(0) = 3 - \sqrt[3]{(0-3)^2} = 3 - \sqrt[3]{9} \approx 0.9199$$

$$g(4) = 3 - \sqrt[3]{(4-3)^2} = 3 - 1 = 2$$

$$g(3) = 3 - \sqrt[3]{(3-3)^2} = 3$$

Luego, el máximo es  $g(3) = 3$  y el mínimo,  $g(0) = 3 - \sqrt[3]{9} \approx 0.9199$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 8.1

*En los problemas del 1 al 8 graficar la función y, solamente observando el gráfico, determinar el máximo y mínimo absolutos. Para graficar, usar las técnicas de traslación y reflexión, explicadas en la sección 4.1.*

1.  $f(x) = 4 - x^2$

2.  $g(x) = |2 - x| - 1$

3.  $h(x) = |4 - x^2|$

4.  $f(x) = -x^3 - 2$

5.  $g(x) = \frac{1}{x-1}$ , en  $(1, 3)$

6.  $g(x) = \frac{1}{x-1}$ , en  $[4/3, 3]$

7.  $h(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{si } x < 1 \\ \ln x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ , en  $[-4, 4]$

8.  $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x < 1 \\ 4-x^2, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ , en  $[-1, 2]$

*En los problemas del 9 al 14 hallar los números críticos de la función dada*

9.  $f(x) = x^2(3x - 8)^{2/3}$

10.  $g(x) = x + \sin x$

11.  $h(x) = |x^3 - 8|$

12.  $f(x) = [x]$

13.  $h(x) = xe^{-x}$

14.  $g(x) = \sin^2 x + \cos x$ , en  $[-1, 2\pi]$

**En los problemas del 15 al 22 determinar el máximo y el mínimo absolutos de la función en el intervalo cerrado indicado.**

15.  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  en  $[1, 3]$

16.  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  en  $[-2, 3]$

17.  $f(x) = \tan x - x$  en  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

18.  $f(x) = 1 - (x - 3)^{2/3}$  en  $[-5, 4]$

19.  $f(x) = \sin x + \cos x$  en  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

20.  $f(x) = \cos^2 x + \sin x$  en  $[0, \pi]$

21.  $g(x) = e^{-x} \sin x$  en  $[0, 2\pi]$

22.  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$  en  $[1, e]$

23. Probar que la función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

tiene exactamente un número crítico en  $\mathbb{R}$ .

24. Probar que la función cúbica  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ,  $a \neq 0$ , puede tener dos, uno o ningún número crítico en  $\mathbb{R}$ . Sugerencia: ¿Cuántas raíces puede tener una ecuación de segundo grado?

25. Probar que un polinomio de grado  $n$  puede tener a lo más  $n - 1$  números críticos en  $\mathbb{R}$ .

## SECCION 8.2

### TEOREMA DEL VAOR MEDIO

**DEFINICION.** Sea  $f$  una función. Diremos que:

**a.  $f$  es diferenciable en un intervalo abierto  $(a, b)$**  si  $f$  es diferenciable en todo punto de  $(a, b)$ . Esto es,

$$\exists f'(x), \forall x \in (a, b)$$

**b.  $f$  es diferenciable en un intervalo cerrado  $[a, b]$**  si  $f$  es diferenciable en el intervalo abierto  $(a, b)$  y tiene derivada por la derecha en  $a$  y por la izquierda en  $b$ .

Por supuesto, también se tiene diferenciability en un intervalo semiabierto, la cual se define de manera obvia.

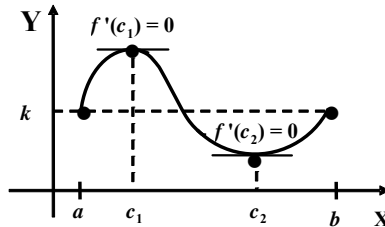
Es fácil ver, que si  $f$  es diferenciable en un intervalo  $I$ ,  $f$  es continua en  $I$ .

**TEOREMA 8.3** Teorema de Rolle.

Si  $f$  es una función que cumple:

1.  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ .
2.  $f$  es diferenciable en el intervalo abierto  $(a, b)$ .
3.  $f(a) = f(b)$

Entonces  $\exists c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

**Demostración**

Sea  $f(a) = f(b) = k$

**Caso 1.**  $f$  es la función constante  $f(x) = f(a) = f(b) = k, \forall x \in [a, b]$ .

En este caso, tenemos que  $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$ . Por tanto, cualquier número  $c \in (a, b)$  cumple con  $f'(c) = 0$ .

**Caso 2.**  $f$  no es constante. Luego, existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0) \neq k$ .

Como  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ , por el teorema del valor extremo,  $f$  tiene máximo y mínimo en  $[a, b]$ .

Si  $f(x_0) > k$  y  $f(c_1)$  es el máximo de  $f$  en  $[a, b]$ , entonces  $f'(c_1) = 0$  y  $f(c_1) \geq f(x_0) > k$ . Luego,  $c_1 \neq a$  y  $c_1 \neq b$ , y, por tanto,  $c_1 \in (a, b)$ .

Si  $f(x_0) < k$  y  $f(c_2)$  es el mínimo de  $f$  en  $[a, b]$ , entonces  $f'(c_2) = 0$  y  $f(c_2) \leq f(x_0) < k$ . Luego,  $c_2 \neq a$  y  $c_2 \neq b$ , y, por tanto,  $c_2 \in (a, b)$ .

**¿SABIAS QUE ...**

**MICHEL ROLLE (1652–1719)**, Matemático francés. Inicialmente, trabajó en París en un modesto empleo de escribano de notarías. En 1699 fue electo como miembro de la Real Academia de Ciencias. Hizo contribuciones al Álgebra y a la Geometría, pero es más conocido por el teorema que ahora lleva su nombre, el cual apareció en su libro *Traité d'algèbre* publicado en 1690.



**TEOREMA 8.4** Teorema del Valor Medio (de Lagrange)

Sea  $f$  una función tal que:

- a.  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ .
- b.  $f$  es diferenciable en el intervalo abierto  $(a, b)$

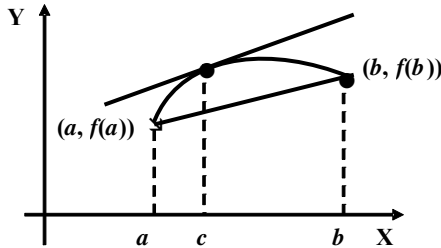
Entonces  $\exists c \in (a, b)$  tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \text{ o bien } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geoméricamente, este teorema nos dice lo siguiente:

La recta secante que pasa por los puntos  $P_1 = (a, f(a))$  y  $P_2 = (b, f(b))$  tiene por pendiente  $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  y la pendiente de la recta tangente en el punto  $(c, f(c))$  es  $f'(c)$ .

Luego, el teorema dice que, si el gráfico de una función continua tiene una tangente en cada punto entre  $a$  y  $b$ , entonces existe por lo menos un  $c$  entre  $a$  y  $b$ , tal que la recta tangente en el punto  $(c, f(c))$  es paralela a la recta secante.



**Demostración**

La recta que pasa por  $P_1 = (a, f(a))$  y  $P_2 = (b, f(b))$  tiene por ecuación

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Introducimos la nueva función

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

que es la diferencia entre la función  $f$  y la recta anterior.

Veamos que  $g$  satisface las hipótesis del teorema de Rolle:

1. La función  $g$  es continua en  $[a, b]$ , ya que  $g$  es la suma de dos funciones continuas en  $[a, b]$ , que son  $f$  y el polinomio

$$p(x) = -f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

2. La función  $g$  es diferenciable en  $(a, b)$ , ya que  $f$  y el polinomio  $p(x)$  también lo son. Además,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\text{i})$$

$$3. g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$$

Las hipótesis del teorema de Rolle se han cumplido, luego,  $\exists c \in (a, b)$  tal que

$$g'(c) = 0 \quad (\text{ii})$$

Si en (i) tomamos  $x = c$ , obtenemos

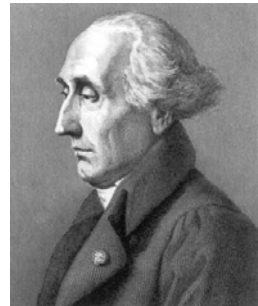
$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\text{iii})$$

De (ii) y (iii) se tiene

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

### ¿SABIAS QUE ...

**JOSEPH LOUIS LAGRANGE** (1736–1813) Nació en Turín (Italia), pero de ascendencia francesa. Es uno de los dos matemáticos más notables del siglo XVIII. El otro es Leonardo Euler. A los 19 años creó el **Cálculo de Variaciones**. Sucedió a Euler en la dirección de la Academia de Ciencias de Berlín. En París fue nombrado profesor de las recién fundadas instituciones: **Escuela Normal** y de la **Escuela Politécnica**. Fue miembro de la comisión que creó el **Sistema Métrico Decimal**. En 1778 publicó una de las más importantes de sus obras: **Mecánica Analítica**.



**EJEMPLO 1.** Sea  $f(x) = 1 + x + x^2 - 2x^3$ . Hallar todos los números  $c$  que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio para la función  $f$  en el intervalo  $[-1, 1]$ .

#### Solución

En primer lugar vemos que la función  $f$ , por ser un polinomio, es continua y diferenciable en todo  $\mathbb{R}$  y, en particular, en el intervalo  $[-1, 1]$ .

Nos piden encontrar los  $c \in (-1, 1)$  tales que:

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \quad (\text{1})$$

Pero,

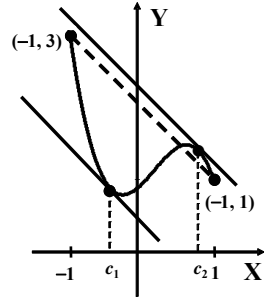
$$f(-1) = 3, \quad f(1) = 1 \quad \text{y} \quad f'(x) = 1 + 2x - 6x^2$$

Luego, reemplazando estos valores en (1):

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \Rightarrow 1 + 2c - 6c^2 = \frac{1 - 3}{2}$$

$$\Rightarrow 2 + 2c - 6c^2 = 0 \Rightarrow 3c^2 - c - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \approx -0.434 \quad c_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \approx 0.768$$



Vemos que ambas raíces están en el intervalo  $(-1, 1)$ .

En términos de velocidades, el teorema del valor medio dice que la velocidad promedio, en algún instante, coincide con la velocidad instantánea. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

**EJEMPLO 2.** Dos casetas policiales  $A$  y  $B$  distan entre sí 147 Km. Un automóvil pasa por la caseta  $A$  a las 2 P. M. y por la caseta  $B$  a las 3:30 P. M. Un oficial de tránsito de la caseta  $B$ , que sabía Cálculo, le dijo al conductor: “Ciudadano, Ud. sabe que en esta carretera la máxima velocidad permitida es 90 Km/h y Ud. se excedió. Tengo que levantarle una infracción” Demuestre que el oficial tenía razón.

**Solución**

Sea  $s = f(t)$  la función de desplazamiento del conductor, donde el tiempo lo medimos en horas a partir de las 12 M. Suponemos que esta  $f$  es diferenciable. Sabemos que la derivada  $f'(t)$  es la velocidad instantánea en el instante  $t$ .

La velocidad promedio del automóvil en el recorrido comprendido entre las dos casetas es:

$$\frac{f(3.5) - f(2)}{3.5 - 2} = \frac{147}{1.5} = 98 \text{ Km/h}$$

Pero, por el teorema del valor medio, existe un instante  $t_0$ , entre las 2 P. M. y las 3:30 P. M. tal que:

$$\frac{f(3.5) - f(2)}{3.5 - 2} = f'(t_0) \Rightarrow f'(t_0) = 98 \text{ Km/h}$$

Luego, en el instante  $t_0$  el conductor excedió la velocidad máxima permitida.

Una aplicación importante, del teorema del valor medio es el siguiente resultado, en el cual hablamos de un intervalo  $I$ . Este intervalo puede ser de cualquier tipo: abierto, cerrado, semiabierto, infinito, etc.

**TEOREMA 8.5** Teorema de la Constante.

Sea  $f$  una función continua en un intervalo  $I$ .

$$f'(x) = 0, \forall x \in I \Leftrightarrow f(x) = C, \forall x \in I,$$

donde  $C$  es una constante.

**Demostración**

Una parte del teorema ya no es novedad. En efecto, ya sabemos que si  $f$  es una función constante, entonces su derivada  $f'$  es la función constante 0. Por tanto, aboquémonos a probar la parte recíproca.

Sean  $x_1$  y  $x_2$  dos puntos cualesquiera del intervalo  $I$  tales que  $x_1 < x_2$ .

Por hipótesis  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in I$ . En particular,  $f'(x) = 0$  para todo  $x$  en  $[x_1, x_2]$ . Luego,  $f$  es diferenciable en  $[x_1, x_2]$  y por el teorema 8.1,  $f$  también es continua en  $[x_1, x_2]$ . Se han satisfecho las hipótesis del teorema del valor medio, luego existe  $c \in (x_1, x_2)$  tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Pero,  $f'(c) = 0$ . Luego,  $f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$

Como  $x_1$  y  $x_2$  son dos puntos cualesquiera de  $I$ , entonces  $f$  es constante en  $I$ .

**EJEMPLO 4.** Demuestre que  $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

**Solución**

Sea  $f(x) = \sin^{-1}x + \cos^{-1}x$ . Se tiene:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Luego, por el teorema anterior, existe una constante  $C$  tal que  $f(x) = C$ .

Hallamos esta constante: Tomando  $x = 0$  se tiene:

$$C = f(0) = \sin^{-1}0 + \cos^{-1}0 = \pi/2 + 0 = \pi/2$$

Luego,

$$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi/2$$

**TEOREMA 8.6** Teorema de la Diferencia Constante.

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones diferenciables en un intervalo  $I$ .

$$f'(x) = g'(x), \forall x \in I, \Rightarrow f(x) = g(x) + C, \forall x \in I,$$

donde  $C$  es una constante.

**Demostración**

Sea  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

La función  $h$  es diferenciable en  $I$ , ya que  $f$  y  $g$  lo son. Además,

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0, \forall x \in I.$$

Luego, por el teorema anterior, existe una constante  $C$  tal que

$$h(x) = C, \forall x \in I \Rightarrow f(x) - g(x) = C, \forall x \in I \Rightarrow f(x) = g(x) + C, \forall x \in I.$$

En la línea del teorema de Rolle y del teorema del valor medio contamos con el siguiente teorema, que generaliza a los dos anteriores.

**TEOREMA 8.7** Teorema del Valor Medio de Cauchy.

Sea  $f$  y  $g$  dos funciones tal que:

1.  $f$  y  $g$  son continuas en el intervalo cerrado  $[a, b]$ .
2.  $f$  y  $g$  son diferenciables en el intervalo abierto  $(a, b)$

Entonces  $\exists c \in (a, b)$  tal que:

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Si  $g(a) \neq g(b)$ , entonces la igualdad anterior puede escribirse así:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

**Demostración**

Ver el problema resuelto 9.

El Teorema del Valor Medio es un caso particular del teorema de Cauchy. En efecto, si en este último teorema tomamos  $g(x) = x$ , tenemos que

$$g(b) - g(a) = b - a \quad \text{y} \quad g'(c) = 1$$

Estas igualdades reemplazadas en la igualdad anterior nos da la igualdad del Teorema del Valor Medio.

**EJEMPLO 3.** Hallar un  $c \in (0, 1)$  que satisface el teorema de Cauchy para las funciones  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = x^3$  en el intervalo  $[0, 1]$ .

**Solución**

Es evidente que  $f$  y  $g$  son continuas en  $[0, 1]$  y diferenciables en  $(0, 1)$ . Ahora,

$$(f(2) - f(1))g'(c) = (g(2) - g(1))f'(c) \Rightarrow (2^2 - 1^2)(3c^2) = (2^3 - 1^3)(2c) \Rightarrow$$

$$9c^2 = 14c \Rightarrow c(9c - 14) = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ ó } c = 14/9 \Rightarrow c = 14/9 \quad (0 \notin (0, 1))$$


---

## PROBLEMAS RESUELTOS 8.2

---

**PROBLEMA 1.** Probar que la ecuación  $x^3 + 3x - 2 = 0$  tiene exactamente una raíz real.

### Solución

Sea  $f(x) = x^3 + 3x - 2$ .

Esta función, por ser un polinomio, es diferenciable (y, por tanto, continua) en todo  $\mathbb{R}$ . Además,

$$f(0) = -2 \quad \text{y} \quad f(1) = 2$$

Por el teorema del valor intermedio, existe un  $a$  en el intervalo  $[0, 1]$  tal que

$$f(a) = 0 \Rightarrow a^3 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a \text{ es una raíz de la ecuación } x^3 + 3x - 2 = 0$$

Ahora probamos que  $a$  es la única raíz. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que  $b$  es otra raíz de la ecuación. Debemos tener que  $f(b) = 0$ .

Supongamos que  $a < b$ . La función  $f$  satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo  $[a, b]$ . Luego, existe un  $c$  en  $(a, b)$  tal que:

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 3c^2 + 3 = 0 \Rightarrow 3c^2 = -3 \Rightarrow c^2 = -1$$

Pero,  $c^2 = -1$ , ya que  $c^2 > 0$ . Esto demuestra que no existe tal  $b$ .

---

**PROBLEMA 2.** Usando el teorema de Rolle probar que un polinomio de grado 2

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

tiene a lo más dos raíces reales.

### Solución

Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que  $P(x)$  tiene tres raíces distintas. Sean éstas  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ . Es decir,  $P(x_1) = 0$ ,  $P(x_2) = 0$  y  $P(x_3) = 0$ .

El polinomio satisface las hipótesis del teorema de Rolle en cada uno de los intervalos  $[x_1, x_2]$  y  $[x_2, x_3]$ . Por tanto,

$$\exists c_1 \in (x_1, x_2) \text{ y } \exists c_2 \in (x_2, x_3) \text{ tales que } P'(c_1) = 0 \text{ y } P'(c_2) = 0.$$

Esto significa que el polinomio  $P'(x) = 2ax + b$  tiene dos raíces. Pero esto es imposible, ya que  $P'(x)$  es un polinomio de primer grado y tiene una única raíz, que es  $x = -b/2a$ .

---

**PROBLEMA 3.** Si  $a > 0$ , probar que el siguiente polinomio tiene, a lo más, una raíz real.

$$P(x) = x^{2n+1} + ax + b$$

**Solución**

Supongamos que  $P(x)$  tiene 2 dos raíces reales. Sean estas,  $x_1$  y  $x_2$  y que  $x_1 < x_2$ .

Se tiene que  $P(x_1) = 0$  y  $P(x_2) = 0$ . Por el teorema de Rolle, existe  $c \in (x_1, x_2)$  tal  $P'(c) = 0$ . Pero,

$$P'(x) = (2n + 1)x^{2n} + a \text{ y } P'(x) = 0, \Rightarrow x^{2n} = -\frac{a}{2(n+1)}. \text{ Esta ecuación, por}$$

ser  $a > 0$ , no tiene raíces reales y por tanto,  $P'(c)$  es imposible. En consecuencia,  $P(x) = x^{2n+1} + ax + b$  no puede tener dos raíces reales.

---

**PROBLEMA 4.** Si  $f$  es diferenciable,  $f(2) = -3$  y  $1 < f'(x) < 8$  si  $2 < x < 7$ , probar que  $2 < f(7) < 37$

**Solución**

Aplicando el teorema del valor medio a  $f$  en el intervalo  $[2, 7]$ : Existe  $c \in (2, 7)$  tal que:

$$\frac{f(7) - f(2)}{7 - 2} = f'(c) \Rightarrow \frac{f(7) - (-3)}{5} = f'(c) \Rightarrow f(7) = -3 + 5f'(c) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Pero, } 1 < f'(c) < 8 &\Rightarrow 5 < 5f'(c) < 40 && \text{(multiplicando por 5)} \\ &\Rightarrow 2 < -3 + 5f'(c) < 37 && \text{(sumando -3)} \\ &\Rightarrow 2 < f(7) < 37 && \text{(de (1))} \end{aligned}$$


---

**PROBLEMA 5.** Usando el teorema del valor medio probar que

$$\text{sen } x \leq x, \quad \forall x \geq 0$$

**Solución**

**Caso 1.**  $x = 0$

Para este caso, la desigualdad se cumple trivialmente:  $0 = \text{sen } 0 \leq 0$ .

**Caso 2.**  $x > 0$ .

La función  $f(x) = \operatorname{sen} x - x$  es diferenciable en todo  $\mathbb{R}$  y, por tanto, es diferenciable en el intervalo  $[0, x]$ . Por el teorema del valor medio, existe un  $c$  en el intervalo  $(0, x)$  tal que:

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0) \quad (1)$$

Pero,

$$f(x) = \operatorname{sen} x - x, \quad f(0) = \operatorname{sen} 0 - 0 = 0 \quad \text{y} \quad f'(c) = \cos c - 1$$

$$\text{Además,} \quad \cos c - 1 \leq 0 \quad (2)$$

Reemplazando los valores de  $f(x)$ ,  $f(0)$  y  $f'(c)$  en (1) y considerando (2):

$$\operatorname{sen} x - x - 0 = (\cos c - 1)x \leq 0x \Rightarrow \operatorname{sen} x - x \leq 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x \leq x$$


---

**PROBLEMA 6.** Probar que:

$$\text{a.} \quad |\tan y - \tan x| \geq |y - x|, \quad \forall x, \forall y \text{ en } (-\pi/2, \pi/2)$$

$$\text{b.} \quad |\tan y + \tan x| \geq |y + x|, \quad \forall x, \forall y \text{ en } (-\pi/2, \pi/2)$$

**Solución**

**a.** Si  $x < y$ , la desigualdad se cumple trivialmente.

Supongamos que  $x < y$ . (Se procede en forma similar si  $y < x$ )

La función  $f(\theta) = \tan \theta$  es diferenciable en  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Luego, para  $x$  e  $y$  en este intervalo, por el teorema del valor medio, existe  $c \in (x, y)$  tal que:

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \Rightarrow \tan y - \tan x = \sec^2 c (y - x) \Rightarrow$$

$$|\tan y - \tan x| = |\sec^2 c| |y - x| \geq |y - x|, \quad (\sec \theta \geq 1)$$

**b.** Si  $x$  está en  $(-\pi/2, \pi/2)$ ,  $-x$  también lo está. Luego, por la parte a, reemplazando  $x$  por  $-x$  y tomando en cuenta que función tangente es impar, se tiene:

$$|\tan y - \tan(-x)| \geq |y - (-x)| \Rightarrow |\tan y + \tan x| \geq |y + x|$$


---

**PROBLEMA 7.** Sean  $a$  y  $b$  números reales tales que  $0 < a < b$ . Probar que:

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

**Solución**

Aplicando el teorema del valor medio a  $f(x) = \ln x$  en  $[a, b]$ , tenemos:

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} = \frac{1}{c}, \text{ donde } a < c < b \quad (1)$$

Pero,

$$\begin{aligned} 0 < a < c < b &\Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a} & (\text{de (1)}) \\ &\Rightarrow \frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a} \\ &\Rightarrow \frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a} \end{aligned}$$

**PROBLEMA 8.** Probar que:  $3\cos^{-1}x - \cos^{-1}(3x - 4x^3) = \pi$ , si  $|x| \leq \frac{1}{2}$

**Solución**

Derivamos la función  $f(x) = 3\cos^{-1}x - \cos^{-1}(3x - 4x^3)$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}} \\ &= -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{1-9x^2+24x^4-16x^6}} \quad (1) \end{aligned}$$

Se verifica fácilmente que 1 y -1 son raíces de  $1 - 9x^2 + 24x^4 - 16x^6$ . Usando este resultado logramos la factorización:

$$1 - 9x^2 + 24x^4 - 16x^6 = -(x-1)(x+1)(1-8x^2+16x^4) = (1-x^2)(1-4x^2)^2$$

Luego, regresando a (1):

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)^2}} \\ &= -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(1-4x^2)}{|1-4x^2|\sqrt{1-x^2}} \quad (2) \end{aligned}$$

Pero,  $|x| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -4x^2 \geq -1 \Rightarrow 1 - 4x^2 \geq 0$

$$\Rightarrow |1 - 4x^2| = 1 - 4x^2$$

Ahora, regresando a (2):

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3(1-4x^2)}{|1-4x^2|\sqrt{1-x^2}} = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

En consecuencia, existe una constante  $C$  tal que  $f(x) = C$ . Pero

$$C = f(0) = 3\cos^{-1}0 - \cos^{-1}0 = 3\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$$

Luego,

$$3\cos^{-1}x - \cos^{-1}(3x - 4x^2) = \pi$$

### **PROBLEMA 9.** Teorema del valor medio de Cauchy

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones tal que:

1.  $f$  y  $g$  son continuas en el intervalo cerrado  $[a, b]$ .
2.  $f$  y  $g$  son diferenciables en el intervalo abierto  $(a, b)$

Entonces  $\exists c \in (a, b)$  tal que:

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

#### **Solución**

Construimos una función que satisfaga las hipótesis del teorema del valor medio. Esta función es:

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) \quad (1)$$

Como  $f$  y  $g$  son continuas en  $[a, b]$  y diferenciables en  $(a, b)$ , la función  $h$  también cumple estas propiedades. Por el teorema del valor medio, existe un  $c \in (a, b)$  tal que:

$$h(b) - h(a) = h'(c)(b - a) \quad (2)$$

Pero,

$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b)$$

$$h(a) = (f(b) - f(a))g(a) - (g(b) - g(a))f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

$$h'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x) \quad (3)$$

Vemos que  $h(b) = h(a)$  y, por tanto, de (1) y (3) obtenemos:

$$h'(c)(b - a) = 0 \Rightarrow h'(c) = 0$$

$$\Rightarrow (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0$$

$$\Rightarrow (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 8.2

*En los problemas del 1 al 4, verificar que la función dada satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo indicado. Hallar todos los puntos  $c$  que satisfacen la conclusión del teorema.*

1.  $f(x) = x^3 - 4x$ ,  $[0, 2]$

2.  $g(x) = \sin x + \cos x - 1$ ,  $[0, 2\pi]$

3.  $h(x) = 8x^{2/3} - x^{5/3}$ ,  $[0, 8]$

4.  $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$ ,  $[0, 4]$

*En los problemas del 5 al 10, verificar que la función dada satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo indicado. Hallar todos los puntos  $c$  que satisfacen la conclusión del teorema.*

5.  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $[-1, 0]$

6.  $g(x) = \frac{1}{x} + x$ ,  $[1, 2]$

7.  $h(x) = 2 + \sqrt[3]{x-1}$ ,  $[1, 9]$

8.  $f(x) = \ln(1+x^2)$ ,  $[0, 1]$

9.  $h(x) = \ln \cos x$ ,  $[0, \pi/3]$

10.  $g(x) = \tan^{-1}x$ ,  $[-1, 1]$

11. Probar que la ecuación  $x^5 + 10x + 4 = 0$  tiene exactamente una raíz real

12. Si  $a > 0$ , probar que la ecuación  $x^3 + ax - 1 = 0$  tiene exactamente una raíz real.

13. Probar que  $x^4 + 4x + b = 0$  tiene, a lo más, dos raíces reales.

Sugerencia: Si  $f(x) = x^4 + 4x + b$ . ¿Cuántas raíces tiene  $f'(x) = 0$ ?

14. Si  $a$  y  $b$  son constantes y  $n$  un natural, probar que la ecuación

$$x^{2n+1} + ax + b = 0$$

tiene, a lo más, tres raíces reales.

Sugerencia: Sea  $f(x) = x^{2n+1} + ax + b$ . ¿Cuántas raíces reales tiene  $f'(x) = 0$ ?

15. Si  $a$  y  $b$  son constantes y  $n$  un natural, probar que la ecuación

$$x^{2n} + ax + b = 0$$

tiene, a lo más, dos raíces reales.

Sugerencia: Sea  $f(x) = x^{2n} + ax + b$ . ¿Cuántas raíces reales tiene  $f'(x) = 0$ ?

16. Probar que la ecuación  $3\tan x + x^2 = 2$  tiene exactamente una raíz en  $[0, \pi/4]$ .

17. Si  $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ , probar que la ecuación  $P'(x) = 0$  tiene tres raíces reales.

18. Probar que un polinomio de grado 3 tiene a lo más 3 raíces reales. Sugerencia:

Suponga que tiene 4 raíces y razone como en el problema resuelto 2.

19. Probar que un polinomio de grado  $n$  tiene a lo más  $n$  raíces reales. Sugerencia:

Suponga que tiene  $n + 1$  raíces y razone como en el problema resuelto 3. No olvides usar inducción.

20. Si  $g(1) = 8$  y  $g'(x) \geq 3$  para todo  $x$ , ¿cuál es el menor valor posible que puede tener  $g(5)$ ?

21. Sean  $a$  y  $b$  reales y  $n$  un natural tales que  $0 < a < b$  y  $n > 1$ . Probar que:

$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$$

Sugerencia: Aplicar el teorema del valor medio a  $f(x) = x^n$  en  $[a, b]$

22. Probar que  $e^x > 1 + x$ ,  $\forall x > 0$

23. a. Probar que para cualquier  $x > 1$  existe  $c \in (1, x)$  tal que  $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$

b. Usar la parte a. para probar que:  $\sqrt{x} < \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$ , para todo  $x > 1$

Sugerencia: Aplicar el teorema del valor medio a  $f(x) = \sqrt{x}$  en  $[1, x]$ .

24. Si  $g$  es impar y diferenciable en  $\mathbb{R}$ , demostrar que para todo real  $a > 0$ , existe

$$c \in (-a, a) \text{ tal que } g'(c) = \frac{g(a)}{a}$$

25. Usando el teorema del valor medio, probar que  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ .

26. Usando el teorema del valor medio, probar que  $|\tan^{-1}x - \tan^{-1}y| \leq |x - y|$ .

27. Probar que:  $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

28. Probar que:  $2\sin^{-1}x = \cos^{-1}(1 - 2x^2)$ , para  $x \geq 0$ .

Sugerencia: Sea  $f(x) = 2\sin^{-1}x - \cos^{-1}(1 - 2x^2)$  y probar que  $f$  es constante:

$$f(x) = C. \text{ Luego, mostrar que } C = 0$$

29. Probar que:  $2\tan^{-1}x + \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \begin{cases} -\pi, & \text{si } x \leq -1 \\ \pi, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

**En los problemas del 30 al 32, verificar que la función dada satisface las hipótesis del teorema del valor medio de Cauchy en el intervalo indicado. Hallar los puntos  $c$  que satisfacen la conclusión del teorema.**

30.  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \cos x$ , en  $[0, \pi/2]$ .

31.  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$ , en  $[1, e]$

32.  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = e^{-x}$ , en  $[0, 1]$

**SECCION 8.3**

**MONOTONIA, CONCAVIDAD Y CRITERIOS**

**PARA EXTREMOS LOCALES**

Sea  $f$  una función y  $I$  un intervalo. Recordemos que:

1.  $f$  es **creciente** en el intervalo  $I$  si para cualquier par de puntos  $x_1, x_2$  de  $I$  se cumple que:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

2.  $f$  es **decreciente** en el intervalo  $I$  si para cualquier par de puntos  $x_1, x_2$  de  $I$  se cumple que:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

3.  $f$  es **monótona** en el intervalo  $I$  si  $f$  es creciente o decreciente en  $I$ .

Contamos con un criterio que nos permitirá saber si una función es creciente o decreciente, conociendo el signo de la derivada.

**TEOREMA 8.8** Criterio de Monotonía.

Sea  $f$  una función continua en un intervalo  $I$  y diferenciable en todo punto interior de  $I$ .

1. Si  $f'(x) > 0$  en todo punto interior de  $I$ , entonces  $f$  es **creciente** en  $I$ .
2. Si  $f'(x) < 0$  en todo punto interior de  $I$ , entonces  $f$  es **decreciente** en  $I$ .

**Demostración**

1. Sean  $x_1$  y  $x_2$  dos puntos cualesquiera de  $I$ . Supongamos que  $x_1 < x_2$ . Como  $[x_1, x_2]$  está contenido en el intervalo  $I$ ,  $f$  es continua en  $[x_1, x_2]$  y es diferenciable en  $(x_1, x_2)$ . Por el teorema del valor medio, existe  $c$  en  $(x_1, x_2)$  tal que:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Pero  $f'(c) > 0$  y  $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Como  $x_1$  y  $x_2$  son dos puntos cualesquiera de  $I$ , se concluye que  $f$  es creciente en  $I$ .

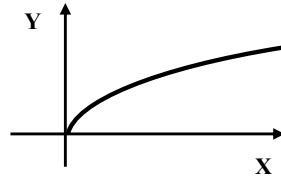
2. Se procede como en 1.

**EJEMPLO 1.** Probar que la función  $f(x) = \sqrt{x}$  es creciente en todo su dominio.

**Solución**

El dominio de  $f$  es el intervalo  $[0, +\infty)$ , en el cual  $f$  es continua. Además  $f$  es diferenciable en el intervalo  $(0, +\infty)$  y se cumple que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$



Luego, por la parte 1 del teorema anterior, concluimos que  $f(x) = \sqrt{x}$  es creciente en todo su dominio,  $[0, +\infty)$ .

La mayor parte de las funciones con las que trabajamos son crecientes en algunos intervalos y decrecientes en otros. A estos intervalos los llamaremos **intervalos de crecimiento y decrecimiento**, respectivamente. De acuerdo al teorema anterior, estos intervalos están comprendidos entre los puntos donde la derivada se anula o no está definida, o sea, los puntos críticos de  $f$ .

**EJEMPLO 2.** Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$$

**Solución**

Hallemos los números críticos de  $f$ :

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x+1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ó } x = 2$$

Ahora analizamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos:

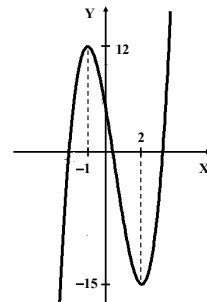
$$(-\infty, -1), (-1, 2) \text{ y } (2, +\infty):$$

$$x \in (-\infty, -1) \Leftrightarrow x < -1 \Rightarrow x+1 < 0 \text{ y } x-2 < 0 \Rightarrow$$

$$f'(x) = 6(x+1)(x-2) > 0 \Rightarrow f \text{ es creciente en el intervalo } (-\infty, -1].$$

Este resultado, así como los correspondientes a los otros intervalos, los sintetizamos en la siguiente tabla.

Aquí, la flecha ↗ indica que  $f$  es creciente y la flecha ↘ indica que  $f$  es decreciente.



$$f'(x) = 6(x + 1)(x - 2)$$

$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$f'(x) = 6(-)(-) = +$ ↗	$f'(x) = 6(+)(-) = -$ ↘	$f'(x) = 6(+)(+) = +$ ↗	

La tabla dice que  $f$  es Creciente en  $(-\infty, -1]$  y en  $[2, +\infty)$  y decreciente en  $[-1, 2]$

### CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA EXTREMOS LOCALES

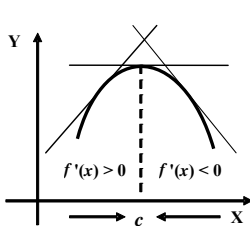
El teorema anterior nos permite determinar, fácilmente, cuando un número crítico da lugar a un mínimo local, un máximo local o a ninguno de los dos casos. En el ejemplo anterior, examinemos el número crítico  $-1$ . El gráfico muestra que antes de  $-1$ , en el intervalo  $(-\infty, -1)$ ,  $f$  es creciente y después de  $-1$ , en el intervalo  $(-1, 2)$ ,  $f$  es decreciente. En consecuencia,  $f(-1) = 12$  es un máximo local. Los términos creciente y decreciente, de acuerdo al teorema anterior, podemos sustituirlos por  $f'(x) > 0$  en  $(-\infty, -1)$  y por  $f'(x) < 0$  en  $(-1, 2)$ .

En términos precisos, tenemos el siguiente teorema.

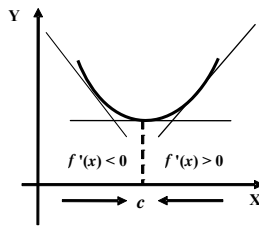
**TEOREMA 8.9** Criterio de la Primera Derivada para Extremos Locales.

Sea  $f$  una función continua en un intervalo  $(a, b)$  y sea  $c \in (a, b)$  un punto crítico de  $f$ .

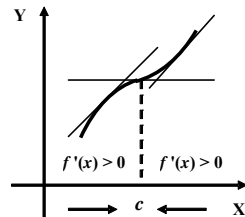
1. Si  $f'(x) > 0$  para  $x \in (a, c)$  y  $f'(x) < 0$  para  $x \in (c, b)$ , entonces  $f(c)$  es un **máximo local**.
2. Si  $f'(x) < 0$  para  $x \in (a, c)$  y  $f'(x) > 0$  para  $x \in (c, b)$ , entonces  $f(c)$  es **mínimo local**.
3. Si  $f'(x)$  tiene el mismo signo en  $(a, c)$  y en  $(c, b)$ , entonces  $f(c)$  **no es un extremo local**.



**Máximo Local**



**Mínimo Local**



**No hay Extremo Local**

**Demostración**

Estos resultados siguen inmediatamente del criterio de monotonía (Teorema 8.7).

**EJEMPLO 3.** Hallar los extremos locales de la función  $f(x) = x(5 - x)^{2/3}$

**Solución**

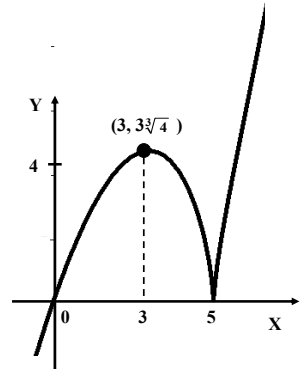
**Paso 1.** Hallamos los números críticos:

$$f'(x) = x\left(\frac{2}{3}\right)(5-x)^{-1/3}(-1) + (5-x)^{2/3} = \frac{5(3-x)}{3\sqrt[3]{5-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 5(3-x) = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Además,  $f'(x)$  no existe en  $x = 5$ .

Luego, los números críticos de  $f$  son 3 y 5.



**Paso 2.** Aplicamos el criterio de la primera derivada. Para esto, analizamos el signo de la derivada en los intervalos  $(-\infty, 3)$ ,  $(3, 5)$  y  $(5, +\infty)$ .

Los resultados los sintetizamos en la siguiente tabla:

$$f'(x) = \frac{5(3-x)}{3\sqrt[3]{5-x}}$$

$-\infty$	$3$	$5$	$+\infty$
$f'(x) = \frac{(+)}{(+)} = +$	$f'(x) = \frac{(-)}{(+)} = -$	$f'(x) = \frac{(-)}{(-)} = +$	
↗	↘	↗	

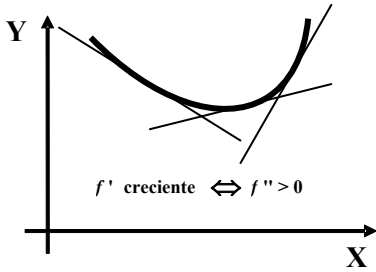
El criterio de la primera derivada nos dice que  $f(3) = 3\sqrt[3]{4}$  es un máximo local y  $f(5) = 0$  es un mínimo local.

## CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXION

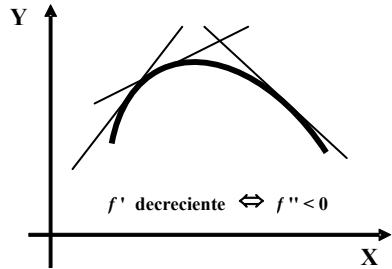
Las figuras siguientes, a pesar de ser los gráficos de funciones crecientes en el intervalo  $[a, b]$ , tienen una diferencia resaltante: Ellas se "doblan" en direcciones opuestas. La primera es **cóncava hacia arriba** y la segunda es **cóncava hacia abajo**. Para definir estos términos con precisión observemos sus correspondientes rectas tangentes. La gráfica que es cóncava hacia arriba siempre se mantiene encima de cualquiera de sus rectas tangentes. En cambio, la gráfica cóncava hacia abajo siempre se mantiene por debajo de cualquiera de sus tangentes. Ahora, si en lugar de las tangentes nos concentramos en sus pendientes, vemos que en las gráficas cóncavas hacia arriba, las pendientes van creciendo, mientras que en las cóncavas hacia abajo las pendientes van decreciendo. Como la pendiente está dada por la derivada, entonces concavidad hacia arriba significa derivada creciente y concavidad hacia abajo significa derivada decreciente. Este último resultado será nuestra definición de concavidad.

**DEFINICION.** Sea  $f$  una función diferenciable en un intervalo abierto  $I$ .

1. El gráfico de  $f$  es **cóncavo hacia arriba** en  $I$  si  $f'$  es **creciente** en  $I$ .
2. El gráfico de  $f$  es **cóncavo hacia abajo** en  $I$  si  $f'$  es **decreciente** en  $I$ .



**Cóncava hacia arriba**



**Cóncava hacia abajo**

El criterio de monotonía aplicado a la función derivada nos proporciona un criterio de concavidad.

Usaremos la frase: " **$f$  es dos veces diferenciable en un intervalo  $I$** " para indicar que la segunda derivada,  $f''(x)$ , existe, en todo punto  $x$  de  $I$ .

**TEOREMA 8.10** Criterio de concavidad.

Sea  $f$  una función dos veces diferenciable en un intervalo abierto  $I$ .

1. Si  $f''(x) > 0$  para todo punto  $x$  interior de  $I$ , entonces el gráfico de  $f$  es **cóncavo hacia arriba** en  $I$ .
2. Si  $f''(x) < 0$  para todo punto  $x$  interior de  $I$ , entonces el gráfico de  $f$  es **cóncavo hacia abajo** en  $I$ .

**Demostración**

Simplemente se aplica el criterio de monotonía a la función derivada  $f'$ .

**EJEMPLO 4.** Hallar los intervalos de concavidad de la siguiente función  $f$ . Es decir, hallar los intervalos donde  $f$  es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

**Solución**

Debemos hallar los intervalos donde  $f''(x) > 0$  y donde  $f''(x) < 0$ .

Tenemos que:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad \text{y} \quad f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

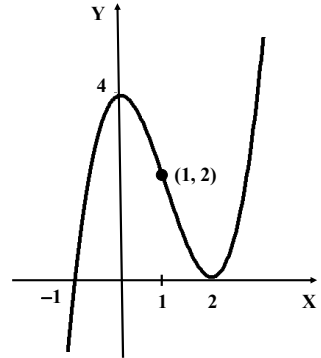
Luego,  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$  y

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$  y  $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ .

Para resumir, tenemos la siguiente tabla.

$$f''(x) = 6(x - 1)$$

$-\infty$	$+\infty$
$1$	
$f''(x) = 6(-) = -$	$f''(x) = 6(+) = +$
$\cap$	$\cup$



Los símbolos  $\cup$  y  $\cap$  significan cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo, respectivamente.

Luego, el gráfico de  $f$  es cóncavo hacia abajo en el intervalo  $(-\infty, 1)$ , y es cóncavo hacia arriba en el intervalo  $(1, +\infty)$ .

### PUNTOS DE INFLEXION Y NUMEROS CRITICOS DE SEGUNDO ORDEN

En el gráfico del ejemplo anterior el punto  $(1, 2)$  es un punto muy especial para la concavidad. Precisamente, en este punto, el gráfico cambia de cóncavo hacia abajo a cóncavo hacia arriba. Por esta razón a este punto se le llama punto de inflexión. Observar que para el punto de inflexión  $(1, 2)$  se cumple que  $f''(1) = 0$ .

**DEFINICION.** Sea  $f$  una función continua en  $c$ . Diremos que el punto  $(c, f(c))$  es un **punto de inflexión** del gráfico de  $f$  si éste es cóncavo hacia arriba a un lado de  $c$  y cóncavo hacia abajo en el otro lado.

Si  $(c, f(c))$  es un punto de inflexión de la función  $y = f(x)$ , para los  $x$  cercanos a  $c$  debe cumplirse que los signos de  $f''(x)$  antes de  $c$  y después de  $c$  deben ser distintos. En el mismo punto  $c$  la derivada  $f''(x)$  puede o no existir, pero si existe, debe cumplirse que  $f''(c) = 0$ . Luego, los candidatos a ser puntos de inflexión son los puntos donde  $f''(x) = 0$  o  $f''(x)$  no existe, o sea los **números críticos de la función derivada  $f'$** , a los que llamaremos **números críticos de segundo orden de  $f$** .

**EJEMPLO 5.** Hallar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión del gráfico de la función

$$f(x) = -x^4 + 6x^2 - 1$$

**Solución**

**Paso 1.** Números críticos de segundo orden:

$$f'(x) = -4x^3 + 12x \Rightarrow$$

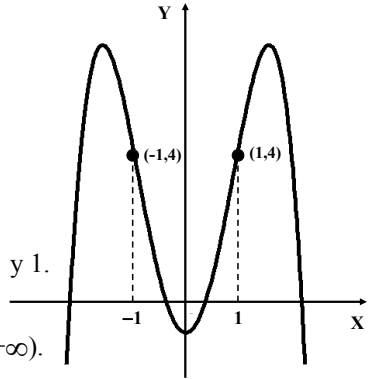
$$f''(x) = -12x^2 + 12 = -12(x+1)(x-1) \Rightarrow$$

$$f''(x) = -12(x+1)(x-1)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -12(x+1)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ó } x = 1$$

Los números críticos de segundo orden son  $-1$  y  $1$ .



**Paso 2.** Signo de  $f''$  en  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$  y  $(1, +\infty)$ .

$$f''(x) = -12(x+1)(x-1)$$

$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f''(x) = -(-)(-) = -$	$f''(x) = -(+)(-) = +$	$f''(x) = -(+)(+) = -$	
∩	∪	∩	

La gráfica de  $f$  es cóncava hacia abajo en los intervalos  $(-\infty, -1)$  y  $(1, +\infty)$ , y es cóncava hacia arriba en  $(-1, 1)$ .

La tabla, además, nos indica que hay cambios de concavidad al pasar por  $-1$  y por  $1$ . En consecuencia, tenemos dos puntos de inflexión:

$$(-1, f(-1)) = (-1, 4) \quad \text{y} \quad (1, f(1)) = (1, 4).$$

**EJEMPLO 6.** Dada la función  $g(x) = \sqrt[3]{x-2} + 1$ . Hallar:

- a. Los números críticos de segundo orden de  $g$ .
- b. Los intervalos de concavidad.
- c. Los puntos de inflexión.

**Solución**

a. Números críticos de segundo orden de  $g$ :

$$g(x) = (x-2)^{1/3} + 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3}(x-2)^{-2/3} \Rightarrow$$



$$g''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-2)^5}}$$

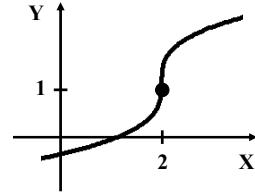
$g''(x)$  no se anula en ningún punto. Sin embargo,  $g''(x)$  no existe en  $2$ .

Luego,  $g$  tiene un solo número crítico de segundo orden, que es  $2$ .

b. Signos de  $g''$  en los intervalos  $(-\infty, 2)$  y  $(2, +\infty)$ :

$$g''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-2)^5}}$$

$-\infty$	$2$	$+\infty$
$g''(x) = -\frac{2}{(-)} = +$	$g''(x) = -\frac{2}{(+)} = -$	
		



El gráfico es cóncavo hacia arriba en  $(-\infty, 2)$  y hacia abajo en  $(2, +\infty)$ .

c. De acuerdo al resultado anterior,  $(2, f(2)) = (2, 1)$  es un punto de inflexión.

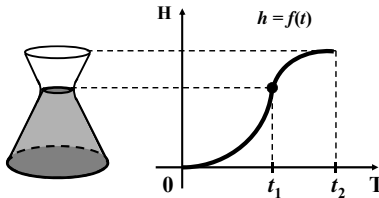
El siguiente ejemplo nos presenta los conceptos de concavidad y de punto de inflexión presentes en la vida real.

**EJEMPLO 7.** Se vierte agua a razón constante (un volumen fijo por unidad de tiempo) en el frasco mostrado en la figura. Construir un gráfico de la altura del agua en el frasco como función del tiempo:  $h = f(t)$ .

**Solución**

Sin duda que la función  $h = f(t)$  es creciente. Aún más la velocidad con que crece la altura  $h$  del agua es variable. Al inicio, debido a la forma del frasco, la velocidad  $v(t)$  con que sube el agua crece hasta llegar al cuello del frasco (cuando  $h = f(t_1)$ ). A partir de este punto, la velocidad es decreciente. En resumen:

1.  $v(t)$  es creciente en  $[0, t_1]$  y, por tanto,  $v'(t) > 0$  en  $(0, t_1)$
2.  $v(t)$  es decreciente en  $[t_1, t_2]$  y, por tanto,  $v'(t) < 0$  en  $(t_1, t_2)$



Pero,  $v(t) = f'(t)$  y, por tanto,  $v'(t) = f''(t)$ . Luego, de (1) y (2):

- (3)  $f''(t) > 0$  en  $(0, t_1)$  y
- (4)  $f''(t) < 0$  en  $(t_1, t_2)$ ,

de donde concluimos que el gráfico de  $h = f(t)$  es cóncavo hacia arriba en  $(0, t_1)$ , es cóncavo hacia abajo en  $(t_1, t_2)$  y que  $(t_1, f(t_1))$  es un punto de inflexión.

**CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA EXTREMOS LOCALES**

La segunda derivada nos proporciona otro método simple para determinar la naturaleza de un número crítico.

**TEOREMA 8.11** Criterio de la segunda derivada para extremos locales.

Supongamos que  $f'(c) = 0$  y que  $f''$  es continua en un intervalo abierto que contiene a  $c$ .

1.  $f''(c) > 0 \Rightarrow f(c)$  es un **mínimo local**.
2.  $f''(c) < 0 \Rightarrow f(c)$  es un **máximo local**.

**Demostración**

Como  $f'(c) = 0$ ,  $c$  es número crítico de  $f$ .

1. Como  $f''(c) > 0$  y  $f''$  es continua en  $c$ , existe un intervalo abierto  $I$  tal que

$$f''(x) > 0, \forall x \in I.$$

Esto significa, por el criterio de concavidad, que el gráfico de  $f$  es cóncavo hacia arriba en el intervalo  $I$ . En consecuencia,  $f(c)$  es un mínimo local.

2. Como  $f''(c) < 0$  y  $f''$  es continua en  $c$ , existe un intervalo abierto  $I$  tal que

$$f''(x) < 0, \forall x \in I.$$

Esto significa, por el criterio de concavidad, que el gráfico de  $f$  es cóncavo hacia abajo en el intervalo  $I$ . En consecuencia,  $f(c)$  es un máximo local.

**EJEMPLO 8.** Determinar, aplicando el criterio de la segunda derivada, los extremos locales de

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - 4.$$

**Solución**

Hallamos los números críticos de  $f$ :

$$f'(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x + 1)(x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -(x + 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ó } x = 3$$

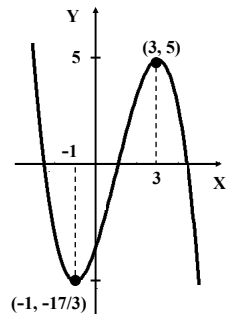
Los números críticos de  $f$  son  $-1$  y  $3$ .

Aplicamos el criterio de la segunda derivada:

$$f''(x) = -2x + 2 = -2(x - 1)$$

Como  $f''(-1) = -2(-1 - 1) = 4 > 0$ , entonces  $f(-1) = -\frac{17}{3}$  es un mínimo local.

Como  $f''(3) = -2(3 - 1) = -4 < 0$ , entonces  $f(3) = 5$  es un máximo local.



## EXTREMO LOCAL UNICO EN UN INTERVALO ARBITRARIO

El teorema del valor extremo (teorema 8.1) garantiza la existencia de valores extremos de una función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$ . Desafortunadamente, no tenemos un teorema de ese calibre para intervalos que no son cerrados. Sin embargo, algo podemos conseguir si sabemos que una función continua tiene un único extremo local en un intervalo cualquiera  $I$ . El intervalo  $I$  no tiene ninguna restricción. Este puede ser abierto, cerrado, semicerrado, finito o infinito.

### TEOREMA 8.12 Un extremo local único es un extremo absoluto.

Sea  $f$  una función continua en un intervalo  $I$ . Si  $f(c)$  es un **extremo local único en  $I$** , entonces  $f(c)$  es un **extremo absoluto**. En términos más precisos:

- Si  $f(c)$  es un máximo local en  $I$ , entonces  $f(c)$  es un máximo absoluto de  $f$  en  $I$ .
- Si  $f(c)$  es un mínimo local en  $I$ , entonces  $f(c)$  es un mínimo absoluto de  $f$  en  $I$ .

### Demostración

Ver el problema resuelto 3.

**EJEMPLO 9.** Hallar los extremos absolutos de  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ , en el intervalo abierto  $(0, +\infty)$ .

### Solución

Números críticos:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ o } x = -1$$

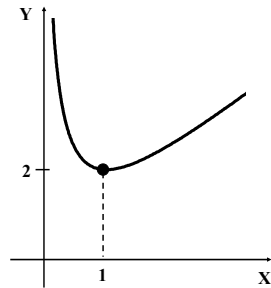
Desechamos a  $-1$  por no estar en  $(0, +\infty)$ .

Apliquemos el crítico de la segunda derivada a 1:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0$$

Luego,  $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$  es un mínimo local.

Como  $f(1) = 2$  es el único número extremo local en  $(0, +\infty)$ , entonces  $f(1) = 2$  es mínimo absoluto de  $f$  en el intervalo  $(0, +\infty)$ .



Si el intervalo  $I$  del teorema anterior es semiabierto:  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, +\infty)$ ,  $(-\infty, b]$ , es posible que  $f$  tenga los dos extremos absolutos. Es claro que, de ser así, el segundo extremo debe el valor de la función en el extremo cerrado. El siguiente ejemplo nos ilustra esta situación.

**EJEMPLO 10.** Hallar los extremos absolutos de la función

$$f(x) = 9xe^{-x},$$

en el intervalo  $[0, +\infty)$

**Solución**

Hallemos los números críticos de  $f$ :

$$f'(x) = -9xe^{-x} + 9e^{-x} = -9e^{-x}(x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -9e^{-x}(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

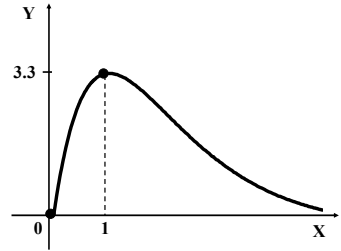
$f$  tiene un único número crítico en el intervalo  $[0, +\infty)$ , que es  $x = 1$ .

Apliquemos el criterio de la segunda derivada:

$$f''(x) = 9e^{-x}(x - 1) - 9e^{-x} = 9e^{-x}(x - 2), \quad f''(1) = 9e^{-1}(1 - 2) = -\frac{9}{e} < 0$$

Luego,  $f(1) = 9(1)e^{-1} = \frac{9}{e} \approx 3.3$  es un máximo local, el cual, por ser el único extremo local,  $f(1) = \frac{9}{e} \approx 3.3$  es el máximo absoluto en el intervalo  $[0, +\infty)$ ,

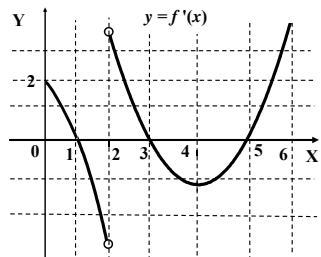
Por otro lado, como  $0 < f(x)$  para  $x > 0$  y  $f(0) = 0$ , concluimos que  $f(0) = 0$  es el mínimo absoluto de  $f$  en  $[0, +\infty)$ .



## PROBLEMAS RESUELTOS 8.3

**PROBLEMA 1.** El gráfico adjunto es el gráfico de la derivada  $f'$  de una función continua  $f$  con dominio  $[0, 6]$ . Determinar:

- a. Los intervalos de monotonía de  $f$ .
- b. Los números críticos de  $f$  y decidir la clase de extremo local a que dan lugar.
- c. Los intervalos de concavidad de  $f$ .
- d. Los números críticos de segundo orden de  $f$  y los puntos de inflexión.
- e. Esbozar el gráfico de  $f$  sabiendo que  $f(0) = 3$



**Solución.**

a. Vemos que  $f'(x) > 0$  en los intervalos  $(0, 1)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(5, 6)$  y que  $f'(x) < 0$  en los intervalos  $(1, 2)$  y  $(3, 5)$ . Luego,  $f$  es creciente en  $[0, 1]$ ,  $[2, 3]$ ,  $[5, 6]$  y es decreciente en  $[1, 2]$  y  $[3, 5]$ .

b. Son números críticos: 1, 2, 3, y 5. En efecto:

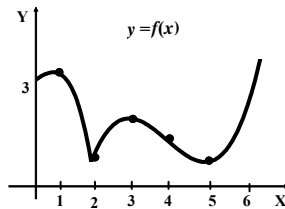
$$f'(1) = f'(3) = f'(5) = 0 \quad \text{y no existe } f'(2).$$

La parte a. y el criterio de la primera derivada nos dicen que  $f(1)$  y  $f(3)$  son máximos locales y que  $f(2)$  y  $f(5)$  son un mínimos locales.

c.  $f'(x)$  es decreciente en  $(0, 2)$  y en  $(2, 4)$ .  $f'(x)$  es creciente en  $(4, 6)$ . Luego,  $f$  es cóncava hacia abajo en  $(0, 2)$  y en  $(2, 4)$ , y es cóncava hacia arriba en  $(4, 6)$ .

d. La gráfica de  $f'$  nos muestra que  $f'$  tiene un mínimo local en  $x = 4$  y, por lo tanto,  $f''(4) = 0$ . Por otro lado, como  $f'$  es discontinua en  $x = 2$ , no existe  $f''(2)$ . Luego, tenemos dos números críticos de segundo orden, 2 y 4. Sin embargo, la parte c. anterior nos dice que sólo  $(4, f(4))$  es un punto de inflexión.

e. La gráfica que esbozamos sólo nos muestra la forma de ella, sin mucha precisión en cuanto a las ordenadas de los puntos notables, ya que estas ordenadas son desconocidas.



**PROBLEMA 2.** Dada la función  $f(x) = x^4 e^{-x}$ , hallar:

- Los números críticos.
- los intervalos de monotonía.
- Los extremos locales.
- Los números críticos de segundo orden,
- Los intervalos de concavidad.
- Los puntos de inflexión.

**Solución**

**a. Números Críticos e Intervalos de monotonía.**

$$f'(x) = 4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x} = x^3(4-x)e^{-x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = x^3(4-x)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3(4-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ó} \quad x = 4$$

Los números críticos son 0 y 4.

b. Intervalos de monotonía:

$$f'(x) = x^3(4-x)e^{-x}$$

$-\infty$	$0$	$4$	$+\infty$
$f'(x) = (-)(+)(+) = -$ 	$f'(x) = (+)(+)(+) = +$ 	$f'(x) = (+)(-)(+) = -$ 	

La función  $f$  es decreciente en  $(-\infty, 0]$  y en  $[4, +\infty)$  y es creciente en  $[0, 4]$ .

c. Extremos relativos.

El cuadro anterior y el criterio de la primera derivada nos dicen que:

$$f(0) = 0 \text{ es un mínimo local y } f(4) = 4^4 e^{-4} = \frac{256}{e^4} \approx 4.7 \text{ es un máximo local.}$$

d. Intervalos de concavidad y puntos de inflexión

$$f''(x) = 12x^2 e^{-x} - 4x^3 e^{-x} - (4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x}) = x^2(x^2 - 8x + 12) e^{-x} \Rightarrow$$

$$f''(x) = x^2(x-2)(x-6) e^{-x}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \text{ ó } x = 6$$

Los números críticos de segundo orden son: 0, 2 y 6.

e. Intervalos de concavidad:

$$f''(x) = x^2(x-2)(x-6) e^{-x}$$

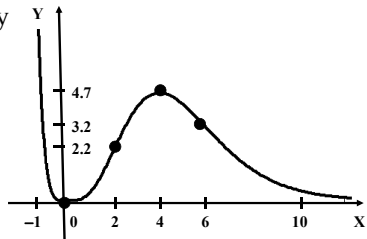
$-\infty$	$0$	$2$	$6$	$+\infty$
$f''(x) = (+)(-)(-)(+) = +$ 	$f''(x) = (+)(-)(-)(+) = +$ 	$f''(x) = (+)(+)(-)(+) = -$ 	$f''(x) = (+)(+)(+)(+) = +$ 	

La tabla nos dice que la gráfica de  $f$  es cóncava hacia arriba en  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 2)$  y en  $(6, +\infty)$ ; y es cóncava hacia abajo  $(2, 6)$ .

Los puntos de inflexión son:

$$(2, f(2)) = (2, 16e^{-2}) \approx (2, 2.2) \text{ y}$$

$$(6, f(6)) = (6, 1296e^{-6}) \approx (6, 3.2)$$



**PROBLEMA 3.** Probar el teorema 8.12.

Sea  $f$  una función continua en un intervalo  $I$ . Si  $f$  tiene un **extremo local único en  $I$** , entonces ese extremo local es un **extremo absoluto**. Aún más,

- a. Si  $f(c)$  es un **máximo local** en  $I$ , entonces  $f(c)$  es el **máximo absoluto** de  $f$  en  $I$ .
- b. Si  $f(c)$  es un **mínimo local** en  $I$ , entonces  $f(c)$  es el **mínimo absoluto** de  $f$  en  $I$ .

**Solución**

Probamos sólo la parte a. Para parte b. se procede en forma similar.

- a. Sea  $f(c)$  un máximo local y que es el único en el intervalo  $I$ . Por definición,  $c$  es un punto interior de  $I$ . Procedemos por reducción al absurdo.

Si  $f(c)$  no es máximo absoluto, existe un  $d$  en  $I$  tal que  $f(c) < f(d)$ . Supongamos que  $c < d$ . Por ser  $f(c)$  un máximo local, existen números  $x_1$ , entre  $c$  y  $d$ , tal que

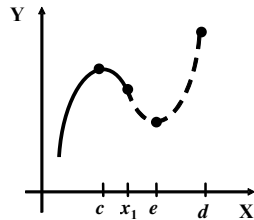
$$f(x_1) < f(c) < f(d) \quad (1)$$

Pero, por el teorema del valor extremo, existe un número  $e$ , en el intervalo cerrado  $[c, d]$  tal que  $f(e)$  es el mínimo de  $f$  en  $[c, d]$ .

Debemos tener que  $f(e) \leq f(x_1)$  y, por (1),

$$f(e) < f(c) < f(d)$$

Luego,  $c < e < d$  y  $f(e)$  es un mínimo local distinto de  $f(c)$ . Esto contradice la unicidad de  $f(c)$ .



**PROBLEMAS PROPUESTOS 8.3**

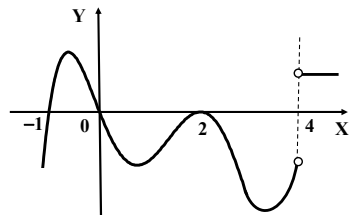
- 1. Bosquejar el gráfico de una función  $f$  que cumple:  
 $f(2) = -2, \quad f'(2) = 0, \quad f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

- 2. Bosquejar el gráfico de una función  $f$  que cumple:  
 $f(2) = 2, \quad \text{No existe } f'(2), \quad f''(x) > 0 \text{ si } x < 2, \quad f''(x) < 0 \text{ si } x > 2$

- 3. El dibujo adjunto es el gráfico de una la derivada  $f'$  de una función continua  $f$ .

Determinar:

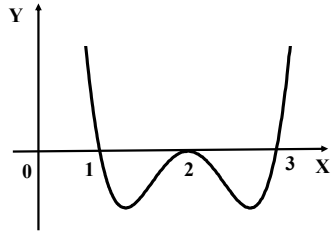
- a. Los números críticos de  $f$
- b. Los intervalos de monotonía.
- c. Los números críticos que correspondan a máximos o mínimos locales



4. El dibujo adjunto es el gráfico de la segunda derivada  $f''$  de una función  $f$ .

Determinar:

- Los números críticos de segundo orden.
- Los intervalos de concavidad.
- Los números críticos de segundo orden que correspondan a puntos de inflexión



En los problemas del 5 al 18, hallar:

- |                             |  |
|-----------------------------|--|
| a. Los números críticos.    | b. Intervalos de monotonía.              |
| c. Los extremos locales     | d. Los números críticos de segundo orden |
| e. Intervalos de concavidad | f. Puntos de inflexión.                  |

5.  $f(x) = -2x^2 - 8x + 3$

6.  $f(x) = x^3 - 3x + 1$

7.  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 12$

8.  $g(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

9.  $h(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$

10.  $g(x) = \frac{x}{x-2}$

11.  $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$

12.  $f(x) = 2x^{1/3} + x^{2/3}$

13.  $g(x) = x|x|$

14.  $h(x) = x - \ln x$

15.  $f(x) = xe^{x^2}$

16.  $f(x) = x - 2\text{sen } x$ , en  $[0, 2\pi]$

17.  $g(x) = \cos^2 x - 2\text{sen } x$ , en  $[0, 2\pi]$

18.  $h(x) = 2x - \text{sen}^{-1}x$ , en  $[-1, 1]$

En los problemas 19 y 20, bosquejar el gráfico de la función continua  $f$  que satisface las condiciones dadas.

19.  $f'(x) > 0$  si  $x < 0$  ó  $0 < x < 3$ ,  $f'(x) < 0$  si  $x > 3$

$f'(0) = 0, f(0) = 1, f'(3) = 0, f(3) = 3$

$f''(x) < 0$  si  $x < 0$  ó  $2 < x < 5$ ,  $f''(x) > 0$  si  $0 < x < 2$  ó  $x > 5$

20.  $f'(x) > 0$  si  $x < 2$ ,  $f'(x) < 0$  si  $2 < x < 5$ ,  $f'(x) = 1$  si  $x > 5$ .

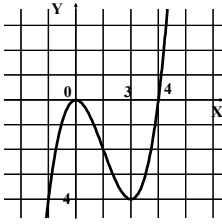
$f(0) = f(4) = 0, f(2) = 2$ . No existen  $f'(2)$  y  $f'(5)$ .

$f''(x) < 0$  si  $x < 0$  ó  $4 < x < 5$ ,  $f''(x) > 0$  si  $0 < x < 2$  ó  $2 < x < 4$

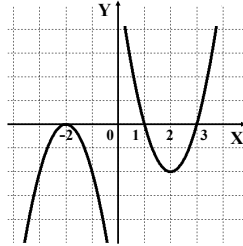
En los problemas 21 y 22, se dan las gráficas de la derivada  $f'$  de una función continua  $f$ . Determinar:

- Los números críticos de  $f$ .
- Los intervalos de monotonía de  $f$ .
- Los números críticos que dan lugar a extremos locales.
- Los números críticos de segundo orden de  $f$ .
- Los intervalos de concavidad de  $f$ .
- Los números críticos de segundo orden que dan lugar a puntos de inflexión.
- Esbozar el gráfico.

21.

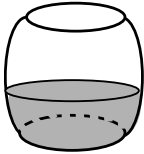


22.

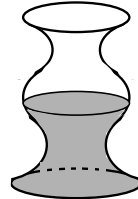


En los problemas 23 y 24 se tiene jarrones en los cuales se vierte agua a una razón constante. En cada caso, esbozar la gráfica de la función altura del agua como función del tiempo,  $h = f(t)$ . Mostrar la concavidad y los puntos de inflexión.

23.



24.



En los problemas del 25 al 28, hallar los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado.

25.  $h(x) = 4x^3 - 3x^4$ ,  $(-\infty, +\infty)$

24.  $g(x) = 4 - 2(x - 1)^{2/3}$  en  $[0, +\infty)$

27.  $g(x) = x \ln x$ ,  $(0, e)$

28.  $h(x) = (x + 1)e^{-x}$   $(-\infty, +\infty)$

29. Probar que una función cúbica  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  tiene uno y sólo un punto de inflexión.

30. Si la función cúbica  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  tiene por raíces a  $r_1, r_2$  y  $r_3$ , probar que la abscisa del punto de inflexión es  $x = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$

Sugerencia:  $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ .

31. Si  $f$  y  $g$  son cóncavas hacia arriba en el intervalo  $I$ , probar que  $f + g$  es cóncava hacia arriba en  $I$ .

32. Si  $f$  es positiva y cóncava hacia arriba en un intervalo  $I$ , probar que la función  $g(x) = [f(x)]^2$  es cóncava hacia arriba.

33. Sean  $f$  y  $g$  positivas y cóncavas hacia arriba en el intervalo  $I$ , probar:

a. Si  $f$  y  $g$  son crecientes, entonces  $fg$  es cóncava hacia arriba en  $I$ .

b. Si  $f$  y  $g$  son decrecientes, entonces  $fg$  es cóncava hacia arriba en  $I$ .

**SECCION 8.4**  
**FORMAS INDETERMINADAS.**  
**REGLA DE L'HÔPITAL**

Un límite de una función  $F(x)$  toma una **forma indeterminada** en  $x = a$  si al evaluar  $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$  mediante las leyes de los límites, (ley de la suma, del cociente, etc.), se obtiene una de las siguientes expresiones:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

Estas expresiones se llaman **formas indeterminadas**. Así, tenemos:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  tiene la forma indeterminada  $\frac{0}{0}$  en  $x = 0$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$  tiene la forma indeterminada  $\frac{\infty}{\infty}$  en  $x = +\infty$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$  tiene la forma indeterminada  $\infty - \infty$  en  $x = 0$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\cot x}$  tiene la forma indeterminada  $1^\infty$  en  $x = 0$ .

A continuación estudiaremos cada una de estas formas indeterminadas. Las fundamentales son dos =  $\frac{0}{0}$  y  $\frac{\infty}{\infty}$ .

A la indeterminada  $0/0$  ya la hemos encontrado en el capítulo 5, y la hemos resuelto recurriendo a procedimientos algebraicos. En esta parte presentamos otra técnica, conocida como la **regla de L'Hôpital**, la cual nos ayuda a resolver todas las formas indeterminadas antes mencionadas.

**TEOREMA 8.13** Regla de L'Hôpital. Indeterminadas  $\frac{0}{0}$  y  $\frac{\infty}{\infty}$

Si 1.  $f$  y  $g$  son diferenciables en un intervalo abierto que contiene al número  $a$ , excepto posiblemente en el mismo  $a$ .  
 Se cumple que  $g'(x) \neq 0$  en todo  $x$  del intervalo, excepto posiblemente en  $a$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

3. Existe  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  (finito o infinito).

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El teorema también es válido para límites laterales o infinitos. Es decir, se puede reemplazar  $x \rightarrow a$  por  $x \rightarrow a^+$ ,  $x \rightarrow a^-$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$

La forma  $\frac{\infty}{\infty}$  es una manera abreviada para resumir cuatro casos:

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty} \text{ y } \frac{-\infty}{-\infty}.$$

### Demostración

Ver el problema resuelto 11 para el caso 0/0. Omitimos el caso  $\infty/\infty$ .

**EJEMPLO 1.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{\ln x + x - 1}$

### Solución

Verifiquemos que se cumplen las hipótesis de la regla de L'Hôpital.

- Las funciones  $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$  y  $g(x) = \ln x + x - 1$  son diferenciables en una vecindad de 1 (cerca de 1) y

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1 \text{ y, por tanto, } g'(x) \neq 0 \text{ cerca de 1.}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - x^2 + 2x - 2) = 1 - 1 + 2 - 2 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x + x - 1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0$$

Luego, el límite dado es una indeterminada del tipo  $\frac{0}{0}$

Ahora, aplicamos la regla de regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{\ln x + x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{D_x(x^3 - x^2 + 2x - 2)}{D_x(\ln x + x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x + 2}{1/x + 1} \\ &= \frac{3(1)^2 - 2(1) + 2}{1/1 + 1} = \frac{3 - 2 + 2}{1 + 1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

**NOTA.** En el ejemplo anterior hemos sido minuciosos. Hemos verificado todas las hipótesis de la regla de L'Hôpital. En los ejemplos y problemas que siguen, con el ánimo de simplificar la exposición, sólo nos ocuparemos de la hipótesis 2, para reconocer el tipo de indeterminada. La verificación de las otras hipótesis queda a cargo del lector.

**EJEMPLO 2.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\tan x}{\cot 2x}$

**Solución**

Tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \cot 2x = -\infty.$$

Este límite es un caso  $\frac{+\infty}{-\infty}$

Aplicando la regla de regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\tan x}{\cot 2x} &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{D_x \tan x}{D_x \cot 2x} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\sec^2 x}{-2\operatorname{cosec}^2 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{1/\cos^2 x}{-2/\sin^2 2x} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\sin^2 2x}{-2\cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{4\sin^2 x \cos^2 x}{-2\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (-2\sin^2 x) \\ &= -2(\sin(\pi/2))^2 = -2(1)^2 = -2 \end{aligned}$$


---

**EJEMPLO 3.** Probar que:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$ , donde  $p > 0$

Este resultado muestra que cualquier potencia positiva  $x^p$  de  $x$ , domina a la función logarítmica  $y = \ln x$ . En otras palabras, la función  $y = \ln x$  tiende a  $+\infty$  más lentamente que cualquier potencia positiva  $x^p$  de  $x$ .

**Solución**

Tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^p = +\infty. \quad \text{Este límite es un caso } \frac{+\infty}{+\infty}$$

Aplicando la regla de regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^p} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D_x \ln x}{D_x (x^p)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{px^{p-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(px^{p-1})} \\ &= \frac{1}{p} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^p} = \frac{1}{p} \left( \frac{1}{+\infty} \right) = \frac{1}{p} (0) = 0 \end{aligned}$$


---

En algunos casos es necesario aplicar la regla de L'Hôpital más de una vez. En el siguiente ejemplo la aplicamos 2 veces.

**EJEMPLO 4.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{2x}$

**Solución**

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ . Este límite es un caso  $\frac{+\infty}{+\infty}$ .

Aplicamos la regla de regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D_x \ln(1+e^x)}{D_x(2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x/1+e^x}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2(1+e^x)}$$

El último límite también es del tipo  $\infty/\infty$ . Volvemos a aplicar la regla:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2(1+e^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^x} = \frac{1}{2}$$

**EJEMPLO 5.** Probar que:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ , donde  $n$  es un entero positivo.

Este resultado nos muestra que la función exponencial  $y = e^x$  domina a cualquier potencia positiva  $x^n$  de  $x$ . En otras palabras, la función exponencial tiende a  $+\infty$  más rápidamente que cualquier potencia  $x^n$  de  $x$ .

**Solución**

Tenemos que:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ . Este límite es un caso  $\frac{+\infty}{+\infty}$ .

Aplicando la regla de regla de L'Hôpital  $n$  veces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D_x(e^x)}{D_x(x^n)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D_x(e^x)}{D_x(nx^{n-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2) \dots 1x^0} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n!} = \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \frac{1}{n!} (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

**PRECAUCION.**

Antes de aplicar la regla de L'Hôpital se debe tener la precaución de verificar que las hipótesis de ésta se cumplen. Los dos siguiente ejemplos nos muestran como se llega a resultados errados cuando no se tiene tal precaución.

**EJEMPLO 6.**

Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{x + x^2}$

**Solución**

Es un caso  $\frac{0}{0}$ . Aplicando la regla de L'Hôpital dos veces se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{1 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \text{sen } 2x}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Este resultado es erróneo. Esto se debe a que es incorrecto aplicar la regla de L'Hôpital para calcular el segundo límite, ya que este no es una forma indeterminada. En efecto, tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos 2x = 2 \neq 0$ .

El resultado correcto es como sigue:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{1 + 2x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos 2x}{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)} = \frac{2}{1} = 2$$

**EJEMPLO 7.**

Hallar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \text{sen } x}{x - \cos x}$

**Solución**

Es un caso  $\frac{0}{0}$ . Aplicando la regla de L'Hôpital se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \text{sen } x}{x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{1 + \text{sen } x}$$

El último límite no existe. En efecto, para  $x = 2n\pi$  y para  $x = (2n+1)\pi$ , con  $n$  cualquier entero, se tiene:

$$\frac{1 + \cos 2n\pi}{1 + \text{sen } 2n\pi} = \frac{1 + 1}{1 + 0} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{1 + \cos(2n+1)\pi}{1 + \text{sen}(2n+1)\pi} = \frac{1 - 1}{1 + 0} = 0.$$

Estos resultados distintos prueba que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{1 + \text{sen } x}$  no existe y, por tanto, no

se cumple la hipótesis 3 del teorema, la cual pide la existencia de  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Pero, tengamos cuidado. Esto no implica que tampoco exista el límite inicial. Lo único que nos dice es que si el límite inicial existe, esto no puede hallar usando la regla de L'Hopital. Por tanto, se debe buscar otro método. Así procedemos a continuación:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{cos} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( 1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)}{x \left( 1 - \frac{\operatorname{cos} x}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 - \frac{\operatorname{cos} x}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

## PRODUCTO INDETERMINADO.

### INDETERMINADA $0 \cdot \infty$

Se busca  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ , si se cumple que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty$

La indeterminación  $0 \cdot \infty$  se transforma en  $0/0$  ó  $\infty/\infty$  transformando el producto en cociente:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{ó} \quad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

**EJEMPLO 8.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

#### Solución

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ . Luego, es el caso  $0 \cdot \infty$ .

Bien,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} && (\infty/\infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \end{aligned}$$

## DIFERENCIA INDETERMINADA.

### INDETERMINADA $\infty - \infty$

Se busca  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$  Se cumple:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

La indeterminación  $\infty - \infty$  se convierte en otra de la forma,  $0/0$  ó  $\infty/\infty$ , transformando la diferencia  $f(x) - g(x)$  en un cociente de funciones.

**EJEMPLO 9.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right]$

#### Solución

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + \sin x} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{-x \sin x + 2 \cos x} = \frac{0}{2} = 0$$

## POTENCIAS INDETERMINADAS.

### INDETERMINADAS $0^0$ , $\infty^0$ , $1^\infty$

Se busca  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$  (1)

Son posibles las siguientes formas indeterminadas:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , indeterminada  $0^0$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , indeterminada  $\infty^0$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ , indeterminada  $1^\infty$

Sea  $y = [f(x)]^{g(x)}$ . Tomamos logaritmo:  $\ln y = g(x) \ln f(x)$  (2)

De este modo hemos transformado a cualquiera de las tres indeterminadas anteriores en la ya conocida indeterminada  $0 \cdot \infty$ , la cual, como ya sabemos, es transformada en  $0/0$  ó  $\infty/\infty$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x) = L$ , (3)

entonces, la continuidad de la función logaritmo nos permite meter el límite dentro de  $\ln y$ . En consecuencia, de (3):

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \ln y = \ln \left( \lim_{x \rightarrow a} y \right) = \ln \left( \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = e^L$$

y el problema queda resuelto.

En resumen, se procede en tres pasos:

1. Se toma logaritmo y se simplifica:  $y = [f(x)]^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x) \ln f(x)$
2. Se halla  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x) = L$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = e^L$

**EJEMPLO 10.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{2}{1+\ln x}}$

**Solución**

Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{1+\ln x} = 0$ . Este es un caso  $0^0$ .

Ahora,

$$y = x^{\frac{2}{1+\ln x}} \Rightarrow \ln y = \frac{2}{1+\ln x} \ln x \Rightarrow \ln y = 2 \frac{\ln x}{1+\ln x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1+\ln x} \quad (\infty/\infty)$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{1/x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} (1) = 2(1) = 2$$

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{2}{1+\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^2$$

**EJEMPLO 11.** Usando la regla de L'Hopital probar que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{nx} = e^{na}$$

**Solución**

Este límite es una indeterminada de la forma  $1^\infty$ . Bien,

$$y = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{nx} \Rightarrow \ln y = nx \ln \left(1 + \frac{a}{x}\right) = n \frac{\ln(1+a/x)}{1/x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = n \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+a/x)}{1/x} \quad (0/0)$$

$$= n \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left[ \frac{-a/x^2}{(1+a/x)} \right]}{-1/x^2} = n \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{1+a/x} = na$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{nx} = e^{na}$$

**EJEMPLO 12.** Hallar el valor de  $a$  tal que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = 9$

**Solución**

En primer lugar, hallamos  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$ .

Tenemos que:  $\frac{x+a}{x-a} = 1 + \frac{2a}{x-a}$ .

Además, si  $z = x - a$ , entonces  $x = z + a$  y  $x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow z \rightarrow +\infty$ . Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2a}{x-a}\right)^x = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2a}{z}\right)^{z+a} \\ &= \lim_{z \rightarrow +\infty} \left[ \left(1 + \frac{2a}{z}\right)^a \left(1 + \frac{2a}{z}\right)^z \right] = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2a}{z}\right)^a \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2a}{z}\right)^z \\ &= (1+0)^a \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2a}{z}\right)^z = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2a}{z}\right)^z = e^{2a} \quad (\text{ejemplo 11}) \end{aligned}$$

Por último,

$$e^{2a} = 9 \Rightarrow 2a = \ln 9 = \ln 3^2 = 2 \ln 3 \Rightarrow a = \ln 3$$

**EJEMPLO 13.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

**Solución**

Este límite es una indeterminada de la forma  $\infty^0$ . Bien,

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \ln \left(\frac{1}{x}\right) = -\sin x \ln x = -\frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x} \quad (\infty/\infty)$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-\operatorname{cosec} x \cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right) \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = (1) \left(\frac{0}{1}\right) = 0$$

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = e^0 = 1.$$

**PROBLEMAS RESUELTOS 8.4**

**PROBLEMA 1.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

**Solución**

Este límite es una indeterminada de la forma  $\frac{0}{0}$ . Bien,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$


---

**PROBLEMA 2.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right]$

**Solución**

Este límite es una indeterminada de la forma  $\infty - \infty$ . Bien,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{x^2 \sec^2 x + 2x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{\frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{2x \operatorname{sen} x}{\cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 + 2x \operatorname{sen} x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 + x \operatorname{sen} 2x} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{2x + 2x \cos 2x + \operatorname{sen} 2x} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \operatorname{sen}^2 x + 2 \cos^2 x}{2 - 4x \operatorname{sen} 2x + 2 \cos 2x + 2 \cos 2x} = \frac{2}{2 - 0 + 2 + 2} = \frac{1}{3}$$


---

**PROBLEMA 3.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ , donde  $n \geq 1$

**Solución**

Este límite es una indeterminada de la forma  $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty$ . Bien,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}}{x^{-n}} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{x^2}\right) \cos \frac{\pi}{x}}{-nx^{-n-1}} = \frac{\pi}{n} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x^{n-1}}} = \begin{cases} \pi, & \text{si } n = 1 \\ +\infty, & \text{si } n > 1 \end{cases}$$


---

**PROBLEMA 4.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\tan x}{\tan 5x}$

**Solución**

Este límite es una indeterminada de la forma  $\frac{\infty}{\infty}$ . Bien,

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\tan x}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\sec^2 x}{5 \sec^2 5x} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\cos^2 5x}{5 \cos^2 x} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{-10 \cos 5x \sin 5x}{-10 \cos x \sin x} = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\sin 10x}{\sin 2x} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{10 \cos 10x}{2 \cos 2x} = \frac{10(-1)}{2(-1)} = 5.$$


---

**PROBLEMA 5.** Probar que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$

**Solución**

Tenemos que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ . Luego, este es un caso  $0^0$ . Bien,

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x = \frac{\ln x}{1/x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \quad (\infty/\infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$$


---

**PROBLEMA 6.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2-x)^{\tan(\pi x/2)}$

**Solución**

Este límite es una indeterminada de la forma  $1^\infty$ . Bien,

$$y = (2-x)^{\tan(\pi x/2)} \Rightarrow \ln y = \tan \frac{\pi x}{2} \ln(2-x) = \frac{\ln(2-x)}{\cot \frac{\pi x}{2}} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(2-x)}{\cot \frac{\pi x}{2}} \quad (0/0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1/(2-x)}{-\frac{\pi}{2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi x}{2}} = \frac{-1/(2-x)}{-\frac{\pi}{2}(1)^2} = \frac{2}{\pi}$$

Luego,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (2-x)^{\tan(\pi x/2)} = e^{2/\pi}$

---

**PROBLEMA 7.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2} \right)^x$

**Solución**

Este límite es una indeterminada de la forma  $1^\infty$ . Bien,

$$y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2} \right)^x \Rightarrow \ln y = x \ln \left( \frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2} \right) = \frac{\ln \left( \frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2} \right)}{1/x}$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{a^{1/x} \ln a + b^{1/x} \ln b}{2} \left( -\frac{1}{x^2} \right)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{1/x} \ln a + b^{1/x} \ln b}{a^{1/x} + b^{1/x}}$$

$$= \frac{a^0 \ln a + b^0 \ln b}{a^0 + b^0} = \frac{\ln a + \ln b}{1+1} = \frac{1}{2} (\ln a + \ln b) = \frac{1}{2} \ln ab = \ln \sqrt{ab}$$

En consecuencia,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2} \right)^x = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$

---

**PROBLEMA 8.** El marqués de L'Hôpital en su libro *Analyse de Infiniment petits* (el primer libro de Cálculo, publicado en 1696), para ilustrar la regla que ahora lleva su nombre, usó el siguiente límite, el cual pedimos calcular.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}, \text{ donde } a > 0.$$

**Solución**

Este límite es una indeterminada de la forma  $\frac{0}{0}$ . Bien,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(2a^3x - x^4)^{\frac{1}{2}} - a(a^2x)^{\frac{1}{3}}}{a - (ax^3)^{\frac{1}{4}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{2}(2a^3x - x^4)^{-1/2}(2a^3 - 4x^3) - \frac{1}{3}a(a^2x)^{-2/3}(a^2)}{-\frac{1}{4}(ax^3)^{-3/4}(3ax^2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(2a^4 - a^4)^{-1/2}(2a^3 - 4a^3) - \frac{1}{3}a(a^3)^{-2/3}(a^2)}{-\frac{1}{4}(a^4)^{-3/4}(3a^3)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(a^4)^{-1/2}(-2a^3) - \frac{1}{3}a(a^3)^{-2/3}(a^2)}{-\frac{3}{4}(a^4)^{-3/4}(a^3)} = \frac{-a - \frac{1}{3}a}{-\frac{3}{4}} = \frac{16}{9}a \end{aligned}$$

**PROBLEMA 9.** Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin^{-1}(x) \operatorname{cosec} x$

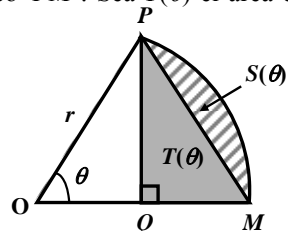
**Solución**

Este límite es una indeterminada de la forma  $0 \cdot \infty$ . Bien,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin^{-1}(x) \operatorname{cosec} x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^{-1}x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

**PROBLEMA 10.** Se tiene un sector circular correspondiente a un ángulo central  $\theta$  en un círculo de radio  $r$ . Sea  $S(\theta)$  el área del segmento circular formado por la cuerda  $\overline{PM}$  y el arco  $\widehat{PM}$ . Sea  $T(\theta)$  el área del triángulo rectángulo  $\triangle PQM$ . Hallar

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{T(\theta)}$$



**Solución**

$$S(\theta) = \text{Area sector } OMP - \text{Area triángulo } \triangle OMP$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}(\overline{OM})(\overline{QP}) = \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}(r)(r \operatorname{sen} \theta) \\
 &= \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}r^2(\theta - \operatorname{sen}\theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T(\theta) &= \frac{1}{2}(\overline{QM})(\overline{QP}) = \frac{1}{2}(\overline{OM} - \overline{OQ})(\overline{QP}) = \frac{1}{2}(r - r \cos \theta)(r \operatorname{sen} \theta) \\
 &= \frac{1}{2}r^2(1 - \cos \theta)(\operatorname{sen} \theta) = \frac{1}{2}r^2(\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \\
 &= \frac{1}{2}r^2\left(\operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right) = \frac{1}{4}r^2(2\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} 2\theta)
 \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{T(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}r^2(\theta - \operatorname{sen} \theta)}{\frac{1}{4}r^2(2\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} 2\theta)} = 2 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta - \operatorname{sen} \theta}{2\operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} 2\theta} \quad (0/0) \\
 &= 2 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \theta}{2 \cos \theta - 2 \cos 2\theta} \quad (0/0) \\
 &= 2 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} \theta}{-2 \operatorname{sen} \theta + 4 \operatorname{sen} 2\theta} \quad (0/0) \\
 &= 2 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\cos \theta}{-2 \cos \theta + 8 \cos 2\theta} = 2 \frac{1}{-2+8} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

**PROBLEMA 11.** Probar la regla de L'Hôpital para el caso 0/0.

Si 1.  $f$  y  $g$  son diferenciables en un intervalo que contiene al número  $a$ , excepto posiblemente en el mismo  $a$ . Se cumple que  $g'(x) \neq 0$  en todo  $x$  del intervalo, excepto posiblemente en  $a$ .

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

$$3. \quad \text{Existe } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{finito o infinito}).$$

Entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

### Demostración

La demostración está basada en el Teorema del Valor Medio de Cauchy.

Consideramos que el límite es finito.

Procedemos para el caso  $x \rightarrow a^+$ . El caso  $x \rightarrow a^-$  es similar y si los dos se cumplen, entonces se cumple para  $x \rightarrow a$ .

La existencia de  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  implica la existencia de  $f'(x)$  y de  $g'(x)$  en un intervalo  $(a, b]$  en el cual  $g'(x) \neq 0$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ , redefinimos  $f$  y  $g$ , si es necesario, haciendo  $f(a) = 0$  y  $g(a) = 0$ . De este modo,  $f$  y  $g$  son continuas en  $[a, b]$  y son diferenciables en  $(a, b)$ .

Se cumple que  $g(b) \neq 0$ . En efecto, si  $g(b) = 0$ , por el teorema de Rolle, existe  $c \in (a, b)$  tal que:

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a) \Rightarrow 0 - 0 = g'(c)(b - a) \Rightarrow g'(c) = 0.$$

Pero este resultado contradice el hecho el que  $g'(x) \neq 0$  en  $(a, b)$ .

Por el teorema del valor medio de Cauchy, existe  $c \in (a, b)$  tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(b) - 0}{g(b) - 0} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Ahora, si  $b \rightarrow a^+$ , y como  $a < c < b$ , esto obliga a que  $c \rightarrow a^+$  y se tiene

$$\lim_{b \rightarrow a^+} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{c \rightarrow a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

lo que es equivalente a la igualdad de límites de la tesis.

## PROBLEMAS PROPUESTOS 8.4

*En los problemas del 1 al 43 hallar el límite indicado.*

1.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - e^x + 1}{x^2}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$

4.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\tan^2 x}$

5.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sec^2 x - 2 \tan x}{1 + \cos 4x}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot x}{\cot 2x}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\pi/x}{\cot(\pi x/2)}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan^{-1} x}{1 - \cos x}$

9.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$
10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{sen} nx}{\ln \operatorname{sen} x}$
11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 5^x}{x^2}$
12.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln x}{\sqrt{x}}$
13.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x-\pi)^2}{\operatorname{sen}^2 x}$
14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$
15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\operatorname{sen}^2 x - x^2}$
16.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 \cos x - 2}{x^4}$
17.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2 \tan x}{1 + \cos 4x}$
18.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right]$
19.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]$
20.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} \right]$
21.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x \operatorname{sen} x} - \frac{1}{x^2} \right]$
22.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos x) \cot x$
23.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 - \tan x) \sec 2x$
24.  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$
25.  $\lim_{x \rightarrow a} (x^2 - a^2) \tan \frac{\pi x}{2a}$
26.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$
27.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$
28.  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)}$
29.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1-2x)^{1/x}$
30.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2)^{1/x}$
31.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$
32.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x)^{x^2}$
33.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\tan x}$
34.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{1/\ln x}$
35.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{1 - \cos x}$
36.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} 2x}{\tan^{-1} 3x}$
37.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x^2 + 1))$ . Sugerencia:  $\ln e^x = x$
38.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{senh} x)^{2/x}$
39.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$
40.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)^{1/x}$
41.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x}$ . Sugerencia:  $z = \ln x$
42.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} 3x - 3 \tan^{-1} x}{x^3}$

43.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}$  Sugerencia:  $z = \sqrt[n]{x}$

44. Si  $f'$  es continua, probar:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$

Sugerencia: Usar regla de L'Hôpital derivando respecto a  $h$ .

45. Si  $f''$  es continua, probar:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$

Sugerencia: Usar regla de L'Hôpital derivando 2 veces respecto a  $h$ .

**SECCION 8.5**

**TRAZADO CUIDADOSO DEL GRAFICO DE UNA FUNCION**

Ya estamos en condiciones de esbozar, con mucha precisión, el gráfico de una función  $y = f(x)$ . La técnica puede resumirse en los siguientes pasos:

**A. Dominio.** Se determina el dominio de la función

**B. Simetría y periodicidad**

Determinar si se tiene simetría respecto al eje Y o respecto al origen. En caso afirmativo, el trabajo se reduce a la mitad: Sólo es necesario graficar los puntos con abscisa  $x \geq 0$ .

Si la función viene expresada en términos de las funciones trigonométricas, determinar la periodicidad. Si esta es  $p$ , entonces sólo construye el gráfico en un intervalo de longitud  $p$ , que puede ser  $[0, p]$  o  $[-p/2, p/2]$ . Luego esta parte del gráfico se traslada a los otros intervalos. Recordar que:

**a.** Una función es **periódica** si existe una constante positiva  $p$  tal que

$$f(x + p) = f(x), \forall x \in \text{Dom}(f)$$

Se llama periodo al menor  $p$  que satisface la condición anterior.

**b.** La gráfica de  $f$  es simétrica respecto al eje Y  $\Leftrightarrow$

$$f \text{ es par: } f(-x) = f(x), \forall x \in \text{Dom}(f).$$

**c.** La gráfica de  $f$  es simétrica respecto al origen  $\Leftrightarrow$

$$f \text{ es impar: } f(-x) = -f(x), \forall x \in \text{Dom}(f).$$

**C. Intersecciones con los Ejes.**

La intersección con el eje Y se encuentra haciendo  $x = 0$ . La intersección con el eje X se encuentra resolviendo la ecuación  $f(x) = 0$ . Si la ecuación es difícil de resolver, se recomienda no insistir.

**D. Continuidad y asíntotas.**

Determinar las discontinuidades y los intervalos de continuidad. Calcular los límites unilaterales en los extremos de estos intervalos de continuidad. Estos límites nos proporcionan las asíntotas verticales y horizontales.

**E. Estudio de  $f'$ . Intervalos de monotonía. Máximos y mínimos.**

Hallar los números críticos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos locales.

**F. Estudio de  $f''$ . Concavidad y puntos de inflexión.**

Hallar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

**G. Esbozar el gráfico.**

Esbozar el gráfico de  $f$  con la información encontrada en los pasos anteriores. Si es necesario, calcular algunos puntos extras.

**EJEMPLO 1.** Graficar la función racional  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ .

**Solución**

**A. Dominio.**  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ .

**B. Simetría y periodicidad.** No es periódica.

Esta función es par. En efecto:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2}{x^2 - 4} = f(x).$$

Luego, el gráfico de  $f$  es simétrica respecto al eje Y. En consecuencia, es suficiente construir la parte del gráfico que está a la derecha del eje Y; es decir la parte que corresponde al intervalo  $[0, +\infty)$ . La otra parte se obtiene reflejando en el eje Y la parte construida.

**C. Intersecciones con los Ejes.**

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ . Luego, la gráfica de  $f$  interseca al eje Y en el punto  $(0, 0)$ .

Por otro lado,  $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ . Luego, la gráfica de  $f$  interseca al eje X en el punto  $(0, 0)$ .

**D. Continuidad y asíntotas.**

La función  $f$  es discontinua en  $-2$  y  $2$ . Los intervalos de continuidad son:  $(-\infty, -2)$ ,  $(-2, 2)$  y  $(2, +\infty)$ .

**Asíntotas Verticales.**

a.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = +\infty$       b.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty$

Luego, la recta  $x = 2$  es una asíntota vertical. Por simetría, la recta  $x = -2$  también es una asíntota vertical.

**Asíntotas horizontales.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - 4/x^2} = 1$$

Luego, la recta  $y = 1$  es una asíntota horizontal.





**E. Estudio de  $f'(x)$ . Intervalos de Monotonía. Máximos y mínimos.**

**Números Críticos.**

Tenemos que:  $f'(x) = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ . Además,  $f'$  no está definida en  $x = -2$  y  $x = 2$ , pero estos puntos tampoco están en el dominio. Luego,  $f$  tiene un único número crítico que es 0.

**Intervalos de monotonía.**

$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x) = \frac{-(-)}{(+)} = +$	$f'(x) = \frac{-(-)}{(+)} = +$	$f'(x) = \frac{-(+)}{(+)} = -$	$f'(x) = \frac{-(+)}{(+)} = -$	
				




Mirando la tabla deducimos que  $f(0) = 0$  es un máximo local.

**F. Estudio de  $f''(x)$ . Concavidad y Puntos de inflexión.**

Tenemos que:  $f''(x) = \frac{8(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$

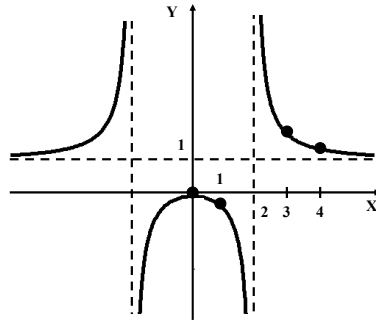
$f''(x)$  no se anula en ningún punto y no está definida en  $-2$  y  $2$ . Pero estos puntos no están en el dominio de  $f$ . En consecuencia, la gráfica no tiene puntos de inflexión.

**Intervalos de Concavidad.**

$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$f''(x) = \frac{(+)}{(+)} = +$	$f''(x) = \frac{(+)}{(-)} = -$	$f''(x) = \frac{(+)}{(+)} = +$	
			

## G. Esbozo del gráfico.

$x$	$f(x)$
0	0
1	$-\frac{1}{3}$
3	$\frac{9}{5}$
4	$\frac{4}{3}$



**EJEMPLO 2.** Graficar la función  $f(x) = 2\text{sen } x - \text{sen} 2x$

## Solución

A. **Dominio.**  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ .

## B. Simetría y periodicidad.

i.  $f$  es periódica con periodo  $2\pi$ . Esto es,  $f(x + 2\pi) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

En consecuencia, solamente precisamos graficar la función en un intervalo de longitud  $2\pi$ . Escogemos el intervalo  $[0, 2\pi]$ . Para obtener el gráfico completo, trasladamos esta porción al resto de intervalos.

ii. La función  $f$  es impar y, por tanto, su gráfica es simétrica respecto al origen.

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2\text{sen}(-x) - \text{sen } 2(-x) = -2\text{sen } x - (-\text{sen } 2x) \\ &= -(2\text{sen } x - \text{sen } 2x) = -f(x) \end{aligned}$$

En consecuencia, solamente precisamos graficar la función a la derecha del origen, o sea, en el intervalo  $[0, \pi]$ . Sin embargo, por razones didácticas, persistimos en tomar el intervalo  $[0, 2\pi]$ .

## C. Intersecciones con los ejes.

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \text{sen } 0 - \text{sen } 2(0) = 2(0) - 0 = 0.$$

Luego, la gráfica de  $f$  interseca al eje Y en  $(0, 0)$ .

Por otro lado,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 2\text{sen } x - \text{sen } 2x = 0 \Leftrightarrow 2\text{sen } x - 2\text{sen } x \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\text{sen } x (1 - \cos x) = 0 \Rightarrow \text{sen } x = 0 \text{ ó } \cos x = 1 \\ &\Rightarrow x = 0, x = 2\pi \text{ y } x = \pi \end{aligned}$$

Luego, la gráfica de  $f$  interseca al eje X en  $(0, 0)$ ,  $(\pi, 0)$  y  $(2\pi, 0)$

**D. Continuidad y asíntotas.**

$f$  es continua en  $[0, 2\pi]$  y no tiene asíntotas.

**E. Estudio de  $f'(x)$ . Intervalos de monotonía. Máximos y Mínimos.**

**Numeros Críticos:**

$$\begin{aligned} \text{Tenemos que: } f'(x) &= 2 \cos x - 2 \cos 2x = 2 \cos x - 2(2\cos^2 x - 1) \Rightarrow \\ f'(x) &= -2(2\cos^2 x - \cos x - 1) \end{aligned}$$




$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(2)(-1)}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos x = 1 \quad \text{ó} \quad \cos x = -1/2$$

$$\Rightarrow (x = 0 \quad \text{ó} \quad x = 2\pi) \quad \text{ó} \quad (x = 2\pi/3 \quad \text{ó} \quad x = 4\pi/3)$$

Los números críticos son:  $0, 2\pi/3, 4\pi/3, 2\pi$ .

**Intervalos de monotonía:**

$0$	$2\pi/3$	$4\pi/3$	$2\pi$
$f'(x) = -2(-) = +$ 	$f'(x) = -2(+) = -$ 	$f'(x) = -2(-) = +$ 	

La tabla nos dice que  $f$  tiene un máximo relativo en  $x = 2\pi/3$  y tiene un mínimo relativo en  $x = 4\pi/3$ , cuyos valores son:

$$f(2\pi/3) = 2\text{sen}(2\pi/3) - \text{sen} 2(2\pi/3) = 2(\sqrt{3}/2) - (-\sqrt{3}/2) = 3\sqrt{3}/2 \approx 2.6$$

$$f(4\pi/3) = 2\text{sen}(4\pi/3) - \text{sen} 2(4\pi/3) = 2(-\sqrt{3}/2) - (\sqrt{3}/2) = -3\sqrt{3}/2 \approx -2.6$$

Sin embargo, para  $x = 0$  y  $x = 2\pi$ , la tabla nos da información incompleta, ya que no nos dice como es  $f$  a la izquierda de  $0$  y a la derecha de  $2\pi$ . Pero, debido a la periodicidad, concluimos que tanto a la izquierda de  $0$  como a la derecha de  $2\pi$ , la función es creciente. Luego,  $x = 0$  y  $x = 2\pi$  no dan lugar a extremos relativos.

**F. Estudio de  $f''(x)$ . Concavidad y puntos de inflexión**

**Numeros críticos de segundo orden:**

$$f'(x) = -2(2\cos^2 x - \cos x - 1) \Rightarrow f''(x) = -2(-4\cos x \text{sen} x + \text{sen} x)$$

$$f''(x) = -2\text{sen} x (1 - 4\cos x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2\text{sen} x (1 - 4\cos x) = 0 \Rightarrow \text{sen} x = 0, \text{ ó } \cos x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (x = 0 \quad \text{ó} \quad \pi) \quad \text{ó} \quad (x = \theta_1 \approx 1.32 \quad \text{ó} \quad x = \theta_2 \approx 4.97)$$

Los números críticos de segundo son  $0, \pi, \theta_1 \approx 1.32, \theta_2 \approx 4.97$

**Intervalos de concavidad:**

0	$\theta_1 \approx 1.32$	$\pi$	$\theta_2 \approx 4.97$	$2\pi$
$f''(x) = -(+)(-) = +$	$f''(x) = -(+)(+) = -$	$f''(x) = -(-)(+) = +$	$f''(x) = -(-)(-) = -$	
∪	∩	∪	∩	

La tabla nos dice que son puntos de inflexión los siguientes puntos:

$$(\theta_1, f(\theta_1)) = (1.32, f(1.32)) \approx (1.32, 1.45),$$

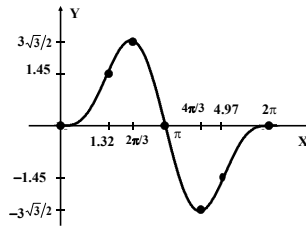
$$(\pi, f(\pi)) = (\pi, 0) \quad \text{y}$$

$$(\theta_2, f(\theta_2)) = (4.97, f(4.97)) \approx (4.97, 1.45)$$

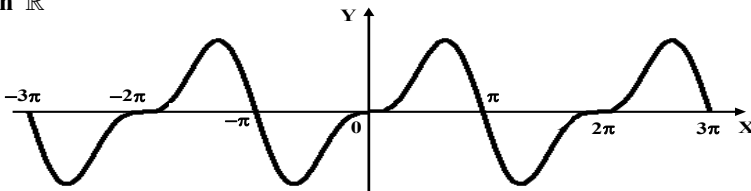
De la periodicidad de  $f$  obtenemos que  $(0, f(0)) = (0, 0)$  y  $(2\pi, f(2\pi)) = (2\pi, 0)$  también son puntos de inflexión.

**G. Esbozo de la gráfica.**

$f$  en  $[0, 2\pi]$



$f$  en  $\mathbb{R}$



**EJEMPLO 3.** Graficar la función  $f(x) = e^{-x^2/2}$

**Solución**

**A. Dominio.**  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ .

**B. Simetrías y periodicidad.** No es periódica, pero es simétrica respecto al eje Y.

$$\text{En efecto: } f(-x) = e^{-(-x)^2/2} = e^{-x^2/2} = f(x).$$

bastaría construir la gráfica de  $f$  correspondiente al intervalo  $[0, \infty)$ . Sin embargo, por razones didácticas, no tomaremos en cuenta esta ventaja.

**C. Intersección con los ejes.**

Con el eje Y:  $f(0) = e^{-0} = 1$

Luego, el gráfico corta al eje Y en el punto  $(0, 1)$ .

Con el eje X:  $e^{-x^2/2} = 0$  no tiene solución. Luego, el gráfico no corta al eje X.

**D. Continuidad y asíntotas.**

La función  $f(x) = e^{-x^2/2}$  es continua en todo  $\mathbb{R}$  y, por tanto, no hay asíntotas verticales.

**Asíntotas horizontales.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2/2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x^2/2}} = 0 \quad y$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2/2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{x^2/2}} = 0$$

Luego,  $y = 0$ , el eje X, es una asíntota horizontal.

**E. Estudio de  $f'$ . Intervalos de monotonía. Máximos y mínimos**

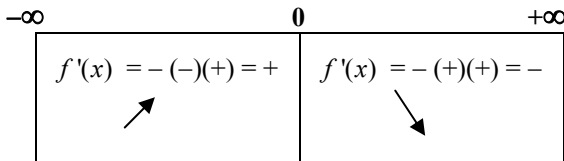
**Números críticos.**

$$f'(x) = -xe^{-x^2/2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -xe^{-x^2/2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Luego,  $f$  tiene un solo número crítico, que es  $x = 0$ .

**Intervalos de monotonía:**



$f$  es creciente en el intervalo  $(-\infty, 0]$  y es decreciente en  $[0, +\infty)$ . Además

$f$  tiene un máximo en  $x = 0$ , que vale  $f(0) = 1$ .

**F. Estudio de  $f''$ . Concavidad. Puntos de inflexión**

**Números críticos de segundo orden**

$$f'(x) = -xe^{-x^2/2} \Rightarrow f''(x) = -xe^{-x^2/2} D_x(-x^2/2) - e^{-x^2/2} \Rightarrow$$

$$f''(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)e^{-x^2/2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Tenemos dos números críticos de Segundo orden:  $-1$  y  $1$

**Intervalos de concavidad:**

$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f''(x) = (+)(+) = +$	$f''(x) = (-)(+) = -$	$f''(x) = (+)(+) = +$	
∪	∩	∪	

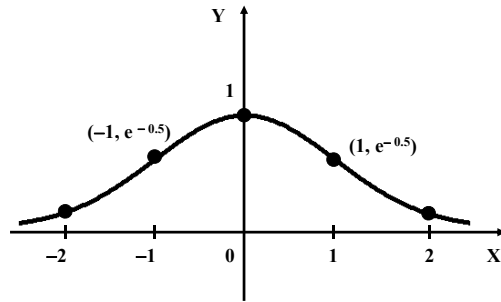
La tabla nos dice que el gráfico de  $f$  es cóncavo hacia arriba en los intervalos  $(-\infty, -1]$  y  $[1, +\infty)$ , y que es cóncava hacia abajo en el intervalo  $[-1, 1]$ .

Luego,  $(-1, f(-1)) = (-1, e^{-0.5})$  y  $(1, f(1)) = (1, e^{-0.5})$

son puntos de inflexión,

**G. Esbozo del gráfico**

$x$	$f(x)$
0	1
1	$e^{-0.5} \approx 0.606$
2	$e^{-2} \approx 0.135$

**¿SABIAS QUE ...**

En Estadística y en la Teoría de las Probabilidades aparecen con frecuencia la siguiente función, llamada **función de densidad normal**:

$$f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \text{ donde}$$

$\mu$  y  $\sigma$  son constantes, llamadas **media** y **desviación estándar**, respectivamente.

La gráfica de esta función se obtiene fácilmente de la gráfica del ejemplo anterior, mediante las técnicas de traslación y estiramiento.

**GRAFICAS CON ASINTOTAS OBLICUAS**

**EJEMPLO 4.** Graficar la función  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

**Solución****A. Dominio.**

$$x \in \text{Dom}(f) \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ó } x > 1$$

$$\Leftrightarrow \text{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

**B. Simetrías.** No es periódica.

La función  $f$  es par. En efecto:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sqrt{(-x)^2 - 1}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = f(x)$$

Luego, la gráfica de  $f$  es simétrica respecto al eje Y y sólo debemos concentrarnos de graficar  $f$  en el intervalo  $(1, +\infty)$ .

**C. Intersecciones con los ejes.**

El gráfico de  $f$  no corta al eje Y, ya que  $x = 0$  no está en el dominio de  $f$ .

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0 \Rightarrow x = 0. \text{ Pero } 0 \text{ no está en el dominio de } f. \text{ Luego,}$$

el gráfico de  $f$  no corta al eje X.

**D. Continuidad y asíntotas.**

$f$  es continua en todo su dominio  $= (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

**Asíntotas Verticales:**

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$$

Luego,  $x = 1$  es una asíntota vertical.

**Asíntotas Horizontales:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1 - 1/x^2}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

Luego, no hay asíntotas horizontales.

**Asíntotas Oblicuas:**

De acuerdo al ejemplo 2 se la sección 5.8, las recta  $y = x$ ,  $y = -x$  son asíntotas oblicuas.

**E. Estudio de  $f'(x)$ . Intervalos de Monotonía. Máximos y Mínimos.**

**Números críticos:**

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} (2x) - x^2 \left( \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \right)}{x^2 - 1} = \frac{x^3 - 2x}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \frac{x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^{3/2}} = \frac{x(x^2 - 2)}{(x^2 - 1)^{3/2}} = \frac{x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{(x^2 - 1)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{(x^2 - 1)^{3/2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$$

Sólo  $x = \sqrt{2}$  es punto crítico en el intervalo  $(1, +\infty)$ .

**Intervalos de monotonía en el intervalo  $(1, +\infty)$ .**

<b>1</b>	<b><math>\sqrt{2}</math></b>	<b><math>+\infty</math></b>
$f'(x) = \frac{(+)(-)(+)}{(+)} = -$ 	$f'(x) = \frac{(+)(+)(+)}{(+)} = +$ 	

$f$  tiene un mínimo relativo en  $x = \sqrt{2}$  y su valor es  $f(\sqrt{2}) = 2$

**F. Estudio de  $f''(x)$ . Intervalos de Concavidad. Puntos de Inflexión.**

**Números críticos de segundo orden:**

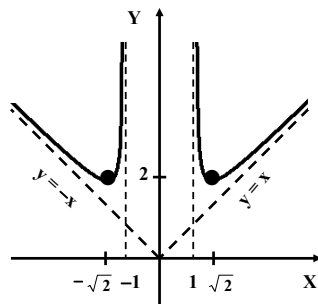
Derivando  $f'(x) = \frac{x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^{3/2}}$  obtenemos que:  $f''(x) = \frac{x^2 + 2}{(x^2 - 1)^{5/2}}$

$f''(x) = 0$  no tiene soluciones reales. Por otro lado,  $f''(x)$  no existe en  $x = 1$ , pero 1 no está en  $(1, +\infty)$ .

Luego,  $f$  no tiene números críticos de segundo orden en  $(1, +\infty)$  y, por lo tanto, tampoco tiene puntos de inflexión en este intervalo.

**Intervalos de concavidad:**

Como  $f''(x) > 0 \forall x$  en  $(1, +\infty)$ , concluimos la gráfica de  $f$  es cóncava hacia arriba en  $(1, +\infty)$ ,



**F. Esbozo de la gráfica.**

**EJEMPLO 5.** Graficar la función  $f(x) = xe^{1/x}$

**Solución**

**A. Dominio.**  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

**B. Simetrías y periodicidad.** Ninguna simetría y no es periódica.

**C. Intersección con los ejes**

Como  $x = 0$  no está en dominio de  $f$ , el gráfico de  $f$  no corta al eje Y.

Por otro lado,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{1/x} = 0 \Rightarrow x = 0. \text{ Pero } x = 0 \text{ no está en el dominio de } f.$$

Luego, el gráfica de  $f$  no corta al eje X.

**D. Continuidad y asíntotas.**

$f$  es continua en todo su dominio  $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

**Asíntotas verticales:**

Los límites siguientes son indeterminaciones del tipo  $0 \cdot \infty$ , por lo que aplicamos la regla de L'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}(-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}(-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = e^{-\infty} = 0$$

Luego, la recta  $x = 0$  es una asíntota vertical (sólo hacia arriba).

**Asíntotas Horizontales:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{1/x} = (+\infty)e^0 = (+\infty)(1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{1/x} = (-\infty)e^0 = (-\infty)(1) = -\infty$$

Luego, la gráfica de  $f$  no tiene asíntotas horizontales.

**Asíntotas Oblicuas:**

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{1/x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{1/x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/x}(-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = e^0 = 1
 \end{aligned}$$

En forma enteramente análoga, obtenemos que:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{1/x}}{x} = 1 \quad \text{y} \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{1/x} - x) = 1$$

Luego, la recta  $y = x + 1$  es asíntota oblicua, a la derecha y a la izquierda.

### E. Estudio de $f'(x)$ . Intervalos de Monotonía. Máximos y Mínimos.

**Números Críticos:**

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= xe^{1/x} \left( -\frac{1}{x^2} \right) + e^{1/x} = e^{1/x} - \frac{1}{x} e^{1/x} = \left( 1 - \frac{1}{x} \right) e^{1/x} \Rightarrow \\
 f'(x) &= \left( 1 - \frac{1}{x} \right) e^{1/x}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left( 1 - \frac{1}{x} \right) e^{1/x} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Se tiene solo un número crítico:  $x = 1$ . Observar que no existe  $f'(0)$ , pero  $x = 0$  no es punto crítico porque  $x = 0$  no está en el dominio de  $f$ .

**Intervalos de Monotonía:**

$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x) = (+)(+) = +$ ↗	$f'(x) = (-)(+) = -$ ↘	$f'(x) = (+)(+) = +$ ↗	

$f$  tiene un mínimo relativo en  $x = 1$  y su valor es  $f(1) = e \approx 2.72$

### F. Estudio de $f''(x)$ . Intervalos de Concavidad. Puntos de Inflexión

**Números críticos de segundo orden.**

Derivando  $f'(x)$  obtenemos:  $f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{1/x}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} e^{1/x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} = 0. \text{ No hay solución}$$

Además, tenemos  $f''(x)$  no existe en 0, pero 0 no está en el dominio de  $f$ .

Luego,  $f$  no tiene números crítico de segundo orden y, por tanto, tampoco tiene puntos de inflexión.

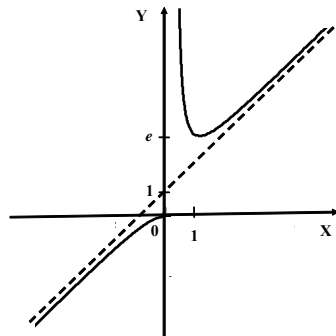
**Intervalos de concavidad:**  $f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{1/x}$

$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f''(x) = (-)(+) = -$		$f''(x) = (+)(+) = +$
∩		∪

Cóncava hacia abajo en  $(-\infty, 0)$  y es cóncava hacia arriba en  $(0, +\infty)$

**F. Esbozo de la gráfica.**

$x$	$f(x)$
-1	$-e$
0	0
1	$e$



## PROBLEMAS PROPUESTOS 8.5

*Graficar las funciones siguientes:*

1.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$       2.  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$       3.  $f(x) = 2x + 5x^{2/5}$

4.  $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 1}$       5.  $f(x) = \frac{x}{(x-1)^{1/3}}$       6.  $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$

7.  $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  ( $f$  es periódica con periodo  $2\pi$ ).

*Graficar las funciones siguientes. Ellas tienen asíntotas oblicuas.*

8.  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$       9.  $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2}$

10.  $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$       11.  $f(x) = xe^{1/x^2}$

## SECCION 8.6

## PROBLEMAS DE OPTIMIZACION

Esta sección lo dedicaremos a resolver problemas de optimización en la Economía, en la Física, en el comercio y, en general, en la vida real. Estos problemas están planteados en términos del lenguaje diario. Nuestra primera labor, la que requiere ingenio, consiste en traducir el problema al lenguaje matemático, quedando expresado mediante una función. La segunda labor es rutinaria, sólo se tiene que calcular el máximo o el mínimo de la función encontrada. Dividimos estos problemas en dos grupos, según el intervalo donde se optimiza la función sea cerrado o no.

**PROBLEMAS DE OPTIMIZACION EN INTERVALOS  
CERRADOS Y FINITOS**

En este grupo de problemas el resultado clave que usaremos nos da el teorema 8.1, que afirma que toda función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  tiene máximo y tiene mínimo, y estos son alcanzados en los números críticos o en los extremos  $a$  ó  $b$  del intervalo.

**PROBLEMA 1.** De un tronco de madera, que tiene una sección circular de 3 dm. de radio, se quiere obtener un tablón de sección rectangular. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo si se desea que éste tenga área máxima?

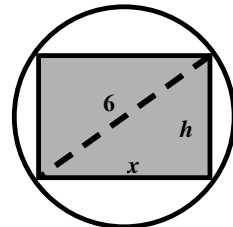
**Solución**

Sean  $x$ ,  $h$  y  $A$  la base, la altura y el área del rectángulo, respectivamente. Tenemos:

$$A = xh \quad (1)$$

Expresemos la altura en términos de la base. Para esto, observamos que el diámetro, la base y la altura, forman un triángulo rectángulo de hipotenusa 6 dm. Luego, usando el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$h = \sqrt{6^2 - x^2} \quad (2)$$



Reemplazando (2) en (1):  $A = x\sqrt{36 - x^2}$

Esta función, que expresa el área del rectángulo en términos de la base, es la que debemos maximizar. ¿En qué intervalo? Como la longitud de la base no puede ser negativa ni exceder la longitud del diámetro, debemos tener:  $0 \leq x \leq 6$ .

En resumen, buscamos el máximo de la función

$$A(x) = x\sqrt{36 - x^2} \text{ en el intervalo } [0, 6].$$

Hallemos los puntos críticos:

$$A'(x) = x \frac{-2x}{2\sqrt{36-x^2}} + \sqrt{36-x^2} = \frac{2(18-x^2)}{\sqrt{36-x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(18-x^2)}{\sqrt{36-x^2}} = 0 \Leftrightarrow 18-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}$$

Además,  $A'(x) = \frac{2(18-x^2)}{\sqrt{36-x^2}}$  no está definida en 6.

Luego, los puntos críticos de  $A(x)$  son  $-3\sqrt{2}$ ,  $3\sqrt{2}$  y 6. Como  $-3\sqrt{2}$  no está en el intervalo  $[0, 6]$  lo desechamos y nos quedamos con  $3\sqrt{2}$  y 6

Comparemos los valores  $A(0)$ ,  $A(6)$  y  $A(3\sqrt{2})$ :

$$A(0) = (0)\sqrt{36-0^2} = 0, \quad A(6) = 6\sqrt{36-6^2} = 0,$$

$$A(3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}\sqrt{36-(3\sqrt{2})^2} = 18$$

Luego, el máximo de  $A(x)$  es  $A(3\sqrt{2}) = 18$  y es alcanzado en  $x = 3\sqrt{2}$ .

Las dimensiones del rectángulo de área máxima son:

$$\text{Base} = x = 3\sqrt{2} \quad \text{y} \quad \text{altura} = h = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

Notar que el rectángulo es un cuadrado.

**PROBLEMA 2.**

Un fabricante de envases construye cajas sin tapa, utilizando láminas de cartón rectangulares de 80 cm. de largo por 50 cm. de ancho. Para formar la caja, de las cuatro esquinas de cada lámina se recorta un pequeño cuadrado y luego se doblan las aletas, como indica la figura. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados si se quiere que la caja tenga el mayor volumen posible?

**Solución**

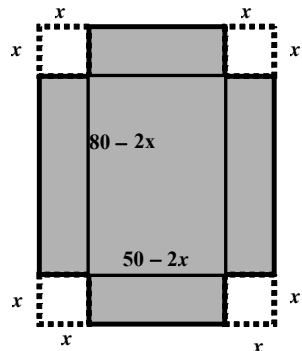
Sea  $x$  la longitud del lado de los cuadrados cortados.

Sabemos que:

$$\text{Volumen de la caja} = (\text{área de la base})(\text{altura})$$

La altura de la caja es  $x$  y su base es un rectángulo de  $50 - 2x$  de largo por  $80 - 2x$  de ancho. Luego, si  $V$  denota el volumen de la caja tenemos que,

$$V = (80 - 2x)(50 - 2x)(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$$



La longitud  $x$  no puede ser negativa ni puede exceder la mitad del ancho de la lámina inicial.

Luego,  $0 \leq x \leq 25$ .

En resumen:

Debemos hallar el máximo de la función volumen

$$V(x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x, \text{ en el intervalo } [0, 25].$$

Hallemos sus números críticos:

$$V'(x) = 12x^2 - 520x + 4000 = 4(x - 10)(3x - 100)$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 4(x - 10)(3x - 100) = 0 \Leftrightarrow x = 10 \text{ ó } x = \frac{100}{3}$$

Los números críticos son 10 y  $100/3$ . Desechamos  $100/3$ , por estar fuera del intervalo  $[0, 25]$ . Nos quedamos con 10.

Comparemos los valores  $V(0)$ ,  $V(25)$  y  $V(10)$ :

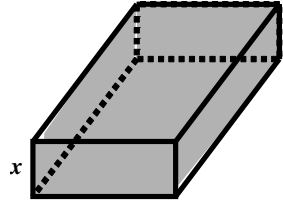
$$V(0) = (80 - 2(0))(50 - 2(0))(0) = 0$$

$$V(25) = (80 - 2(25))(50 - 2(25))(25) = 0$$

$$V(10) = (80 - 2(10))(50 - 2(10))(10) = 18,000$$

El máximo de  $V(x)$  es  $V(10) = 18,000 \text{ cm}^3$  y es alcanzado en  $x = 10$ .

Luego, la longitud del lado de los cuadrados cortados debe ser de 10 cm.



### PROBLEMA 3.

Se desea construir una pista de carrera de 400 m. de perímetro. La pista debe estar formada por un rectángulo con dos semicírculos localizados en dos lados opuestos del rectángulo. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo si se quiere que el área de éste sea máxima?

#### Solución

Sean  $b$  y  $x$  las longitudes de los lados del rectángulo. Su área es:

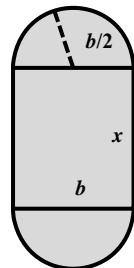
$$A = bx \quad (1)$$

El radio de los semicírculos es  $b/2$  y, por tanto, la longitud de las dos semicircunferencias es:

$$2(\pi b/2) = \pi b.$$

Como el perímetro de la pista es de 400 m, tenemos:

$$2x + \pi b = 400 \Rightarrow b = \frac{400 - 2x}{\pi}$$



Reemplazando este valor de  $b$  en (1):

$$A = \left( \frac{400 - 2x}{\pi} \right) x = \frac{2}{\pi} (200x - x^2)$$

La longitud  $x$  es no negativa y no puede exceder la mitad del perímetro. Esto es,

$$0 \leq x \leq 200.$$

En resumen, debemos hallar el máximo de la función:

$$A(x) = \frac{2}{\pi} (200x - x^2) \text{ en el intervalo } [0, 200].$$

Hallemos sus números críticos:

$$A'(x) = \frac{2}{\pi} (200 - 2x) = \frac{4}{\pi} (100 - x)$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 100 - x = 0 \Leftrightarrow x = 100$$

Sólo existe un número crítico, que es 100.

Comparemos los valores  $A(0)$ ,  $A(200)$  y  $A(100)$ :

$$A(0) = \frac{2}{\pi} (200(0) - 0^2) = 0, \quad A(200) = \frac{2}{\pi} (200(200) - 200^2) = 0$$

$$A(100) = \frac{2}{\pi} (200(100) - (100)^2) = \frac{20,000}{\pi}$$

Luego, el máximo es  $A(100) = \frac{20,000}{\pi}$  y lo alcanza en  $x = 100$ .

En consecuencia, las dimensiones del rectángulo de área máxima son:

$$x = 100, \quad b = \frac{400 - 2(100)}{\pi} = \frac{200}{\pi}.$$

**PROBLEMA 4.** Una isla se encuentra a 800 m. de una playa recta. En la playa, a 2,000 m. de distancia del punto  $F$  que está frente a la isla, funciona una planta eléctrica. Para dotar de luz a la isla se tiende un cable desde la planta hasta un punto  $P$  de la playa y de allí hasta la isla. El costo del tendido de un metro de cable en tierra es  $3/5$  del costo de un metro del tendido en agua. ¿Dónde debe estar localizado el punto  $P$  para que el costo del tendido sea mínimo?

**Solución**

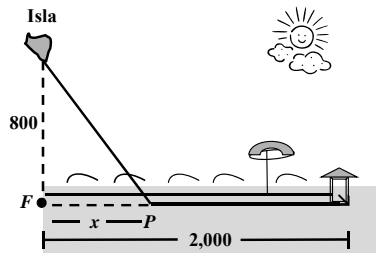
Sea  $k$  el costo de tender 1 m. de cable en el agua.

Sea  $x$  la distancia del punto  $P$  al punto  $F$ .

La distancia de  $P$  a la planta es  $2,000 - x$ .

El costo del tendido del cable en tierra es

$$\frac{3}{5}k(2,000 - x)$$



La distancia de  $P$  a la isla, por el teorema de Pitágoras, es

$$\sqrt{x^2 + (800)^2} = \sqrt{x^2 + 640,000}$$

y el costo del tendido de cable en el agua es

$$k\sqrt{x^2 + 640,000}$$

Luego, el costo total del tendido es:

$$C(x) = \frac{3}{5}k(2,000 - x) + k\sqrt{x^2 + 640,000}$$

Además,  $x$  no debe ser negativa ni exceder 2,000. Esto es,

$$0 \leq x \leq 2,000$$

En resumen, debemos hallar el mínimo de la función

$$C(x) = \frac{3}{5}k(2,000 - x) + k\sqrt{x^2 + 640,000} \text{ en el intervalo } [0, 2,000].$$

Hallemos los números críticos de  $C(x)$ :

$$C'(x) = -\frac{3}{5}k + \frac{kx}{\sqrt{x^2 + 640,000}}$$

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{5}k + \frac{kx}{\sqrt{x^2 + 640,000}} = 0 \Leftrightarrow 3k\sqrt{x^2 + 640,000} = 5kx \Rightarrow$$

$$3\sqrt{x^2 + 640,000} = 5x \Rightarrow 9(x^2 + 640,000) = 25x^2 \Rightarrow x = \pm 600$$

Sólo nos quedamos con 600, ya que  $-600$  no está en el intervalo  $[0, 2,000]$ .

Ahora, comparamos los valores  $C(0)$ ,  $C(600)$  y  $C(2,000)$ :

$$C(0) = \frac{3}{5}k(2,000) + k\sqrt{640,000} = 2,000k$$

$$C(600) = \frac{3}{5}k(1,400) + k\sqrt{640,000 + 640,000} = 1,840k$$

$$C(2,000) = \frac{3}{5}k(0) + k\sqrt{4,000,000 + 640,000} = 400\sqrt{29}k \approx 2,154k$$

El costo mínimo es  $1,840k$  y es alcanzado en el punto  $x = 600$ . Luego, el punto  $P$  debe localizarse entre la planta y el punto  $F$  a 600 m. de éste.

**PROBLEMA 5.**

Un hotel tiene 71 habitaciones. El gerente ha observado que cuando la tarifa por habitación es \$ 50, todas las habitaciones son alquiladas y, por cada \$ 2 de aumento en la tarifa, se desocupa una habitación. Si el mantenimiento (limpieza, lavado, etc.) de cada habitación ocupada es de \$ 4.

- ¿Qué tarifa debe cobrar el gerente para obtener máxima ganancia?
- ¿Cuántas habitaciones se ocupan con esta tarifa que da máxima ganancia?

**Solución**

Sea  $G$  la ganancia del hotel. Se tiene que:

$$G = (\text{habitaciones ocupadas})(\text{tarifa por habitación.}) - 4(\text{habitaciones ocupadas})$$

Sea  $x$  el número de habitaciones desocupadas. Se debe cumplir que  $0 \leq x \leq 71$ .

Se tiene que:

El número de habitaciones ocupadas es  $71 - x$ .

El incremento en la tarifa por habitación es  $2x$ .

La tarifa por habitación es  $50 + 2x$

Reemplazando estos valores en la igualdad inicial, tenemos:

$$G(x) = (71 - x)(50 + 2x) - 4(71 - x) \Rightarrow G(x) = 3,266 + 96x - 2x^2$$

Debemos hallar el máximo de

$$G(x) = 3,266 + 96x - 2x^2 \text{ en el intervalo } [0, 71].$$

Hallemos los números críticos:

$$G'(x) = 96 - 4x \text{ y } G'(x) = 0 \Rightarrow 96 - 4x = 0 \Rightarrow x = 24$$

$G(x)$  tiene un único número crítico, que 24 y que está en el intervalo  $[0, 71]$ .

Comparamos los valores  $G(0)$ ,  $G(24)$  y  $G(71)$ :

$$G(0) = 3,266 + 96(0) - 2(0)^2 = 3,266$$

$$G(24) = 3,266 + 96(24) - 2(24)^2 = 4,418$$

$$G(71) = 3,266 + 96(71) - 2(71)^2 = 0$$

La ganancia máxima es  $G(24) = 4,418$ , la cual es alcanzada cuando  $x = 24$ .

En consecuencia,

- La tarifa que da máxima ganancia es  $50 + 2(24) = 98$  dólares.
- Con esta tarifa de 98 dólares se alquilan  $71 - 24 = 47$  habitaciones.

**PROBLEMA 6.** De una lámina metálica circular de radio  $R$  se quiere cortar un sector circular para construir una copa cónica. Hallar la medida del ángulo central  $\theta$  que proporcione la copa de capacidad máxima.

**Solución**

Sea  $h$  la altura de la copa y  $r$  el radio de su base.

El volumen de la copa, por ser un cono, es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad (1)$$

La longitud de la circunferencia de la base de la copa debe ser igual a la longitud del arco determinado por el ángulo  $\theta$ . Esto es,

$$2\pi r = R\theta$$

De donde,  $r = \frac{R\theta}{2\pi}$  (2)

Por otro lado, se tiene que

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R\theta}{2\pi}\right)^2} = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \quad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1)

$$V = V(\theta) = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{R\theta}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}\right) = \frac{R^3}{24\pi^2} \theta^2 \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \quad (4)$$

Para nuestro problema debemos tener que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

En resumen, buscamos el máximo de

$$V(\theta) = \frac{R^3}{24\pi^2} \theta^2 \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}, \text{ en el intervalo } [0, 2\pi].$$

Puntos críticos:

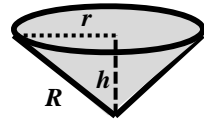
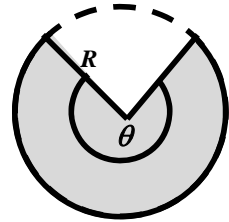
$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{R^3}{24\pi^2} \left[ \theta^2 \frac{-\theta}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} + 2\theta \sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \right] = \frac{R^3}{24\pi^2} \left[ -\frac{\theta(3\theta^2 - 8\pi^2)}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \right]$$

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \theta(3\theta^2 - 8\pi^2) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ ó } 3\theta^2 - 8\pi^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0 \text{ ó } \theta = 2\pi\sqrt{2/3}$$

Ahora, comparemos los valores  $V(0)$ ,  $V(2\pi)$  y  $V(2\pi\sqrt{2/3})$  :

$$V(0) = \frac{R^3}{24\pi^2} (0)^2 \sqrt{4\pi^2 - 0^2} = 0$$



$$V(2\pi) = \frac{R^3}{24\pi^2} (2\pi)^2 \sqrt{4\pi^2 - (2\pi)^2} = 0$$

$$V(2\pi\sqrt{2/3}) = \frac{R^3}{24\pi^2} (2\pi\sqrt{2/3})^2 \sqrt{4\pi^2 - (2\pi\sqrt{2/3})^2} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27} R^3$$

El máximo de  $V(\theta)$  es  $V(2\pi\sqrt{2/3}) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27} R^3$  y es alcanzado en  $\theta = 2\pi\sqrt{2/3}$

Luego, el ángulo central buscado es  $\theta = 2\pi\sqrt{2/3} \approx 2.565 \text{ rad.} \approx 146.7^\circ$

**PROBLEMA 7.** Hallar las dimensiones del rectángulo con lados paralelos a los ejes y de área máxima que puede inscribirse en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Solución**

Consideremos un rectángulo cualquiera, inscrito en la elipse y con lados paralelos a los ejes.

Sea  $(x, y)$  el vértice del rectángulo en el primer cuadrante. El área de este rectángulo es:

$$A = 4xy$$

Despejamos  $y$  en la ecuación de la elipse:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Reemplazando este valor en la ecuación del área del rectángulo:

$$A(x) = 4 \frac{b}{a} x \sqrt{a^2 - x^2}$$

Es claro que  $0 \leq x \leq a$ .

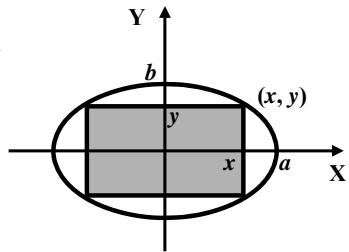
Debemos hallar el máximo de

$$A(x) = 4 \frac{b}{a} x \sqrt{a^2 - x^2} \text{ en el intervalo } [0, a].$$

Hallemos los números críticos:

$$A'(x) = 4 \frac{b}{a} x \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + 4 \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = 4 \frac{b}{a} \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



Desechamos a  $-\frac{a\sqrt{2}}{2}$  por no estar en el intervalo  $[0, a]$ .

Comparemos los valores  $A(0)$ ,  $A(a)$  y  $A(a\sqrt{2}/2)$

$$A(0) = 4\frac{b}{a}(0)\sqrt{a^2 - 0^2} = 0, \quad A(a) = 4\frac{b}{a}(a)\sqrt{a^2 - a^2} = 0 \quad y$$

$$A\left(a\sqrt{2}/2\right) = 4\frac{b}{a}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2ab$$

Luego, el máximo de  $A(x)$  es  $A(a\sqrt{2}/2) = 2ab$  y es alcanzado en  $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

El valor de  $y$  correspondiente a este valor de  $x$  es:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \left(a\sqrt{2}/2\right)^2} = \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

En consecuencia, las dimensiones del rectángulo buscado son

$$2x = a\sqrt{2} \quad y \quad 2y = b\sqrt{2}.$$

### PROBLEMA 8.

En un lago circular de 4 Km. de radio se tienen dos puntos  $P$  y  $Q$ , localizados en la orilla y diametralmente opuestos. Un pescador se encuentra en el punto  $P$  y quiere llegar, en el menor tiempo, al punto  $Q$ . El pescador puede remar a razón de 4 Km/h. y puede caminar a razón de 8 Km/h. ¿Con qué ángulo  $\theta$  debe remar para alcanzar el punto  $R$  para luego caminar hacia  $Q$ ?

### Solución

Sea  $t_1$  el tiempo utilizado remando,  $t_2$  el tiempo utilizado caminando y  $T$  el tiempo total. Se tiene que:

$$T = t_1 + t_2 \quad (1)$$

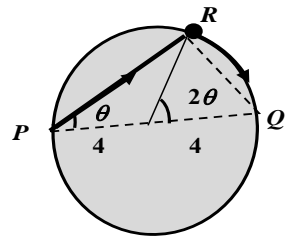
El tiempo  $t_1$  es igual a la distancia de  $P$  a  $R$  dividida entre la velocidad del pescador remando. Esto es,

$$t_1 = \frac{d(P,R)}{4}$$

Considerando que el ángulo  $\angle PRQ$  es recto (todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto), se tiene que:

$$d(P,R) = 8 \cos \theta \quad y, \quad \text{por tanto,} \quad t_1 = \frac{8 \cos \theta}{4} = 2 \cos \theta \quad (2)$$

Por otro lado, el tiempo  $t_2$  es igual a la longitud del arco  $\widehat{RQ}$  dividida entre la velocidad del pescador caminando. Esto es,



$$t_2 = \frac{\text{Longitud del arco } \widehat{RQ}}{8}$$

Pero,

Longitud del arco  $\widehat{RQ} = 4(\text{ángulo central}) = 4(2\theta) = 8\theta$  y, por tanto,

$$t_2 = \frac{8\theta}{8} = \theta \quad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) conseguimos:  $T = 2\cos\theta + \theta$

Es claro que  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Luego,

Debemos hallar el mínimo de

$$T(\theta) = 2\cos\theta + \theta \text{ en el intervalo } [0, \pi/2].$$

Hallemos los números críticos:

$$T'(\theta) = -2 \operatorname{sen} \theta + 1 \quad \text{y}$$

$$T'(\theta) = 0 \Leftrightarrow -2 \operatorname{sen} \theta + 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Comparemos  $T(0)$ ,  $T(\pi/2)$  y  $T(\pi/6)$ :

$$T(0) = 2\cos 0 = 2 \text{ horas}$$

$$T(\pi/2) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = 2(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \approx 1.57 \text{ horas.}$$

$$T(\pi/6) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} \approx 2.25 \text{ horas}$$

Luego, el mínimo es  $T(\pi/2) \approx 1.57$  horas y es alcanzado en  $\frac{\pi}{2}$ .

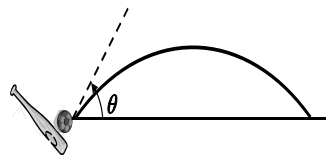
En consecuencia, el pescador debe salir con un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$ . Esto significa que le conviene más olvidarse de la lancha y bordear el lago caminando.

**PROBLEMA 9.**

El alcance de una pelota arrojada por un beisbolista está gobernado por la función:

$$A(\theta) = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta,$$

donde,  $\theta$  es el ángulo de inclinación al lanzar la pelota,  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $v_0$  es la velocidad inicial con que la pelota es lanzada.



Hallar el ángulo que proporcione el máximo alcance.

**Solución**

Debemos hallar el máximo de  $A(\theta) = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta$  en  $[0, \pi/2]$ .

Hallemos los números críticos:

$$A'(\theta) = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos 2\theta$$

$$A'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{v_0^2}{g} \cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Comparemos los valores  $A(0)$ ,  $A(\pi/2)$  y  $A(\pi/4)$ :

$$A(0) = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2(0) = 0 \quad A(\pi/2) = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2(\pi/2) = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} \pi = 0$$

$$A(\pi/4) = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2(\pi/4) = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \frac{v_0^2}{g}.$$

El máximo es  $A(\pi/4) = \frac{v_0^2}{g}$ , que es alcanzado en  $\frac{\pi}{4}$ .

Luego, para lograr el máximo alcance, la pelota debe lanzarse con un ángulo de inclinación de  $\frac{\pi}{4}$  Rad.

**PROBLEMA 10.** Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo inscrito en una esfera de radio  $R$ .

**Solución**

Sea  $r$  el radio del cilindro,  $h$  su altura y  $V$  su volumen.

Sabemos que:

$$V = (\text{área de la base})(\text{altura}) = \pi r^2 h \quad (1)$$

Por Pitágoras se tiene:

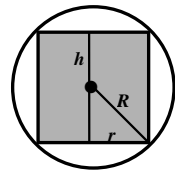
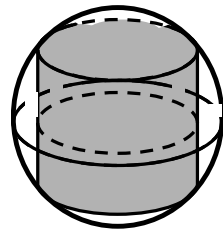
$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 - r^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

$$\Rightarrow V = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$$

Es claro que  $0 \leq r \leq R$ .

Debemos hallar el máximo de  $V(r) = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$  en  $[0, R]$ .

Hallemos los números críticos:



$$V'(r) = 2\pi r^2 \frac{-r}{\sqrt{R^2 - r^2}} + 4\pi r \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{2\pi r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 0 \Rightarrow 2\pi r(2R^2 - 3r^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \text{ ó } 2R^2 - 3r^2 = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ó } r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$$

Además,  $V'(r)$  no está definida en  $r = R$ .

Luego, los puntos críticos de  $V(r)$  en  $[0, R]$  son:  $0$ ,  $\frac{R\sqrt{6}}{3}$  y  $R$ .

Comparemos  $V(0)$ ,  $V(R)$  y  $V(R\sqrt{6}/3)$ :

$$V(0) = 2\pi(0)^2 \sqrt{R^2 - 0^2} = 0, \quad V(R) = 2\pi R^2 \sqrt{R^2 - R^2} = 0,$$

$$V\left(\frac{R\sqrt{6}}{3}\right) = 2\pi \left(\frac{R\sqrt{6}}{3}\right)^2 \sqrt{R^2 - \left(\frac{R\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9} R^3$$

Luego, el máximo es  $V\left(\frac{R\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9} R^3$  y es alcanzado en  $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$

Por otro lado, sabemos que  $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ . Luego,

$$h = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{R\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

Por tanto, las dimensiones del cilindro buscado son:

$$\text{radio} = \frac{R\sqrt{6}}{3} \approx 0.817R \quad \text{y} \quad \text{altura} = \frac{2R\sqrt{3}}{3} \approx 1.155R$$

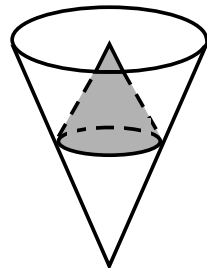
**PROBLEMA 11.** Probar que el volumen del mayor cono circular recto inscrito en otro cono circular recto es  $\frac{4}{27}$  del volumen del cono grande.

**Solución**

Sean  $r$ ,  $h$  y  $V$  el radio, la altura y el volumen del cono pequeño. Sean  $R$ ,  $H$  y  $V_1$  el radio, la altura y el volumen del cono grande.

Sabemos que:

$$(1) \quad V = \frac{\pi}{3} r^2 h \quad (2) \quad V_1 = \frac{\pi}{3} R^2 H$$



Como los triángulos  $\triangle ABD$  y  $\triangle ACE$  son semejantes,

$$\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R} \Rightarrow h = \frac{H}{R}(R-r) \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (1):

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 \frac{H}{R}(R-r) = \frac{\pi H}{3R} r^2 (R-r)$$

Vemos que  $0 \leq r \leq R$ .

Buscamos el máximo de

$$V(r) = \frac{\pi H}{3R} r^2 (R-r) \text{ en } [0, R].$$

Hallemos los números críticos:

$$V'(r) = \frac{\pi H}{3R} [r^2(-1) + 2(R-r)r] = \frac{\pi H}{3R} [2rR - 3r^2] = \frac{\pi H}{3R} r [2R - 3r]$$

$$V'(r) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ó } 2R - 3r = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ó } r = \frac{2}{3}R$$

Comparemos  $V(0)$ ,  $V(R)$  y  $V(2R/3)$ :

$$V(0) = \frac{\pi H}{3R} (0)^2 (R-0) = 0, \quad V(R) = \frac{\pi H}{3R} R^2 (R-R) = 0,$$

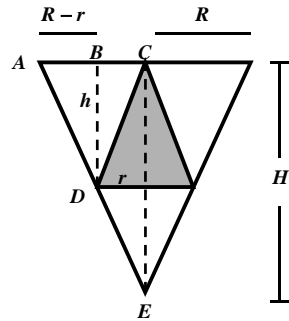
$$V(2R/3) = \frac{\pi H}{3R} \left(\frac{2R}{3}\right)^2 \left(R - \frac{2R}{3}\right) = \frac{4}{81} \pi R^2 H$$

Luego, el máximo es  $V(2R/3) = \frac{4}{81} \pi R^2 H$ .

Ahora, teniendo en cuenta (2),

$$V(2R/3) = \frac{4}{81} \pi R^2 H = \frac{4}{27} \left[ \frac{\pi}{3} R^2 H \right] = \frac{4}{27} V_1$$

Esto es, el volumen del cono pequeño es  $\frac{4}{27}$  del volumen del cono grande.

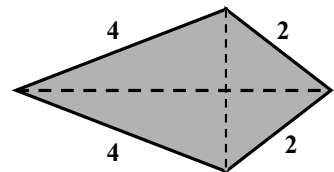


### PROBLEMA 12.

Se quiere hacer el marco de un papagayo (cometa) con seis piezas hilos de nailon. Las cuatro piezas exteriores ya han sido cortadas; dos de 4 dm. y dos de 2 dm, como indica la figura. ¿Qué longitud deben tener las diagonales si se quiere que el área del papagayo sea máxima?

### Solución

La diagonal más larga divide al papagayo en dos triángulos simétricos. Esto implica que las dos diagonales dividen al papagayo en cuatro triángulos rectángulos.

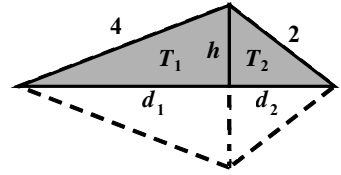


Si  $h$  es la mitad de la longitud de la diagonal menor, se tiene que:

$$0 \leq h \leq 2$$

$$\text{Area del triángulo } T_1 = \frac{1}{2} d_1 h = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 - h^2} h$$

$$\text{Area del triángulo } T_2 = \frac{1}{2} d_2 h = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 - h^2} h$$



El área  $A$  del papagayo es igual a dos veces el área de  $T_1$  más dos veces el área de  $T_2$ . Luego,

$$A = h\sqrt{4^2 - h^2} + h\sqrt{2^2 - h^2} = \left( \sqrt{16 - h^2} + \sqrt{4 - h^2} \right) h$$

En resumen, buscamos el máximo de

$$A(h) = \left( \sqrt{16 - h^2} + \sqrt{4 - h^2} \right) h \quad \text{en el intervalo } [0, 2]$$

Hallemos los números críticos:

$$\begin{aligned} A'(h) &= \left( \sqrt{16 - h^2} + \sqrt{4 - h^2} \right) + \left( \frac{-h}{\sqrt{16 - h^2}} + \frac{-h}{\sqrt{4 - h^2}} \right) h \\ &= \left( \sqrt{16 - h^2} + \sqrt{4 - h^2} \right) - \left( \frac{\sqrt{4 - h^2} + \sqrt{16 - h^2}}{\sqrt{16 - h^2} \sqrt{4 - h^2}} \right) h^2 \\ &= \left( \sqrt{16 - h^2} + \sqrt{4 - h^2} \right) \left( 1 - \frac{h^2}{\sqrt{16 - h^2} \sqrt{4 - h^2}} \right) \\ &= \left( \frac{\sqrt{16 - h^2} + \sqrt{4 - h^2}}{\sqrt{16 - h^2} \sqrt{4 - h^2}} \right) \left( \sqrt{16 - h^2} \sqrt{4 - h^2} - h^2 \right) \end{aligned}$$

$$A'(h) = 0 \Rightarrow \sqrt{16 - h^2} \sqrt{4 - h^2} = h^2 \Rightarrow (16 - h^2)(4 - h^2) = h^4$$

$$\Rightarrow 64 - 20h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{64}{20} = \frac{16}{5} \Rightarrow h = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Tenemos sólo un número crítico:  $h = \frac{4}{\sqrt{5}}$

Comparemos  $A(0)$ ,  $A(2)$  y  $A\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ :

$$A(0) = \left( \sqrt{16 - 0^2} + \sqrt{4 - 0^2} \right) (0) = 0, \quad A(2) = \left( \sqrt{16 - 2^2} + \sqrt{4 - 2^2} \right) (2) = 4\sqrt{3} \approx 6.93$$

$$\begin{aligned}
 A(4/\sqrt{5}) &= \left( \sqrt{16 - (4/\sqrt{5})^2} + \sqrt{4 - (4/\sqrt{5})^2} \right) \left( \frac{4}{\sqrt{5}} \right) \\
 &= \left( \frac{8}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \left( \frac{4}{\sqrt{5}} \right) = \left( \frac{10}{\sqrt{5}} \right) \left( \frac{4}{\sqrt{5}} \right) = 8
 \end{aligned}$$

Luego,  $A(4/\sqrt{5}) = 8$  es el máximo absoluto.

En consecuencia, las longitudes de las diagonales buscadas son:

$$\text{Diagonal menor} = 2h = 2 \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \approx 3.58 \text{ dm.}$$

$$\text{Diagonal mayor} = d_1 + d_2 = \sqrt{16 - (4/\sqrt{5})^2} + \sqrt{4 - (4/\sqrt{5})^2} = \frac{10}{\sqrt{5}} \approx 4.47 \text{ dm.}$$

**PROBLEMA 13.**

Se va a colocar un poste con un farol en el centro de una plazoleta circular de 20 m de radio. ¿Qué altura debe estar el farol para que ilumine lo mejor posible la vereda que rodea la plazoleta?

Se sabe que la iluminación  $I$  de la plazoleta es directamente proporcional al coseno del ángulo  $\theta$  de incidencia de los rayos luminosos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $d$  del farol a la plazoleta.

**Solución**

Nos dicen que:  $I(\theta) = k \frac{\cos \theta}{d^2}$ ,  $k$  es constante

De acuerdo a la figura,

$$\text{sen } \theta = \frac{20}{d} \Rightarrow d = \frac{20}{\text{sen } \theta}$$

Reemplazando este valor de  $d$  en la ecuación de iluminación:

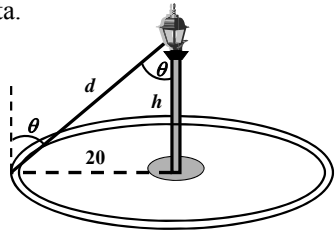
$$I(\theta) = k \frac{\cos \theta}{(20/\text{sen } \theta)^2} = \frac{k}{400} \cos \theta \text{ sen}^2 \theta$$

Debemos optimizar:

$$I(\theta) = \frac{k}{400} \cos \theta \text{ sen}^2 \theta \text{ en el intervalo } [0, \pi/2]$$

Hallemos los números críticos:

$$\begin{aligned}
 I'(\theta) &= \frac{k}{400} [\cos \theta (2 \text{ sen } \theta \cos \theta) + \text{sen}^2 \theta (-\text{sen } \theta)] \\
 &= \frac{k}{400} \text{sen } \theta [2 \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta]
 \end{aligned}$$



$$I'(\theta) = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \text{ ó } 2\cos^2\theta = \sin^2\theta \Rightarrow \theta = 0 \text{ ó } \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 2$$

$$\Rightarrow \theta = 0 \text{ ó } \tan^2\theta = 2 \Rightarrow \theta = 0 \text{ ó } \theta_1 = \tan^{-1}\sqrt{2} = 0.9553$$

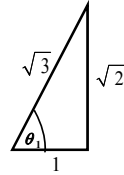
Tenemos dos puntos críticos:  $\theta = 0$  y  $\theta_1 = \tan^{-1}\sqrt{2} = 0.9553$

Comparemos:  $I(0)$ ,  $I(\pi/2)$  y  $I(\theta_1) = I(0.9553)$

$$I(0) = \frac{k}{400} \cos(0) \sin^2(0) = \frac{k}{400} (1)(0) = 0,$$

$$I(\pi/2) = \frac{k}{400} \cos(\pi/2) \sin^2(\pi/2) = \frac{k}{400} (0)(1)^2 = 0$$

$$I(\theta_1) = \frac{k}{400} \cos(\theta_1) \sin^2(\theta_1) = \frac{k}{400} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{k}{600\sqrt{3}} \approx 0.00096k$$



Luego,  $I(\theta_1) = I(0.9553) = 0.00096k$  es el máximo.

Por otro lado, se tiene:  $\tan\theta = \frac{20}{h} \Rightarrow h = \frac{20}{\tan\theta}$

En particular, tomando  $\theta = \theta_1$  y sabiendo que  $\tan\theta_1 = \sqrt{2}$  se tiene:

$$h = \frac{20}{\tan\theta_1} = \frac{20}{\sqrt{2}} \approx 14.14 \text{ m}$$

Esto es, la máxima iluminación en el corredor se obtiene al colocar el farol a 14.14 m de altura.

## PROBLEMAS DE EXTREMOS EN INTERVALOS ABIERTOS O SEMICERRADOS

En esta parte aplicaremos el teorema 8.12 para resolver problemas prácticos que se expresan mediante funciones cuyos dominios son intervalos abiertos o semicerrados. Este teorema afirma que un extremo local único es un extremo absoluto.

**PROBLEMA 14.** Una fábrica, para envasar alimentos, necesita potes de estaño con tapa, que tengan la forma de un cilindro circular recto y un volumen de  $250\pi \text{ cm}^3$ . Hallar las dimensiones que debe tener el pote si se quiere usar la mínima cantidad de estaño en su construcción.

### Solución

Si  $A$  es el área total de las paredes del pote, el pote de mínima cantidad de estaño es el que tiene el área  $A$  mínima.

Sea  $r$  el radio de la base,  $h$  la altura. El área  $A$  es la suma de las áreas de las dos bases, que es  $2\pi r^2$ , más el área de la superficie lateral, que es  $2\pi rh$ . Esto es,

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad (1)$$

Por otro lado, el volumen del cilindro circular recto es

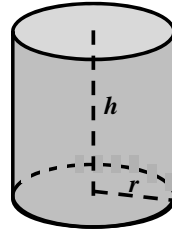
$$V = \pi r^2 h.$$

En nuestro caso, como  $V = 250\pi$ , tenemos que

$$\pi r^2 h = 250\pi \Rightarrow r^2 h = 250 \Rightarrow h = \frac{250}{r^2}$$

Reemplazando este valor de  $h$  en (1):

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{250}{r^2} \Rightarrow A = 2\pi \left( r^2 + \frac{250}{r} \right)$$



Vemos que la función  $A$  no está definida para  $r = 0$ . Además, como el radio no puede ser negativo, debemos tener que  $r > 0$ . En consecuencia, el problema consiste en hallar el mínimo de la función área:

$$A(r) = 2\pi \left( r^2 + \frac{250}{r} \right) \text{ en el intervalo abierto } (0, +\infty).$$

Hallemos los números críticos:

$$A'(r) = 2\pi \left( 2r - \frac{250}{r^2} \right) = 4\pi \left( \frac{r^3 - 125}{r^2} \right)$$

$$A'(r) = 0 \Rightarrow r^3 - 125 = 0 \Rightarrow r^3 = 125 \Rightarrow r = 5$$

$A'(r)$  no está definida en 0, pero 0 no está en  $(0, +\infty)$ .

Luego, 5 es el único punto crítico de  $A(r)$  en el intervalo  $(0, +\infty)$ .

Apliquemos a 5 el criterio de la segunda derivada:

$$A''(r) = 2\pi \left( 2 + \frac{250}{r^3} \right) \Rightarrow A''(5) = 2\pi \left( 2 + \frac{500}{5^3} \right) = 12\pi > 0$$

Luego,  $A(5) = 150\pi$  es un mínimo local. Como éste es el único extremo local de la función  $A(r)$  en  $(0, +\infty)$ , se concluye que  $A(5) = 150\pi$  es el mínimo absoluto.

En consecuencia, las dimensiones buscadas del pote son:

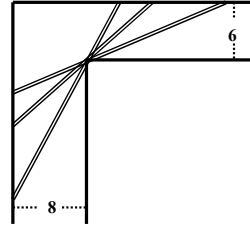
$$\text{radio} = r = 5 \text{ cm. y altura} = h = \frac{250}{5^2} = 10 \text{ cm.}$$

**PROBLEMA 15.**

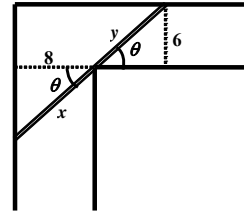
Un local tiene dos corredores de 6 y 8 metros de ancho, que forman una esquina como indica la figura. Hallar el largo del tubo de mayor longitud posible que pueda pasar horizontalmente por la esquina.

**Solución**

Tracemos los segmentos que, pasando por el vértice interior, tocan los lados exteriores de ambos corredores. Estos segmentos tienen distintas longitudes. La longitud del tubo que buscamos corresponde a la longitud mínima de los segmentos antes mencionados.



Tomemos uno de los segmentos. La esquina divide a este segmento en dos partes cuyas longitudes las denotamos por  $x$  e  $y$ , respectivamente. Si  $L$  es la longitud del segmento, tenemos que:



(1)  $L = x + y$ ,    (2)  $x = 8 \sec \theta$ ,    (3)  $y = 6 \operatorname{cosec} \theta$

Reemplazando (2) y (3) en (1) obtenemos:

$$L(\theta) = 8 \sec \theta + 6 \operatorname{cosec} \theta \quad (4)$$

$L(\theta)$  no está definida en 0 ni en  $\frac{\pi}{2}$ . Esto es,

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Nuestra tarea es encontrar el mínimo absoluto de la función

$$L(\theta) = 8 \sec \theta + 6 \operatorname{cosec} \theta \quad \text{en } (0, \pi/2).$$

Hallemos los números críticos:

$$L'(\theta) = 8 \sec \theta \tan \theta - 6 \operatorname{cosec} \theta \cot \theta \quad (5)$$

$$L'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 8 \sec \theta \tan \theta = 6 \operatorname{cosec} \theta \cot \theta \Leftrightarrow 8 \frac{1}{\cos \theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 6 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^3 \theta}{\cos^3 \theta} = \frac{6}{8} \Leftrightarrow \tan^3 \theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan \theta = \sqrt[3]{3/4}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(\sqrt[3]{3/4})$$

$L(\theta)$  tiene un único punto crítico en el intervalo abierto  $(0, \pi/2)$ , que es

$$\theta_0 = \tan^{-1}(\sqrt[3]{3/4}) \approx 0.7376 \text{ rad.} \approx 42^\circ 15' 25''$$

Analicemos la naturaleza del punto crítico:

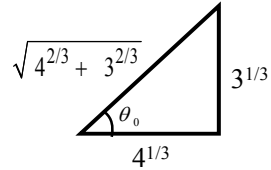
$$L''(\theta) = 8[\sec \theta \tan^2 \theta + \sec^3 \theta] + 6[\operatorname{cosec} \theta \cot^2 \theta + \operatorname{cosec}^3 \theta]$$

Como  $\theta_0$  está en el intervalo  $(0, \pi/2)$ , y aquí todas las funciones trigonométricas son positivas, tenemos que  $L''(\theta_0) > 0$ . Por tanto,  $L(\theta_0)$  es un mínimo local. Además, por ser éste el único extremo local en  $(0, \pi/2)$ , concluimos también que  $L(\theta_0)$  es mínimo absoluto.

Considerando que  $\tan \theta_0 = \frac{\sqrt[3]{3/4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3^{1/3}}{4^{1/3}}$ ,

construimos el triángulo adjunto. Tenemos:

$$\begin{aligned} L(\theta_0) &= 8 \sec \theta_0 + 6 \operatorname{cosec} \theta_0 \\ &= 8 \frac{(4^{2/3} + 3^{2/3})^{1/2}}{4^{1/3}} + 6 \frac{(4^{2/3} + 3^{2/3})^{1/2}}{3^{1/3}} \\ &= 2(4)^{2/3} (4^{2/3} + 3^{2/3})^{1/2} + 2(3)^{2/3} (4^{2/3} + 3^{2/3})^{1/2} \\ &= 2(4^{2/3} + 3^{2/3})(4^{2/3} + 3^{2/3})^{1/2} = 2(4^{2/3} + 3^{2/3})^{3/2} \\ &= 2\left(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{9}\right)^{3/2} \approx 9.87 \text{ m.} \end{aligned}$$

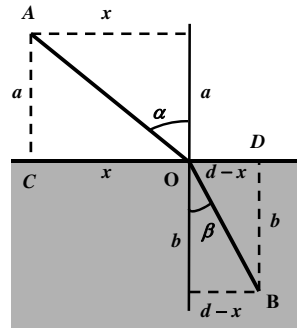


En conclusión, la longitud del tubo de mayor longitud posible que pueda pasar horizontalmente por la esquina es 9.87 m.

**PROBLEMA 16. Refracción de la luz.**

El **principio de Fermat** de óptica dice que la luz va de un punto a otro por el camino que requiere la menor cantidad de tiempo.

Se tiene un punto  $A$  que está a  $a$  m. arriba de la superficie de una piscina y un punto  $B$  que está dentro del agua a  $b$  m. de profundidad. Desde  $A$  parte un rayo, toca la superficie del agua en un punto  $O$ , cambia de dirección y pasa por el punto  $B$ . El ángulo  $\alpha$  es el ángulo de **incidencia** y  $\beta$  es el de **refracción**.



Si la luz se propaga en el aire a una velocidad  $v_1$ , y en el agua a una velocidad  $v_2$ , usando el **principio de Fermat**, probar que

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

**Solución**

Sean  $x$  la distancia de  $C$  a  $O$ ,  $d$  la distancia de  $C$  a  $D$  y  $T = T(x)$  el tiempo que toma el rayo de luz para llegar desde  $A$  hasta  $B$  pasando por el punto  $O$ . Sean  $t_1$  y  $t_2$  los tiempos que toma el rayo de luz para llegar de  $A$  a  $O$  y de  $O$  a  $B$ , respectivamente. Tenemos:

Longitud de  $\overline{AO} = \sqrt{a^2 + x^2}$  y Longitud de  $\overline{OB} = \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$ .

Luego,

$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Como,  $T(x) = t_1 + t_2$ , entonces

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Si el camino escogido es el que da tiempo mínimo, debe cumplirse que

$$T'(x) = 0$$

Tenemos que:

$$T'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}}.$$

Luego,

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \quad (1)$$

Pero,

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \text{sen } \alpha \quad \text{y} \quad \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = \text{sen } \beta$$

Reemplazando estos valores en (1) se tiene:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{v_1} = \frac{\text{sen } \beta}{v_2} \Rightarrow \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

**PROBLEMA 17.**

Un aviso comercial de 9 m. de altura está pintado sobre una pared vertical. La base del aviso está a 16 m. sobre el nivel del ojo de un observador. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse el observador para que el ángulo formado por el ojo y los extremos superior e inferior del aviso sea máximo?

**Solución**

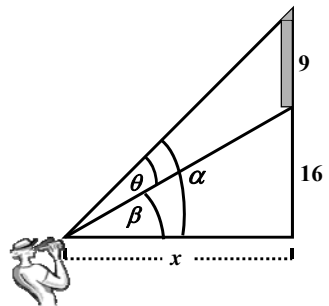
Sea  $x$  la distancia del observador a la pared y sea  $\theta$  el ángulo formado por el ojo del observador y los extremos del aviso. Se tiene que:

$$\theta = \alpha - \beta, \text{ donde}$$

$$\alpha = \cot^{-1} \frac{x}{25} \quad \text{y} \quad \beta = \cot^{-1} \frac{x}{16}$$

Luego,

$$\theta = \cot^{-1} \frac{x}{25} - \cot^{-1} \frac{x}{16}$$



Debemos hallar un valor de  $x$  en el intervalo  $(0, +\infty)$  para el cual la función anterior nos dé un máximo absoluto.

Derivamos la función respecto a  $x$ :

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{1+(x/25)^2} \left(\frac{1}{25}\right) + \frac{1}{1+(x/16)^2} \left(\frac{1}{16}\right) = -\frac{25}{25^2+x^2} + \frac{16}{16^2+x^2}$$

Números críticos:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} = 0 &\Leftrightarrow -\frac{25}{25^2+x^2} + \frac{16}{16^2+x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{25}{25^2+x^2} = \frac{16}{16^2+x^2} \\ &\Leftrightarrow 25(16^2+x^2) = 16(25^2+x^2) \Leftrightarrow 9x^2 = 3,600 \Rightarrow x = 20 \end{aligned}$$

Aplicando el criterio de la primera o de la segunda derivada se verifica que el punto crítico  $x = 20$  corresponde a un máximo relativo. Además, como  $x = 20$  es el único extremo relativo en el intervalo  $(0, +\infty)$ , estamos frente al máximo absoluto. Por tanto, para obtener un ángulo máximo, el observador debe colocarse a 20 m. de la pared.

**PROBLEMA 18.**

Se tiene una hoja larga de papel de 24 cm. de ancho. Una esquina de la hoja es doblada hasta tocar el lado opuesto. ¿En que parte debe doblarse la hoja para que la longitud  $L$  del doblez sea mínima? En otras palabras, hallar el valor de  $x$  que minimiza a  $L$ .

**Solución**

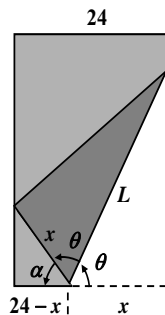
Tenemos que:

$$\cos \theta = x/L \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{24-x}{x} &= \cos \alpha = \cos(\pi - 2\theta) = \cos(\pi + (-2\theta)) \\ &= -\cos(-2\theta) \quad (\text{Ident. Trig. 20}) \\ &= -\cos 2\theta \\ &= -(2\cos^2 \theta - 1) \quad (\text{Ident. Trig. 28}) \\ &= 1 - 2\cos^2 \theta = 1 - 2(x/L)^2 \quad (\text{por (1)}) \\ &= \frac{L^2 - 2x^2}{L^2} \end{aligned}$$

$$\text{Ahora, } \frac{24-x}{x} = \frac{L^2 - 2x^2}{L^2} \Rightarrow L^2(24-x) = x(L^2 - 2x^2) \Rightarrow L^2 = \frac{x^3}{x-12} \Rightarrow$$

$$L = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x-12}}$$



Por otro lado, para la esquina doblada alcance el lado opuesto en un punto que no sea la otra esquina inferior, debemos tener que  $12 < x$ . En consecuencia la función a minimizar es:

$$L(x) = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x-12}} \text{ en el intervalo } (12, +\infty)$$

Bien,

$$L'(x) = \frac{\sqrt{x-12} \left( \frac{3}{2} x^{1/2} \right) - x^{3/2} \frac{1}{2\sqrt{x-12}}}{x-12} \Rightarrow L'(x) = \frac{x^{1/2}(x-18)}{(x-12)^{3/2}}$$

Vemos que  $L(x)$  tiene tres números críticos: 0, 12 y 18. Pero, sólo 18 está en el intervalo  $(12, +\infty)$ . Además, el criterio de la primera derivada nos asegura que  $L(18)$  es un mínimo local y, por ser este el único extremo local en  $(12, +\infty)$ ,  $L(18)$  es mínimo absoluto. Luego,  $x = 18$  es el número buscado.

**PROBLEMA 19.** Hallar las dimensiones del cono circular recto de volumen mínimo que se puede circunscribir en una esfera de radio  $r$ .

**Solución**

Sean

$R$  = radio del cono

$h$  = altura del cono.

$x$  = la longitud de  $\overline{OA}$

Los triángulos rectángulos  $\triangle ACB$  y  $\triangle ATO$ , por tener un ángulo agudo común, son semejantes. Luego,

$$\frac{R}{r} = \frac{x+r}{\sqrt{x^2-r^2}} \Rightarrow R = \frac{r(x+r)}{\sqrt{x^2-r^2}}$$

$$R^2 = \frac{r^2(x+r)^2}{x^2-r^2} = \frac{r^2(x+r)^2}{(x+r)(x-r)} = \frac{r^2(x+r)}{x-r}$$

El volumen del cono es:

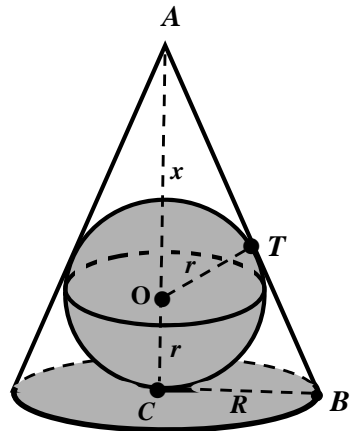
$$V = \frac{\pi}{3} R^2 h = \frac{\pi}{3} \frac{r^2(x+r)}{x-r} (x+r) = \frac{\pi}{3} \frac{r^2(x+r)^2}{x-r}$$

Como el cono es circunscrito, se debe cumplir que  $x > r$ .

Debemos optimizar:

$$V = \frac{\pi}{3} \frac{r^2(x+r)^2}{x-r} \text{ en el intervalo } (r, +\infty)$$

Derivando:



$$V'(x) = \frac{\pi r^2}{3} \frac{(x-r)(2)(x+r) - (x+r)^2}{(x-r)^2} = \frac{\pi r^2}{3} \frac{(x+r)(x-3r)}{(x-r)^2}$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x+r=0 \text{ ó } x-3r=0 \Rightarrow x=-r \text{ ó } x=3r$$

Los números críticos son:  $-r$  y  $3r$ . Pero en  $(r, +\infty)$  sólo está  $3r$ .

El criterio de la primera derivada nos dice  $V(3r)$  es un mínimo local en  $(r, +\infty)$  y, como es único,  $V(3r)$  es un mínimo absoluto en  $(r, +\infty)$ . En consecuencia, las dimensiones del cono buscado son:

$$h = x+r = 3r+r = 4r$$

$$R = \frac{r(x+r)}{\sqrt{x^2-r^2}} = \frac{r(3r+r)}{\sqrt{(3r)^2-r^2}} = \frac{4r^2}{\sqrt{8r^2}} = \frac{4r^2}{2r\sqrt{2}} = \sqrt{2}r$$

**PROBLEMA 20.**

Un bañista se encuentra en un punto  $O$  de una playa, observado dos veleros  $A$  y  $B$ , que se encuentran en un punto  $P$ , que está a 1 Km de distancia y exactamente frente al observador. Los veleros comienzan a navegar siguiendo una trayectoria paralela a la playa. El velero  $B$  es 3 veces más rápido que el velero  $A$ . Hallar el máximo valor del ángulo de observación  $\theta$  entre los dos veleros.

**Solución**

Si  $\beta$  el ángulo  $\angle POB$  y  $\alpha$  el ángulo  $\angle POA$ , entonces

$$\theta = \beta - \alpha$$

Sea  $x$  la distancia de  $P$  al velero  $A$ . Luego,  $3x$  es la distancia del punto  $P$  al velero  $B$ . Aún más, tenemos que:

$$\tan \alpha = x \quad \text{y} \quad \tan \beta = 3x$$

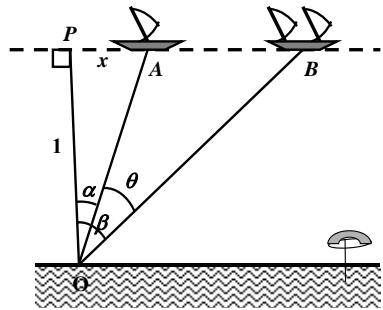
De acuerdo al identidad trigonométrica 25 se tiene:

$$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \frac{3x - x}{1 + (3x)(x)} = \frac{2x}{1 + 3x^2} \Rightarrow$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{2x}{1 + 3x^2} \right)$$

$$\text{Optimizamos: } \theta = \tan^{-1} \left( \frac{2x}{1 + 3x^2} \right) \text{ en el intervalo } [0, +\infty) \quad (1)$$

Derivando:



$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1+3x^2}\right)^2} D_x \left( \frac{2x}{1+3x^2} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1+3x^2}\right)^2} \frac{2(1-3x^2)}{(1+3x^2)^2} = \frac{2(1-3x^2)}{9x^4 + 10x^2 + 1} = \frac{2(1+\sqrt{3}x)(1-\sqrt{3}x)}{9x^4 + 10x^2 + 1} \end{aligned}$$

Esto es,

$$\theta' = \frac{2(1+\sqrt{3}x)(1-\sqrt{3}x)}{9x^4 + 10x^2 + 1} \quad (2)$$

$$\theta' = 0 \Rightarrow \frac{2(1+\sqrt{3}x)(1-\sqrt{3}x)}{9x^4 + 10x^2 + 1} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ó} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Desechamos  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$  por estar fuera de  $[0, +\infty)$ .

El criterio de la primera derivada aplicado en (2) nos dice que  $\theta$  tiene un máximo local en  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  y, por ser único, éste es un máximo absoluto.

Luego, el ángulo buscado es

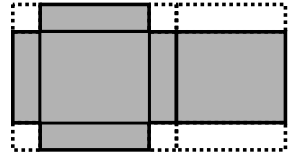
$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{2(1/\sqrt{3})}{1+3(1/\sqrt{3})^2} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{2(1/\sqrt{3})}{1+1} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{6}$$

## PROBLEMAS PROPUESTOS 8.6

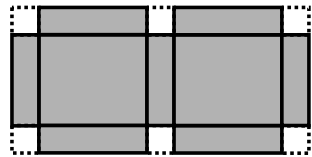
1. **(Área Máxima).** Hallar las dimensiones de un rectángulo de 72 m. de perímetro que encierra un área máxima.
2. **(Área Máxima).** Probar que entre todos los rectángulos de perímetro fijo, el que encierra un área máxima es el cuadrado.
3. **(Área Máxima).** Se quiere cercar un terreno rectangular que está a las orillas de un río. Si se cercan sólo tres lados del terreno y se cuenta con 400 m. de alambrada. ¿Qué dimensiones debe tener el terreno si se quiere que tenga área máxima?

4. **(Construcción de envases).** Se construye cajas sin tapa utilizando láminas de cartón cuadrado de 96 cm. de lado, a las cuales se recorta un pequeño cuadrado en cada esquina. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado cortado si se quiere que la caja tenga volumen máximo?
5. **(Construcción de envases).** Se construyen cajas sin tapa utilizando láminas de cartón rectangulares de 21 cm. por 16 cm., a las cuales se recorta un pequeño cuadrado en cada esquina. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado si se quiere que la caja tenga máximo volumen?

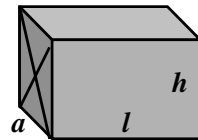
6. **(Construcción de envases).** Se construyen cajas con tapa utilizando láminas de cartón rectangulares de 8 dm. por 5 dm., a las cuales se les recortan los cuadrados y los rectángulos marcados en la figura adjunta. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado si se quiere que la caja tenga máximo volumen?



7. **(Construcción de envases).** Se construyen cajas con tapa, las cuales también tienen caras laterales. Para esto, se usan láminas de cartón rectangulares de 9 dm. por 6 dm., a las cuales se les recorta los 6 cuadrados indicados en la figura adjunta. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadrado si se quiere que la caja tenga máximo volumen?

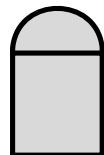


8. **(Volumen máximo).** El reglamento del correo exige que la suma de las longitudes (largo, ancho y altura) de un paquete no debe exceder 120 cm. Hallar las dimensiones de la caja con base cuadrada, que cumpla las regulaciones del correo y que tenga máximo volumen.

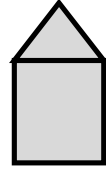


9. **(Pista de carreras).** Se desea construir una pista de carreras de 560 m. de longitud. La pista debe encerrar un terreno que tenga la forma de un rectángulo con un semicírculo adjunto a cada uno de los lados opuestos del rectángulo. El rectángulo debe tener área máxima. Hallar las dimensiones del rectángulo.
10. **(Pista de carreras).** Se desea construir una pista de carreras de 400 m. de longitud. La pista debe encerrar un terreno que tenga la forma de un rectángulo con un semicírculo adjunto a cada uno de los lados opuestos del rectángulo. ¿Cuál es la máxima área que puede tener el terreno encerrado?

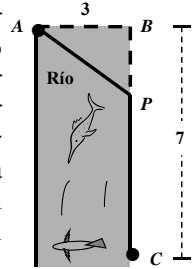
11. **(Máxima claridad).** Se desea construir una ventana de 7 m. de perímetro y que tenga la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. ¿Qué dimensiones debe tener si se quiere que ella deje pasar la máxima claridad? *Sugerencia: A mayor área, mayor claridad.*



12. **(Máxima claridad).** Una ventana de 18 pies de perímetro está conformada por un rectángulo coronada por un triángulo equilátero. El vidrio que cubre el rectángulo es más claro que el que cubre el triángulo. Por pie cuadrado, el vidrio del rectángulo deja pasar el doble de luz del que cubre el triángulo. Hallar las dimensiones de la ventana que dejan pasar la máxima claridad.

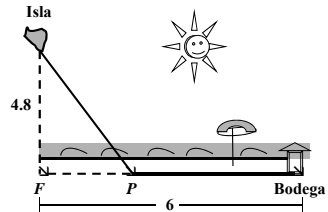


13. **(Costo mínimo).** Dos puntos  $A$  y  $B$  están opuestos uno al otro en las riberas de un río de 3 Km. de ancho. Un tercer punto  $C$  está en la misma ribera que  $B$  pero a 7 Km. río abajo. Una compañía de teléfonos desea unir telefónicamente los puntos  $A$  y  $C$ . Para esto, se debe tender dos cables: Uno de  $A$  a un punto  $P$ , en la ribera opuesta, y el otro cable de  $P$  a  $C$ . Si el tendido del cable en el agua cuesta \$ 17,000 el Km. y en tierra cuesta \$ 8,000 el Km. ¿Dónde debe estar localizado el punto  $P$  para que el costo sea mínimo?



14. **(Costo mínimo).** En el problema anterior, si el tendido de cable en el agua cuesta \$ 13,000 el Km. y en tierra \$ 12,000. ¿Dónde debe estar localizado el punto  $P$ ?

15. **(Tiempo mínimo).** Una isla se encuentra a 4.8 Km. de una playa recta. En la playa, a 6 Km. del punto  $F$  que está frente la isla, funciona una bodega. Un hombre que está en la isla quiere ir a la bodega. Se sabe que el hombre rema a 3 Km./h. y camina a 5 Km./h. ¿Qué camino debe seguir para llegar a la bodega en el menor tiempo posible?

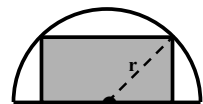


16. **(Tiempo mínimo).** Si en el problema anterior el hombre rema a razón de 4 Km./h y camina a razón de 5 Km./h. ¿Qué camino debe seguir?

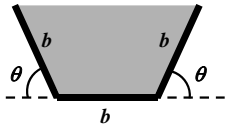
17. **(Hotelería).** Un hotel tiene 100 habitaciones. El gerente sabe que cuando el precio por habitación es de \$ 45 todas las habitaciones son alquiladas; pero por cada dólar de aumento, una habitación se desocupa. Si el precio de mantenimiento de una habitación ocupada es de \$ 5. ¿Cuántas habitaciones deben alquilarse para obtener máxima ganancia? ¿Cuál debe ser el precio por habitación?

18. **(Agricultura).** Una finca está sembrada de mangos a razón de 80 plantas por hectárea. Cada planta produce un promedio de 960 mangos. Por cada planta adicional que se siembre, el promedio de producción por planta se reduce en 10 mangos. ¿Cuántas plantas se deben sembrar por hectárea para obtener la máxima producción?

19. **(Área Máxima).** Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un semicírculo de radio  $r$ .



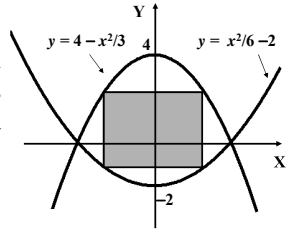
20. (**Volumen máximo**). Se planea construir un canal de concreto para transportar agua a una finca. La sección transversal del canal es como se indica la figura, teniendo la base y las paredes laterales una misma longitud  $b$ . Hallar el ángulo  $\theta$  que permite que el canal transporte el mayor volumen de agua.



*Sugerencia: Expresé el área del trapecio en términos de  $\theta$  y maximice.*

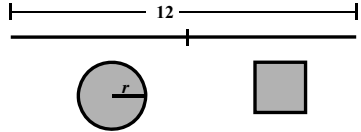
21. (**Área Máxima**). Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes y que puede inscribirse en la región acotada por las parábolas

$$y = 4 - \frac{x^2}{3}, \quad y = \frac{x^2}{6} - 2$$

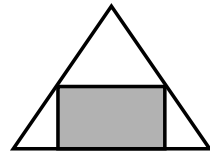


22. (**Resistencia Máxima**). De un tronco circular de radio 3 dm. se quiere cortar una viga rectangular de máxima resistencia. Hallar las dimensiones del rectángulo. Se sabe que la resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional a su ancho y al cuadrado de su altura. Es decir,  $R = kah^2$ , donde  $R$  es la resistencia,  $k$  es una constante de proporcionalidad,  $a$  es el ancho del rectángulo y  $h$  su altura.

23. (**Área Mínima**). Un trozo de alambre de 12 m. se corta en dos partes. Una parte se doblará para formar una circunferencia y la otra se doblará para formar un cuadrado. ¿Dónde se hará el corte si : **a.** La suma de las áreas es mínima. **b.** La suma de las áreas es máxima?



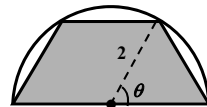
24. (**Área Máxima**). Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un triángulo equilátero de 12 cm. de lado, de tal modo que un lado del rectángulo descansa sobre un lado del triángulo.



25. (**Área Máxima**). Probar que de todos los triángulos isósceles de perímetro fijo, el que tiene área máxima es un triángulo equilátero.

26. (**Área Máxima**). Probar que de todos los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia, el que tiene área máxima es un triángulo equilátero.

27. (**Área Máxima**). Se inscribe un trapecio en un semicírculo de radio 2, en tal forma que un lado del trapecio coincide con el diámetro. Hallar máxima posible área del trapecio.



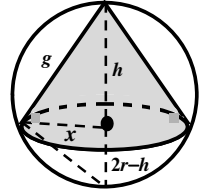
28. (**Área lateral máxima**). Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de área lateral máxima inscrito en una esfera de radio  $r$ .

29. **(Volumen máximo).** Hallar las dimensiones del cono circular recto de volumen máximo inscrito en una esfera de radio  $r$ .

Sugerencia:  $V = \text{Volumen del cono} = \frac{1}{3}\pi x^2 h$ . Por

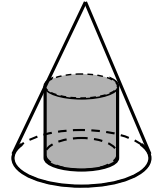
semejanza de triángulos:  $x^2 = h(2r - h)$ . Luego,

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(2r - h).$$

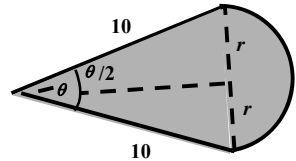


30. **(Área lateral máxima).** Hallar las dimensiones del cono circular recto de área lateral máxima inscrito en una esfera de radio  $r$ . Ver la figura del problema anterior. Sugerencia:  $A = \text{Área lateral del cono} = \pi xg$ .

31. **(Volumen máximo).** Probar que el volumen del mayor cilindro circular recto inscrito en un cono circular recto es  $\frac{4}{9}$  del volumen del cono.



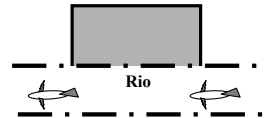
32. **(Área máxima).** Se construye una figura conformada por un triángulo isósceles de 10 cm. de lado al que se le adjunta un semicírculo, como indica el dibujo adjunto. Hallar:



- El ángulo  $\theta$  correspondiente a la figura de área máxima.
- El área máxima

Suger: Ver el problema resuelto 5 de la sección 4.1

33. **(Cercos mínimo).** Se quiere construir un conuco rectangular de  $7.200 \text{ m}^2$  de área a la orilla de un río. Si sólo se deben cercar los tres lados que indica la figura, ¿cuáles deben ser las longitudes de estos lados si quiere la menor cantidad posible de cerco?



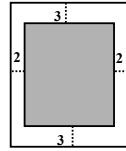
34. **(Cercos mínimo).** Se quiere cerrar un terreno rectangular y luego dividirlo en dos partes iguales mediante una cerca como indica la figura. El área de terreno encerrado debe ser de  $864 \text{ m}^2$ . Si se desea utilizar la mínima cantidad de cerca, ¿qué dimensiones debe tener el rectángulo?



35. **(Área mínima).** Se quiere construir una caja cerrada de madera de  $72 \text{ dm}^3$  de volumen. La base debe ser un rectángulo cuyo largo sea el doble de su ancho.

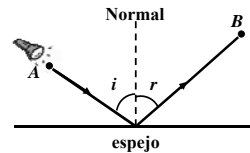
- ¿Qué dimensiones debe tener la caja si se quiere usar la mínima cantidad de madera?
- ¿Qué dimensiones debe tener la caja si no tiene tapa?

36. **(Área mínima).** Se quiere imprimir un libro, en el cual cada página tenga 3 cm. de márgenes superior e inferior y 2 cm. de margen a cada lado. El texto escrito debe ocupar un área de  $294 \text{ cm}^2$ . Si se busca economizar papel, ¿qué dimensiones de la página son las más convenientes?

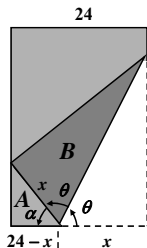


37. **(Área máxima).** Se tiene un terreno rectangular de  $480 \text{ m}^2$ . de área, sobre el cual se va a construir una casa que tendrá también forma rectangular. Para jardines se dejaran 5 m de frente, 5 m. atrás y 4 m. a los costados. ¿Qué dimensiones debe tener el terreno para que el área de la casa sea máxima?
38. **(Área mínima).** Para envasar sus productos una compañía necesita potes cilíndricos de hojalata de  $2\pi$  litros de capacidad y con tapa. Si se busca usar la mínima cantidad de hojalata, ¿qué dimensiones debe tener cada pote?
39. **(Área mínima).** Resolver el problema anterior para el caso en que el pote no tenga tapa superior.
40. **(Volumen máximo).** Se quiere construir vasos (cilíndricos sin tapa) de vidrio que tengan  $108\pi \text{ cm}^3$ . de material. ¿Qué dimensiones debe tener el vaso si se quiere que contenga la mayor cantidad de líquido?
41. **(Velocidad más económica).** Un bus debe hacer un viaje de 500 Km. a una velocidad constante  $x \text{ Km./h}$ . La gasolina cuesta \$ 0.5 por litro, el bus consume  $2 + \frac{x^2}{200}$  litros por hora, y el conductor cobra \$ 15 por hora. ¿Cuál es la velocidad más económica?

42. **(Ley de reflexión).** Usando el principio de Fermat (la luz viaja de un punto a otro a través de la trayectoria que minimiza el tiempo) probar que si la luz parte de A se refleja en un espejo y pasa por el punto B, entonces el ángulo de incidencia  $i$  es igual al ángulo de reflexión  $r$ .

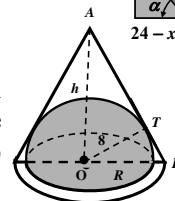


43. **(Áreas óptimas).** Se tiene una hoja larga de papel de 24 cm. de ancho Una esquina de es doblada en tal forma que el vértice doblado toque el lado opuesto, como se indica en la figura. Hallar el valor de  $x$  para el cual:

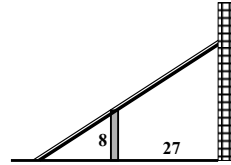


- El triángulo A tenga área máxima.
- El triángulo B tenga área mínima.

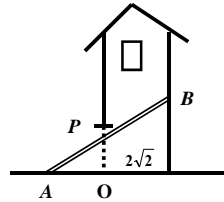
44. **(Volumen mínimo).** Hallar las dimensiones de un cono circular recto de volumen mínimo que se puede circunscribir en un hemisferio (semiesfera) de radio 8 cm.



45. Frente a un edificio, y a 27 pies de distancia, se tiene una pared de 8 pies de altura. Hallar la longitud de la escalera más corta que pueda apoyarse en el suelo, la pared y el edificio



46. (**Altura mínima**). Hallar la altura mínima  $h = \overline{OP}$  que debe tener una puerta de una torre para que a través de ella pueda pasar un tubo  $\overline{AB}$  de longitud  $6\sqrt{6}$  m. El ancho de la torre es  $2\sqrt{2}$  m.



**SECCION 8.7**  
**METODO DE NEWTON-RAPHSON**

Resolver una ecuación, no siempre es simple o factible. Aún más, la situación se complica cuando en la ecuación intervienen funciones trascendentes. Así, no existen fórmulas para resolver ecuaciones tan simples como  $\cos x = x$ .

Para ayudarnos en la tarea de aproximar raíces de ecuaciones complicadas, viene a nuestro auxilio el **método de Newton-Raphson**, el cual, mediante un simple proceso de iteración, nos permite aproximar, con la exactitud deseada, una raíz real  $r$  de una ecuación  $f(x) = 0$ .

**¿SABIAS QUE . . .**

*Este método fue presentado por Isaac Newton (1642–1727) en su obra **Method of Fluxions** escrita el año 1671 y publicada, muchos años después, en 1736. Para ilustrar su método, Newton, como ejemplo, encuentra aproximaciones a la raíz de la ecuación  $x^3 - 2x - 5 = 0$  (ver el ejemplo 2, más adelante).*

*Joseph Raphson (1648–1715) fue un matemático inglés egresado de la Universidad de Cambridge y amigo de Newton. Estuvo involucrado, a favor de Newton, en la reyerta con Leibniz sobre los orígenes del Cálculo. Raphson, a quien Newton le permitía acceso a sus trabajos, publicó el año 1690, mucho antes que apareciera el **Method of Fluxions**, su obra **Analisis Aequationum Universales**. En esta obra aparece, por primera vez, el método que ahora se llama de Newton-Raphson.*

Veamos lo que dice este método. Sea  $f$  una función continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$ . Si  $f(a)$  y  $f(b)$  tiene signos distintos, el teorema del valor intermedio nos asegura que existe un número real  $a < r < b$  tal que  $f(r) = 0$ . Esto es,  $r$  es una raíz de  $f(x) = 0$  que esta entre  $a$  y  $b$ . Haciendo un esbozo rápido de la gráfica de  $f$ , elegimos una primera aproximación  $x_1$ . El método de Newton se basa en la hipótesis de que la recta tangente al gráfico en el punto  $(x_1, f(x_1))$  corta al eje X un punto  $x_2$  cercano a  $r$ . Veamos como hallar  $x_2$ .

La recta tangente  $L$  en el punto  $(x_1, f(x_1))$  tiene por ecuación:

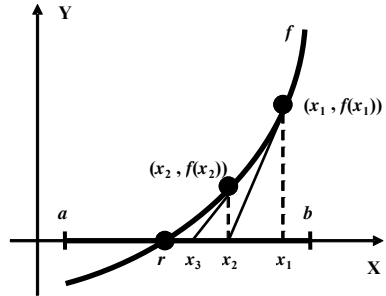
$$y = f(x_1) - f'(x_1)(x - x_1)$$

Si esta recta corta al eje X en  $x_2$ , tenemos

$$0 = f(x_1) - f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

De donde,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \text{ si } f'(x_1) \neq 0$$



Repetimos el proceso tomando  $x_2$  en lugar de  $x_1$  y logramos la tercera aproximación  $x_3$ , dado por

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

Continuando el proceso, conseguimos una sucesión de aproximaciones  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ , donde

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Cada aproximación sucesiva  $x_n$  se llama una **iteración**.

Diremos que esta sucesión de aproximaciones converge a  $r$  si  $x_n$  se acerca más y más a medida que  $n$  crece. Es decir,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = r$

En resumen, tenemos:

### Metodo de Newton-Rapson.

Sea  $f(r) = 0$ , donde  $f$  es derivable en un intervalo abierto que contiene a  $r$ . Para aproximar a la raíz  $r$  seguir los siguientes pasos:

1. Tomar una estimación inicial  $x_1$  cercana a  $r$ . Ayudarse con el gráfico de  $f$ .
2. A partir de  $x_1$ , hallar nuevas estimaciones  $x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}$ , mediante:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ donde } f'(x_n) \neq 0$$

3. La aproximación buscada es  $x_{n+1}$  si se cumple que  $x_{n+1} = x_n$ , con el grado de aproximación buscada.

**EJEMPLO 1.** Comenzando con  $x_1 = 1$ , calcular las aproximaciones  $x_2, x_3, x_4$  y  $x_5$  de la raíz positiva de la ecuación:

$$x^2 - 3 = 0$$

**Solución**

La raíz positiva de  $x^2 - 3 = 0$  es  $\sqrt{3}$ . Luego, nos están pidiendo cuatro aproximaciones de  $\sqrt{3}$ .

Bien, la función  $f$  es diferenciable en todo  $\mathbb{R}$  y, en particular, en todo intervalo abierto que contiene a  $\sqrt{3}$ . Además,  $f'(x) = 2x$ . Luego,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n)^2 - 3}{2x_n} = \frac{(x_n)^2 + 3}{2x_n} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{3}{x_n} \right)$$

Ahora, si  $x_1 = 1$ , entonces

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{3}{x_1} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3}{1} \right) = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( x_2 + \frac{3}{x_2} \right) = \frac{1}{2} \left( 2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left( x_3 + \frac{3}{x_3} \right) = \frac{1}{2} \left( 1.75 + \frac{3}{1.75} \right) = \frac{6.0625}{3.5} = 1.732142857$$

$$x_5 = \frac{1}{2} \left( 1.732142857 + \frac{3}{1.732142857} \right) = \frac{6.000318877}{3.464285714} = 1.73205081$$

Una calculadora nos da que  $\sqrt{3} = 1.732050808$ . Vemos que este valor y el de  $x_5$  coinciden en 6 cifras decimales.

**OBSERVACION.** El grado de aproximación se expresa dando el número de cifras decimales deseados para la raíz. Así, si se pide una aproximación de 3 cifras decimales, se calculan las aproximaciones hasta que  $x_{n+1}$  y  $x_n$  coincidan en, por lo menos, las tres primeras cifras decimales. Otra manera de expresar este requerimiento se hace pidiendo que las aproximaciones sucesivas  $x_{n+1}$  y  $x_n$  difieran en menos de  $0.001 = 10^{-3}$ . En general, decir que una aproximación  $x_{n+1}$  es de  $k$  cifras decimales es equivalente a decir que  $x_{n+1}$  y  $x_n$  difieran en menos de  $10^{-k}$ .

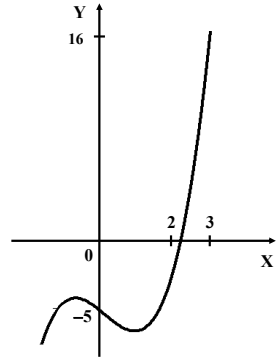
A continuación aproximamos la raíz de la ecuación  $x^3 - 2x - 5 = 0$ , mostrada por Newton en su obra **Method of Fluxions**.

**EJEMPLO 2.** Mediante el método de Newton-Raphson hallar una aproximación, con 6 cifras decimales, a las las raíces de

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

**Solución**

Sea  $f(x) = x^3 - 2x - 5$ . El gráfico de  $f$  nos muestra que la ecuación dada tiene una única raíz real que se encuentra en el intervalo  $[2, 3]$ . Esta afirmación también lo comprobamos viendo que  $f(2) = -1$  es negativo y  $f(3) = 16$  es positivo.



Tenemos que  $f'(x) = 3x^2 - 2$  y

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2} = \frac{2x_n^3 + 5}{3x_n^2 - 2}$$

El gráfico nos sugiere tomar como aproximación inicial a  $x_1 = 2$ .

Ahora,

$$x_2 = \frac{2x_1^3 + 5}{3x_1^2 - 2} = \frac{2(2)^3 + 5}{3(2)^2 - 2} = \frac{21}{10} = 2.1$$

$$x_3 = \frac{2x_2^3 + 5}{3x_2^2 - 2} = \frac{2(2.1)^3 + 5}{3(2.1)^2 - 2} = \frac{23.522}{11.23} = 2.094568121$$

$$x_4 = \frac{23.37864393}{11.16164684} = 2.094551482$$

$$x_5 = \frac{23.37820594}{11.16143773} = 2.094551482$$

Vemos que  $x_5$  y  $x_4$  coinciden en las seis primeras cifras decimales (en realidad, en 9 cifras). Luego, la aproximación buscada es  $x_5 = 2.094551482$ , ó, con 6 cifras decimales,

$$x_5 = 2.094551$$

**EJEMPLO 3.** Usando el método de Newton-Raphson determinar, con 8 cifras decimales, la coordenada  $x$  del punto en el primer cuadrante donde se interseñtan las curvas

$$y = 2\cos x, \quad y = x^2$$

**Solución**

Aproximar la coordenada  $x$  del punto de intersección de las curvas  $y = 2 \cos x$  e  $y = x^2$  equivale a aproximar la raíz de la ecuación  $2\cos x = x^2$ , o, equivalentemente, la raíz de la ecuación  $2\cos x - x^2 = 0$ . En consecuencia, aplicamos la regla de Newton-Raphson a la ecuación  $f(x) = 0$ , donde  $f(x) = 2\cos x - x^2$ .

Tenemos que:  $f'(x) = -2\sin x - 2x = -2(\sin x + x)$ .

Luego,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2 \cos x_n - (x_n)^2}{-2 (\sin x_n + x_n)} \Rightarrow$$

$$x_{n+1} = \frac{(x_n)^2 + 2(x_n \sin x_n + \cos x_n)}{2(\sin x_n + x_n)}$$

La gráfica nos sugiere que tomemos como aproximación inicial a  $x_1 = 1$ .

Luego,

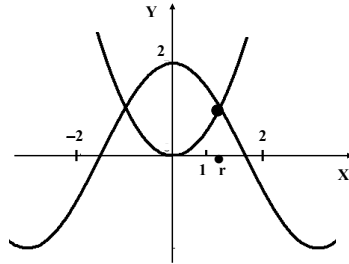
$$x_2 = \frac{1^2 + 2((1) \sin(1) + \cos(1))}{2(\sin(1) + 1)}$$

$$= \frac{3.763546581}{3.68294197} = 1.02188593$$

$$x_3 = \frac{3.83129541}{3.749958935} = 1.021689964$$

$$x_4 = \frac{3.830685977}{3.749362477} = 1.021689954$$

$$x_5 = \frac{3.830685945}{3.749362446} = 1.021689954$$



Vemos que  $x_5$  y  $x_4$  coinciden en 8 (en realidad, en 9) cifras decimales. Luego la aproximación buscada es  $x_5 = 1.021689954$ , o, redondeando a 8 cifras decimales,  $x_5 = 1.02168995$ .

El sistema algebraico de computación **Derive** nos da, como solución aproximada a esta ecuación, el valor 1.021689954, él cual coincide con  $x_5$ .

### DIFICULTADES EN LA REGLA DE NEWTON-RAPHSON

Algunas veces la sucesión de aproximaciones  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  dadas por el método de Newton-Raphson, correspondientes a una ecuación dada  $f(x) = 0$ , con aproximación inicial  $x_1$ , no converge. Esto se puede deber a dos razones:

1. Existe una aproximación  $x_k$  tal que  $f'(x_k) = 0$ , o sea cuando la recta tangente en el punto  $(x_k, f(x_k))$  es horizontal. En tal situación no podemos calcular  $x_{k+1}$ , ya éste requiere dividir entre  $f'(x_k) = 0$ .

Puede suceder también que  $f'(x_k)$ , sin ser 0, esté muy cercana a 0. En este caso, la aproximación  $x_{k+1}$  se aleje del la raíz inicial y se ponga próxima a otra raíz de la ecuación.

Esta primera dificultad se salva fácilmente eligiendo la aproximación inicial con más cuidado.

2. Existen ecuaciones  $f(x) = 0$  para las cuales, definitivamente, la regla de Newton-Raphson no funciona. Veremos en el problema resuelto 4, que la ecuación  $f(x) = 0$ , donde  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ , cae dentro de este caso. Aquí la situación es insalvable y, entonces la solución se busca por otros métodos distintos al Newton-Raphson.

## PROBLEMAS RESUELTOS 8.7

**PROBLEMA 1.** Mediante el método de Newton-Raphson hallar una aproximación, con 5 cifras decimales, a las raíces de

$$x^4 - 6x^2 + 8x + 8 = 0$$

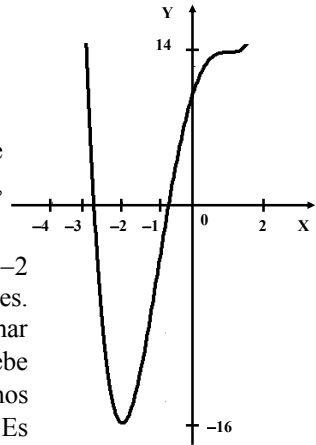
### Solución

Sea  $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 8$ . Se tiene:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x+2)(x-1)^2 \quad \text{y}$$

$$f'(-2) = 0 \quad \text{y} \quad f'(1) = 0$$

El gráfico de  $f$  nos dice que la ecuación dada tiene dos raíces: una,  $r_1$ , en el intervalo  $[-3, -2]$  y la otra,  $r_2$ , en el intervalo  $[-1, 0]$ .



En vista de que  $f'(-2) = 0$ , no se puede tomar  $x_1 = -2$  como aproximación inicial para ninguna de las dos raíces. Pero, nuevamente el gráfico, nos dice que para aproximar  $r_1$  se debe escoger  $x_1 < -2$ , y para aproximar  $r_2$ , se debe escoger  $x_1 > -2$ . Más precisamente, el mismo gráfico nos sugiere que para  $r_1$  tomemos  $x_1 = -3$  y para  $r_2$ ,  $x_1 = -1$ . Es así como procedemos a continuación.

Tenemos que:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 6x_n^2 + 8x_n + 8}{4(x_n^3 - 3x_n + 2)} = \frac{3x_n^4 - 6x_n^2 - 8}{4(x_n^3 - 3x_n + 2)}$$

### 1. Aproximación de $r_1$ :

$$x_1 = -3.$$

$$x_2 = \frac{3(-3)^4 - 6(-3)^2 - 8}{4((-3)^3 - 3(-3) + 2)} = \frac{181}{4(-16)} = -2.8228125$$

$$x_3 = -2.800151689 \quad x_4 = -2.799446153 \quad x_5 = -2.79944571$$

Luego,  $r_1 = x_5 = -2.79944571$ , ó, con cinco cifras decimales,  $r_1 = -2.79945$

**2. Aproximación de  $r_2$ :**

$$x_1 = -1.$$

$$x_2 = \frac{3(-1)^4 - 6(-1)^2 - 8}{4((-1)^3 - 3(-1) + 2)} = -\frac{11}{4(4)} = -0.6875$$

$$x_3 = -0.679972769 \quad x_4 = -0.67996066 \quad x_5 = -0.67996066$$

Luego,  $r_2 = -0.67996066$  ó, con cinco cifras decimales,  $r_2 = -0.67996$

**PROBLEMA 2.**

a. Hallar el punto  $P_0$  en la gráfica de la función  $y = e^x$  que esta más cercano al origen.

b. Hallar la distancia de este punto al origen.

Dar las respuestas con tres decimales de aproximación.

**Solución**

a. La distancia de un punto  $P = (x, e^x)$  cualquiera del gráfico de  $y = e^x$  al origen está dada por la función:

$$d = \sqrt{x^2 + (e^x)^2} = \sqrt{x^2 + e^{2x}}$$

El punto que buscamos es el punto cuyas coordenadas minimizan esta distancia  $d$ ,

En consecuencia, debemos hallar los números críticos de  $d = \sqrt{x^2 + e^{2x}}$ .

Tenemos que:

$$d' = \frac{x + e^{2x}}{\sqrt{x^2 + e^{2x}}} \quad y \quad d' = 0 \Leftrightarrow x + e^{2x} = 0$$

Luego, los números críticos de  $d$  son las raíces de la ecuación

$$x + e^{2x} = 0.$$

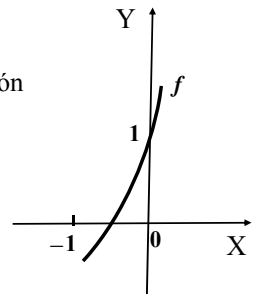
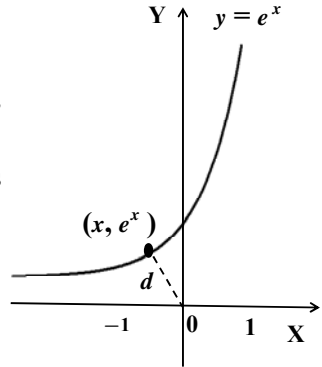
Sea  $f(x) = x + e^{2x}$ . La gráfica de  $f$  nos dice que la ecuación

$$f(x) = x + e^{2x} = 0$$

tiene sólo una raíz, que está en el intervalo  $[-1, 0]$ .

Aproximemos esta raíz.

$$f'(x) = 1 + 2e^{2x} \quad y$$



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n + e^{2x_n}}{1 + 2e^{2x_n}} = \frac{(2x_n - 1)e^{2x_n}}{1 + 2e^{2x_n}} = \frac{2x_n - 1}{e^{-2x_n} + 2}$$

Sea  $x_1 = -0.5$ . Entonces:

$$x_2 = \frac{2x_1 - 1}{e^{-2x_1} + 2} = \frac{2(-0.5) - 1}{e^{-2(-0.5)} + 2} = \frac{-2}{4.718281828} = -0.423883115$$

$$x_3 = \frac{-1.84776623}{4.334426452} = -0.426300053$$

$$x_4 = \frac{-1.852600108}{4.345738097} = -0.426302751$$

Luego, la aproximación con tres cifras decimales es  $x = -0.426$ .

El punto al gráfico de  $y = e^x$  más cercano al origen es

$$P_0 = (-0.426, e^{-0.426}) = (-0.426, 0.653)$$

b. La distancia de  $P_0 = (-0.426, 0.653)$  al origen es

$$d = \sqrt{x^2 + e^{2x}} = \sqrt{(-0.426)^2 + e^{2(-0.426)}} = \sqrt{0.60803695} = 0.780$$

**PROBLEMA 3.** a. Sea  $a$  un número positivo y  $k$  un entero mayor que 1. Deducir que el método de Newton-Raphson nos da la siguiente iteración para aproximar  $\sqrt[k]{a}$ .

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left( (k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right)$$

b. Usando esta iteración, hallar  $\sqrt[5]{17}$  con una precisión de 6 cifras decimales.

$$\text{La iteración anterior, para } k=2, \text{ es } x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

Esta fórmula fue conocida en la antigua Babilonia para computar la raíz cuadrada  $\sqrt{a}$ .

### Solución

a.  $\sqrt[k]{a}$  es la raíz de la ecuación  $f(x) = x^k - a$ . Luego, de acuerdo a Newton-Raphson,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^k - a}{k x_n^{k-1}} = \frac{k x_n^k - (x_n^k - a)}{k x_n^{k-1}}$$

$$= \frac{(k-1)x_n^k + a}{kx_n^{k-1}} = \frac{1}{k} \left( (k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right)$$

b. Tomamos como aproximación inicial  $x_1 = 1.5$ .

$$x_2 = \frac{1}{5} \left( 4x_1 + \frac{17}{x_1^4} \right) = \frac{1}{5} \left( 4(1.5) + \frac{17}{(1.5)^4} \right) = 1.871604938$$

$$x_3 = 1.774374802 \qquad x_4 = 1.762502488$$

$$x_5 = 1.762340377 \qquad x_6 = 1.762340348$$

Luego,  $\sqrt[5]{17} = 1.762340$ , con 6 cifras decimales.

**PROBLEMA 4.** Mostrar que el método de Newton-Raphson no funciona para aproximar la raíz de la ecuación

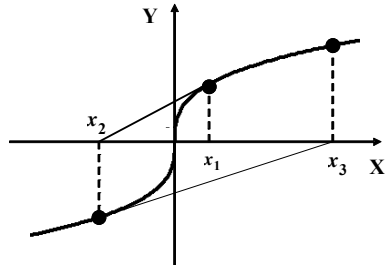
$$\sqrt[3]{x} = 0$$

**Solución**

La raíz de esta ecuación es  $r = 0$ . Veamos que este valor no puede ser aproximado por ninguna sucesión  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  de aproximaciones obtenida por el método de Newton-Raphson, donde  $x_1$  es cualquier valor no nulo. En efecto:

Tenemos:  $f(x) = x^{1/3}$  y  $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$  y

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n)^{1/3}}{1/3(x_n)^{2/3}} = x_n - 3x_n = -2x_n$$



Luego, la sucesión de aproximaciones es:  $x_1, -2x_1, 4x_1, -8x_1, \dots$ . Estas “aproximaciones”, para cualquier  $x_1 \neq 0$ , se aleja de 0 a medida que  $n$  crece. Es decir, la sucesión no converge.

## PROBLEMAS PROPUESTOS 8.7

*En los problemas del 1 al 6, mediante un esbozo de la función correspondiente, deducir que las ecuaciones dadas tienen una única raíz. Mediante el método de Newton-Raphson, hallar una aproximación a esta raíz con seis cifras decimales.*

- |                         |                              |                  |
|-------------------------|------------------------------|------------------|
| 1. $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$ | 2. $x^3 - 6x^2 + 9x + 1 = 0$ | 3. $\cos x = x$  |
| 4. $\cos(x^3) = x$      | 5. $e^{-x} = x$              | 6. $x \ln x = 1$ |

En los problemas del 7 al 11, muestre que  $f(x) = 0$  tiene una raíz en el intervalo  $[a, b]$  verificando que  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos diferentes. Luego, mediante el método de Newton-Raphson, hallar una aproximación a esa raíz, con seis cifras decimales.

7.  $f(x) = \sin 2x - x + 1$ ,  $a = 1$  y  $b = 2$       8.  $f(x) = \sin x - e^{-x}$ ,  $a = 2$  y  $b = 4$

9.  $f(x) = \tan x + x$ ,  $a = 2$  y  $b = 3$       10.  $f(x) = \tan^{-1} x - \frac{x}{2}$ ,  $a = -3$  y  $b = -2$

11.  $f(x) = \sin^{-1} x - (x - 1)^2$ ,  $a = 0$ , y  $b = 1$

En los problemas del 12 y 13, hallar el valor del radical dado con 6 cifras de aproximación.

12.  $\sqrt[3]{19}$

13.  $\sqrt[6]{2}$

En los problemas 14 y 15, usando el método de Newton-Raphson, determinar, con 6 cifras decimales, la coordenada  $x$  del punto donde se interseñan las curvas dadas.

14.  $y = \ln x$ ,  $y = 4x - x^2$

15.  $y = \tan^{-1} x$ ,  $y = 2 - x$

16. a. Hallar el punto  $P_0$  en la gráfica de la parábola  $y = x^2$  que está más cerca del punto  $(2, 0)$

b. Hallar la distancia de este punto al punto  $(2, 0)$ .

Dar las respuestas con tres decimales de aproximación.

17. Hallar el máximo absoluto de la función  $g(x) = \cos x + 5x - x^2$ . Dar la respuesta con 3 cifras decimales de aproximación.

18. Sea la función  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-a}, & \text{si } x \geq a \\ -\sqrt{a-x}, & \text{si } x \leq a \end{cases}$

Una raíz de la ecuación  $f(x) = 0$  es  $a$ .

Probar que el método de Newton-Raphson falla para aproximar la raíz  $a$ . Para esto, probar que, para cualquier número positivo  $h$ , si  $x_1 = a + h$ , entonces  $x_2 = a - h$ ; y si  $x_1 = a - h$ , entonces  $x_2 = a + h$ .

# TABLAS

## ALGEBRA

### EXPONENTES Y RADICALES

1.  $a^0 = 1, a \neq 0$

2.  $(ab)^x = a^x b^x$

3.  $a^x a^y = a^{x+y}$

4.  $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

5.  $(a^x)^y = a^{xy}$

6.  $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

7.  $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

8.  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

9.  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

11.  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$

12.  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

### TEOREMA DEL BINOMIO

13.  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

14.  $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

15.  $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + na^{n-1}b + b^n$

16.  $(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + (-1)^k \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots$

$$- na^{n-1}b + (-1)^n b^n, \text{ donde } \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!}$$

### PROGRESION GEOMETRICA

17.  $a_1 = a, a_2 = ar, a_3 = ar^2, a_4 = ar^3, \dots, a_n = ar^{n-1}$   $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a \frac{1-r^n}{1-r}$

### FACTORIZACION

18.  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

19.  $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

20.  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

21.  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

### DESIGUALDADES Y VALOR ABSOLUTO

22.  $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

23.  $a < b$  y  $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

24.  $a < b$  y  $c < 0 \Rightarrow ac > bc$

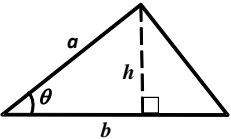
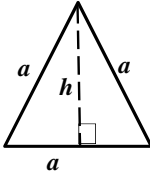
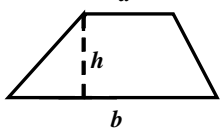
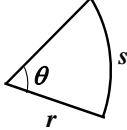
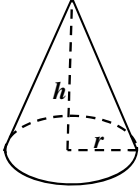
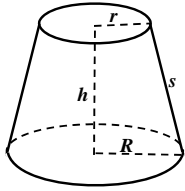
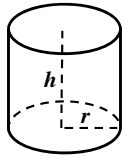
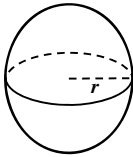
25.  $|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ ó } x = -a$

26.  $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

27.  $|x| > a \Leftrightarrow -a < x \text{ ó } x > a$

# GEOMETRIA

$h =$  altura,  $A =$  Area,  $AL =$  Area Lateral,  $V =$  Volumen

<p style="text-align: center;"><b>Triángulo</b></p> <p><math>h = a \text{ sen } \theta</math></p> <p><math>A = \frac{1}{2}bh</math></p> <p><math>A = \frac{1}{2}b \text{ sen } \theta</math></p> 	<p style="text-align: center;"><b>Triángulo Equilátero</b></p> <p><math>h = \frac{\sqrt{3}}{2}a</math></p> <p><math>A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2</math></p> 
<p style="text-align: center;"><b>Trapezio</b></p> <p><math>A = \frac{h}{2}(a+b)</math></p> 	<p style="text-align: center;"><b>Sector Circular</b></p> <p><math>s = r\theta</math></p> <p><math>A = \frac{1}{2}r^2\theta</math></p> 
<p style="text-align: center;"><b>Cono Circular Recto</b></p> <p><math>AL = \pi r \sqrt{r^2 + b^2}</math></p> <p><math>V = \frac{1}{3}\pi r^2 h</math></p> 	<p style="text-align: center;"><b>Tronco de Cono</b></p> <p><math>V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + rR + R^2)</math></p> <p><math>AL = \pi s(r + R)</math></p> 
<p style="text-align: center;"><b>Cilindro</b></p> <p><math>V = \pi r^2 h</math></p> <p><math>AL = 2\pi r h</math></p> 	<p style="text-align: center;"><b>Esfera</b></p> <p><math>V = \frac{4}{3}\pi r^3</math></p> <p><math>A = 4\pi r^2</math></p> 

# TRIGONOMETRIA

## Identidades Fundamentales

$$1. \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$2. \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$3. \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$4. \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$5. \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$6. 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$7. 1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

$$8. \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

$$9. \cos(-x) = \cos x$$

$$10. \tan(-x) = -\tan x$$

## Identidades de Cofunción y de Reducción

$$11. \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$12. \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$$

$$13. \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$14. \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$$

$$15. \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cosec} x$$

$$16. \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$$

$$17. \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$18. \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{sen} x$$

$$19. \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x$$

$$20. \cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$21. \operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$$

$$22. \tan(x + \pi) = \tan x$$

## Identidades de Suma y Diferencia

$$23. \operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$$

$$24. \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$25. \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$26. \cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}$$

## Identidades del Angulos Dobles y Triples

$$27. \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$28. \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

29.  $\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$

30.  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

31.  $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

**Identidades de Reducción de Potencias**

32.  $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

33.  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

34.  $\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

**Identidades del Angulo Mitad**

35.  $\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$

36.  $\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$

**Transformación de productos en sumas**

37.  $\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2} [\operatorname{sen} (x + y) + \operatorname{sen} (x - y)]$

38.  $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos (x + y) + \cos (x - y)]$

39.  $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} [\cos (x - y) - \cos (x + y)]$

**Transformación de sumas en productos**

40.  $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$

41.  $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \operatorname{sen} \frac{x - y}{2}$

42.  $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$

43.  $\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \frac{x + y}{2} \operatorname{sen} \frac{x - y}{2}$

**Ley de los senos**

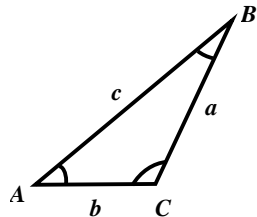
44.  $\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

**Ley de los cosenos**

45.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

46.  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

47.  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$



## FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS NOTABLES

Grados	Radian	sen $\theta$	cos $\theta$	tan $\theta$	cot $\theta$	sec $\theta$	cosec $\theta$
0°	0	0	1	0	$\mp \infty$	1	$\mp \infty$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	1
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
180°	$\pi$	0	-1	0	$\mp \infty$	-1	$\pm \infty$
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm \infty$	0	$\mp \infty$	-1
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2
360°	$2\pi$	0	1	0	$\mp \infty$	1	$\mp \infty$

## EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

1.  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

2.  $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$

3.  $a^x = e^{x \ln a}$

## IDENTIDADES HIPERBOLICAS

1.  $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

2.  $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

3.  $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

4.  $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$

5.  $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$

6.  $\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}$

7.  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

8.  $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

9.  $1 - \coth^2 x = -\operatorname{cosech}^2 x$

10.  $\sinh(-x) = -\sinh x$

11.  $\cosh(-x) = \cosh x$

12.  $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

13.  $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$

14.  $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

15.  $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

16.  $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$

17.  $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$

18.  $\sinh \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}}$

19.  $\cosh \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}$

## ALFABETO GRIEGO

A α alfa

I ι iota

P ρ rho

B β beta

K κ kappa

Σ σ sigma

Γ γ gamma

Λ λ lambda

Τ τ tau

Δ δ delta

Μ μ mu

Υ υ ipsilon

Ε ε epsilon

Ν ν nu

Φ φ fi

Ζ ζ zeta

Ξ ξ xi

Χ χ ji

Η η eta

Ο ο omicron

Ψ ψ psi

Θ θ theta

Π π pi

Ω ω omega

## FORMULAS DE DERIVACION

$$1. D_x [f(x)g(x)] = f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x)$$

$$2. D_x \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{[g(x)]^2}$$

$$3. D_x(u^n) = nu^{n-1} D_x u \quad \text{ó bien} \quad D_x((g(x))^n) = n(g(x))^{n-1} D_x g(x)$$

$$4. D_x e^u = e^u D_x u$$

$$5. D_x a^u = a^u \ln a D_x u$$

$$6. D_x \ln u = \frac{1}{u} D_x u$$

$$7. D_x \log_a u = \frac{1}{u \ln a} D_x u$$

$$8. D_x \sin u = \cos u D_x u$$

$$9. D_x \cos u = -\sin u D_x u$$

$$10. D_x \tan u = \sec^2 u D_x u$$

$$11. D_x \cot u = -\operatorname{cosec}^2 u D_x u$$

$$12. D_x \sec u = \sec u \tan u D_x u$$

$$13. D_x \operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u \cot u D_x u$$

$$14. D_x \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$$

$$15. D_x \cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} D_x u$$

$$16. D_x \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} D_x u$$

$$17. D_x \cot^{-1} u = -\frac{1}{1+u^2} D_x u$$

$$18. D_x \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$$

$$19. D_x \operatorname{cosec}^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} D_x u$$

$$20. D_x \sinh u = \cosh u D_x u$$

$$21. D_x \cosh u = \sinh u D_x u$$

$$22. D_x \tanh u = \operatorname{sech}^2 u D_x u$$

$$23. D_x \coth u = -\operatorname{cosech}^2 u D_x u$$

$$24. D_x \operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u D_x u$$

$$25. D_x \operatorname{cosech} u = -\operatorname{cosech} u \coth u D_x u$$

$$26. D_x \sinh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} D_x u$$

$$27. D_x \cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} D_x u$$

$$28. D_x \tanh^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} D_x u$$

$$29. D_x \coth^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} D_x u$$

$$30. D_x \operatorname{sech}^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} D_x u$$

$$31. D_x \operatorname{cosech}^{-1} u = -\frac{1}{|u|\sqrt{1+u^2}} D_x u$$

---

# **RESPUESTAS**

---

## CAPITULO 1

### SECCION 1.1

1. a.  $\{1, 9\}$     b.  $A = \{2, 4, 6, 8\}$     c.  $\{2, 5, 7\}$     d.  $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$   
 2.  $A = \{0, 5, 7, 8, 9\}$ ,  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8\}$   
 3.  $A = \{0, 3, 4, 8, 9\}$ ,  $B = \{1, 3, 4, 5, 9\}$   
 4.  $A = \{0, 2, 3, 5, 6\}$ ,  $B = \{0, 1, 3, 6, 8, 9\}$ ,  $C = \{0, 1, 3, 5, 6, 9\}$ ,  
 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ .

### SECCION 1.2

1.  $-x^2 + 8x - 3$     2.  $2a^2 - 18a$     3.  $1 + 3/a$     4.  $1 - 4/b$     5.  $1/a - 1/b$   
 6.  $-2/b + 5/a$     7.  $4/5$     8.  $1/2$     9.  $6b^2$     10.  $\frac{6a}{5b}$     11.  $-\frac{5x}{24y}$   
 12.  $\frac{5x+6}{10x^2}$     13.  $\frac{x(b+1)}{ab}$     14.  $-\frac{7a}{b}$     15.  $1/3$     16.  $17/24$     17.  $\frac{2}{35}$   
 18.  $-\frac{3}{4}$     19.  $-\frac{1}{90}$     20.  $-\frac{1}{12}$     21.  $-7$     22.  $\frac{19}{10}$     23.  $1$     24.  $-\frac{1}{5}$   
 25.  $3/2$     26.  $4/9$     27.  $\frac{7b}{5a}$     28.  $-\frac{5x}{18y}$     29.  $2^{10} = 1,034$     30.  $1$     31.  $4/3$   
 32.  $\frac{5}{6^2}$     33.  $\frac{3}{2^4} = \frac{3}{16}$     34.  $\frac{2^6}{3^6} = \frac{64}{729}$     35.  $\frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5}$     37.  $\frac{15}{4}$     38.  $3 \times 2^4 = 48$   
 39.  $2 \times 5^6 = 31,250$     40.  $\frac{1}{3ab^7}$     41.  $\frac{16}{x^2y^5}$     42.  $-\frac{2^7y^{12}}{x^3} = -128\frac{y^{12}}{x^3}$   
 43.  $\frac{3^2a^8}{b^6} = 9\frac{a^8}{b^6}$     44.  $\frac{y^{12}}{2^3x^6} = \frac{y^{12}}{8x^6}$     45.  $\frac{1}{4}$     46.  $\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}$     47.  $\frac{9x^3-2x}{21}$   
 48.  $\frac{3}{4}x^2y$     49.  $\frac{1}{2}$     50.  $-\frac{9}{5x}$     52. a.  $9.44 \times 10^{12}$  Km.    b.  $4 \times 10^{-13}$  cm.  
 c.  $6.251 \times 10^9$  habitantes    d.  $1.67 \times 10^{-22}$  Kg.    53. a.  $462,400$  Km.  
 b.  $0.000000000492$  m.

### SECCION 1.3

1.  $5$     2.  $-0,3$     3.  $\frac{1}{0,4} = \frac{5}{2}$     4.  $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$     5.  $-\frac{3}{2}$     6.  $125$     7.  $5$     8.  $\frac{1}{75}$   
 9.  $\frac{2}{3}$     10.  $\frac{108}{b}$     11.  $\frac{81}{4y^4}$     12.  $\frac{y^{10}}{x^{15}}$     13.  $-\frac{2a}{3}$     14.  $\frac{x^2}{y}$     15.  $3\sqrt{5}$   
 16.  $2\sqrt{7} - \sqrt{3}$     17.  $-\sqrt{3}$     18.  $\frac{1}{9}$     19.  $3\sqrt[3]{5}$     20.  $13\sqrt{3}$     21.  $-3\sqrt{7}$   
 22.  $7\sqrt{3}$     23.  $-\frac{3}{4}\sqrt{6}$     24.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$     25.  $\frac{5}{12}\sqrt[3]{2}$     26.  $1/4$     27.  $2^n \times 5^{3n} = 250^n$   
 28.  $n = 13/6$     29.  $n = 1/10$     30.  $n = 3$

## SECCION 1.4

1.  $4x^2 - 5$  2.  $4x - y$  3.  $9x^4 - 16y^6$  4.  $h$  5.  $x - 1/y^2$  6.  $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$   
 7.  $16x^2 + 40x + 25$  8.  $4x^2 - 20xy + 25y^2$  9.  $x^2 - 2 + 1/x^2$  10.  $x^6 - 2 + 1/x^6$   
 11.  $64x^3 + 48x^2y + 12xy^2 + y^3$  12.  $a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6$   
 13.  $x^6 - 3x^4y + 3x^2y^2 - y^3$  14.  $x + 3\sqrt[3]{x^2y} + 3\sqrt[3]{xy^2} + y$  15.  $x^4 - 50x^2 + 625$   
 16.  $16x^4 - y^4$  17.  $7x^2(x - 9)$  18.  $4xy^2z^2(2xz - 6y - x^2y^2z)$  19.  $(x - 2)^2(x + 2)$   
 20.  $4(y + 4)(y + 3x)$  21.  $(x - 1)(xy^2 + y^2 - 4)$  22.  $(2x - 5y)(a^2 - 3b)$   
 23.  $(x + 8)(x - 4)$  24.  $(x - 5)(x + 1)$  25.  $(xy + 29)(y - 1)$  26.  $(x + 24)(x - 9)$   
 27.  $(x^2 - 10)(x^2 + 8)$  28.  $(ab + 4)(ab - 3)$  29.  $(3x + 4)(x + 1)$  30.  $5(y + 5)(y - 3)$   
 31.  $(ax + 2)(5ax - 6)$  32.  $(3x - 10)(3x + 5)$  33.  $y^2(x + 2)(4x + 3)$   
 34.  $(5x^2 - 1)^2$  35.  $(5x + 6y^2)(5x - 6y^2)$  36.  $7x^2(3x + 1)(3x - 1)$   
 37.  $5x^2(3y + x)(3y - x)$  38.  $(x/6 + y/5)(x/6 - y/5)$  39.  $(4x^n + 1/7)(4x^n - 1/7)$   
 40.  $(a - b + 3)(a - b - 3)$  41.  $4ab$  42.  $(x + y - 3)(x - y + 1)$   
 43.  $(x + y + 3)(x - y - 3)$  44.  $(5a - b)(a - 5b)$  45.  $(a^2 - 1)^2$  46.  $(4x - 3y)^2$   
 47.  $(20x^2 + 1)^2$  48.  $(x/3 + 1)^2$  49.  $(2x/5 - 1/4)^2$  50.  $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$   
 51.  $(3a + 4b)(9a^2 - 12ab + 16b^2)$  52.  $5(xy + 1)(x^2y^2 - xy + 1)$   
 53.  $x^2(x - 5)(x^2 + 5x + 25)$  54.  $(x + y - 1)(x^2 + 2xy + y^2 + x + y + 1)$   
 55.  $(x - y - 2)(x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 4)$  56.  $9(x^2 - x + 1)$

## SECCION 1.5

1.  $x = 36$ , 2.  $y = 2$  3.  $x = -5/8$  4.  $x = 2$  5.  $x = 13$  6.  $z = -4$   
 7.  $x = -2$  8.  $x = 3$  9.  $x = -5$  10.  $x = -7$  11.  $x = 2$  12.  $x = -4$   
 13.  $x = 1/2$  14.  $x = 4/5$  15.  $x = \frac{a}{a+5}$  16.  $x = a$  17.  $x = \frac{b-1}{2}$   
 18.  $x = 2a$  19.  $x = a + b$  20.  $x = 2m$  21.  $x = 2$  22.  $x = 3b$   
 23.  $s = \frac{A - \pi r^2}{\pi r}$  24.  $a = \frac{S(I - r)}{1 - r^n}$  25.  $h = \frac{HS - f}{S}$  26.  $x = \frac{ay}{y - a}$   
 27.  $-2, 6$  28.  $3$  29.  $-3, -8$  30.  $1, 1/2$  31.  $2, -1/9$   
 32.  $5, -1/3$  33.  $-2, -3/2$  34.  $3, -5/6$  35.  $1/4, 1/6$  36.  $8, -19/4$   
 37.  $-1, 1, -4, 4$  38.  $-1/2, 1/2$  39.  $-27, 8$  40.  $1/8, -8$   
 41.  $1 - \frac{1}{3}\sqrt{5}, 1 + \frac{1}{3}\sqrt{5}$  42.  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$  43.  $\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$  44.  $-3\sqrt{5}, 3\sqrt{5}$   
 45.  $-a, a + 2$  46.  $a, 2$  47.  $x = 3$  48.  $x = 3$  49.  $x = 0$  50.  $x = 3/8$  51.  $2$

52.  $1-\sqrt{2}$ ,  $1+\sqrt{2}$     53.  $2-\frac{1}{3}\sqrt{42}$ ,  $2+\frac{1}{3}\sqrt{42}$     54.  $5/2$     55.  $1-\sqrt{2}$ ,  $1+\sqrt{2}$ ,  
 56.  $-3-\sqrt{2}$ ,  $-3+\sqrt{2}$     57.  $1/3$ ,  $-1/5$     58.  $3$ ,  $2/5$     59.  $-1$ ,  $5/2$     60.  $-1$ ,  
 $-1/3$   
 61.  $11$     62.  $-10$     63.  $10$     64.  $y=7$     65.  $x=3$     66.  $z=9$     67.  $x=2$     68.  $1/4$   
 69.  $2$     70.  $2$     71.  $4$     72.  $4$     73.  $1$     74.  $2$     75.  $\frac{9}{16}$     76.  $2$     77.  $-4$ ,  $-\frac{2}{5}$   
 78.  $4$ ,  $-\frac{11}{13}$     79.  $-4$     80.  $-60$     81.  $-4$     77. raíces:  $1$ ,  $-2$ ,  $-1$ ;  $(x-1)(x+2)(x+1)$ .  
 82. raíces:  $1$ ,  $1+\sqrt{3}$ ,  $1-\sqrt{3}$ ;  $(x-1)(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})$ .  
 83. raíces:  $1$ ,  $-3/2$ ,  $1/2$ ;  $4(x-1)(x+3/2)(x-1/2)$ .  
 84. raíces:  $-2$ ,  $3/2+\sqrt{7}/2$ ,  $3/2-\sqrt{7}/2$ ;  $2(x+2)(x-3/2+\sqrt{7}/2)(x-3/2-\sqrt{7}/2)$   
 85. raíces:  $-1$ ,  $2$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $-\sqrt{3}$ ;  $(x+1)(x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ .  
 86. raíces:  $1$ ,  $-1$ ,  $-2$ ,  $1/3$ ;  $3(x-1)(x+1)(x+2)(x-1/3)$ .  
 87. raíces:  $-1$ ,  $-2$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $3$ ;  $(x+1)(x+2)(x-1)(x-2)(x-3)$ .  
 88. raíces:  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$ ,  $3$ ;  $(x+1)^2(x+2)(x+3)(x-3)$ .
- 

### SECCION 1.6

1.  $(-\infty, 4)$     2.  $(-\infty, -32/3)$     3.  $(17/2, +\infty)$     4.  $(-\infty, -43/37]$     5.  $(17/5, 19]$   
 6.  $(-19, -9)$     7.  $(-2, 3)$     8.  $(-1, 1)$     9.  $(-\infty, -1-\sqrt{21}] \cup [-1+\sqrt{21}, +\infty)$   
 9.  $(-\infty, -1-\sqrt{21}] \cup [-1+\sqrt{21}, +\infty)$     10.  $(-\infty, -3) \cup (1/2, +\infty)$   
 11.  $(-\infty, 1/3) \cup (2/3, +\infty)$     12.  $(3, 4)$     13.  $[-3, -2] \cup [1, +\infty)$   
 14.  $(-2, 2]$     15.  $[-10/3, 0)$     16.  $[1/3, 1)$     17.  $(-\infty, -2] \cup (0, 2]$   
 18.  $(-\infty, -1-\sqrt{3}] \cup (-1, -1+\sqrt{3}]$     19.  $(-3, -1) \cup (0, +\infty)$   
 20.  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$     21.  $(2-2\sqrt{3}, 0) \cup (3, 2+2\sqrt{3})$   
 22.  $33 \leq F \leq 60$     23.  $15 \leq F \leq 35$     24.  $6$  cm.
- 

### SECCION 1.7

1.  $9$ ,  $1$     2.  $-4/3$ ,  $2$     3.  $7/2$     4.  $11/4$     5.  $-1$     6.  $5/3$ ,  $3$     7.  $-6$ ,  $2$   
 8.  $1/4$ ,  $1$     9.  $-2$ ,  $8/3$     10.  $(1, 7)$     11.  $(-16/3, 14/3)$     12.  $(-3/2, 9/2)$   
 13.  $[-2, 2/3]$     14.  $(-\infty, -3/5] \cup [-1/5, +\infty)$     15.  $(-\infty, -1) \cup (-1/2, +\infty)$   
 16.  $(-\infty, -5/2] \cup [25/2, +\infty)$     17.  $[-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup [3, +\infty)$

18.  $[-4, -1] \cup (1, 4]$     19.  $(2, 4) - \{3\}$     20.  $(1/2, +\infty)$     21.  $[2/3, 4]$   
 22.  $[-1, 2] - \{1/2\}$     23.  $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$     24.  $[-2, 2]$     25.  $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$   
 26.  $(-\infty, -7] \cup [1/3, +\infty)$     27.  $M = 43$ ,    28.  $M = 9$     29.  $M = 10$

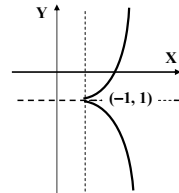
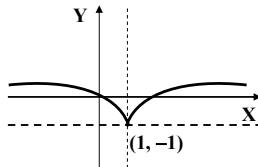
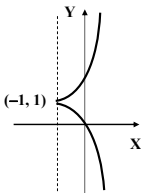
## CAPITULO 2

### SECCION 2.1

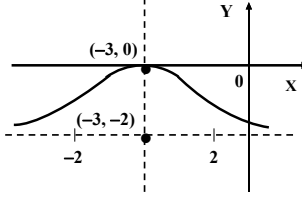
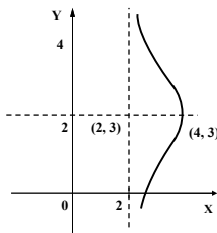
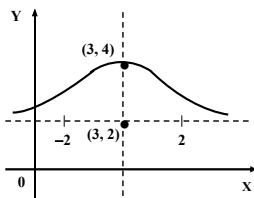
1.  $\sqrt{5}$ ,  $(1/2, 1)$     2.  $2\sqrt{2}$ ,  $(2, 4)$     3.  $\sqrt{7-2\sqrt{2}}$ ,  $(0, (1+\sqrt{2})/2)$   
 5.  $B = (3, 9)$     6.  $A = (-1, 18)$     13.  $(2, 2)$  y  $(-4, 2)$     14.  $(1, 13)$  y  $(1, -11)$   
 15.  $5x + 2y - 3 = 0$     16.  $x^2 + y^2 = 9$     17.  $(1, -3)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(-5, 7)$   
 18.  $(-2, -5)$ ,  $(0, -9)$     19.  $(9/2, 1)$

### SECCION 2.2

1. Eje Y    2. Origen    3. Eje X, eje Y y Origen    4. Eje X, eje Y y Origen  
 5. Eje X    6. Eje X    7. Eje X, eje Y y Origen    8.  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$   
 9.  $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 5$     10.  $x^2 + y^2 = 25$     11.  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 50$   
 12.  $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$     13.  $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 16$     14.  $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$   
 15.  $(x-1)^2 + y^2 = 1$     16.  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$     17. Centro  $(1, 0)$ ,  $r = 2$   
 18. Centro  $(0, -2)$ ,  $r = 2\sqrt{2}$     19. Centro  $(0, -1/2)$ ,  $r = 1/2$     20. Centro  $(1, -2)$ ,  $r = 3$   
 21. Centro  $(1/4, -1/4)$ ,  $r = \sqrt{10}/4$     22. Centro  $(3/2, 1/2)$ ,  $r = 9/4$   
 23.  $(y-1)^2 = (x+1)^3$     24.  $(x-1)^2 = (y+1)^3$     25.  $(y+1)^2 = (x-1)^3$



26.  $(x-3)^2 (y-2) = 4(4-y)$     27.  $(y-3)^2 (x-2) = 4(4-x)$     28.  $(x+3)^2 (y+2) = 4(-y)$



**SECCION 2.3**

2.  $y = 5x - 2$     3.  $y = -3x$     4.  $y = 2x - 1$     5.  $y = -\frac{2}{5}x + 2$   
 6.  $y = -\frac{3}{5}x + \frac{18}{5}$     7.  $y = \frac{x}{5} + \frac{11}{5}$     8.  $y = -2x + \frac{41}{23}$     9.  $x + y = 2, x - y = 14$   
 10. a.  $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$     b.  $9\sqrt{5}/10$     11. 5    12.  $L_2$  es paralela a  $L_5$ ;  $L_3$  es perpendicular a  $L_1$ ;  $L_4$  es perpendicular a  $L_6$ .    13. a.  $x - 3y - 6 = 0$     b.  $x + 2y - 13 = 0$     c.  $y = 1$   
 14.  $y + 3x - 25 = 0$     15. 3    16. 2    17.  $2/\sqrt{10}$     18. 2    19.  $4\sqrt{10}/5$   
 20.  $28/5$     21.  $C = -7$  ó  $C = 59/3$     22.  $5x + 12y + 40 = 0, 5x + 12y - 64 = 0$   
 23.  $3x - 4y + 7 = 0$     24.  $5x - 3y - 34 = 0, 3x + 5y + 34 = 0$     25.  $(5, -3)$  y  $(-3, -5)$   
 26.  $x - y - 3\sqrt{2} = 0, x - y + 3\sqrt{2} = 0$     27.  $3x + 4y - 14 = 0$   
 28.  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$     29.  $x^2 + y^2 = 16$     30.  $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$   
 31.  $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 20$     32.  $3x - 2y - 12 = 0, 3x - 8y + 24 = 0$   
 33. a.  $k \neq 3, n$  cualquiera    b.  $k = -\frac{4}{3}, n$  cualquiera    c.  $k = 3, n \neq 6$     d.  $k = 3, n = 6$ .  
 34. a.  $k = -4$  y  $n \neq 2$  ó  $k = 4$  y  $n \neq -2$     b.  $k = -4$  y  $n = 2$  ó  $k = 4$  y  $n = -2$   
     c.  $k = 0$  y  $n$  cualquiera.    35.  $x - 2y - 18 = 0, 2x + y + 14 = 0, 2x + y - 16 = 0$   
 38.  $A = (0, 14/5), B = (7/4, 0)$ .

**SECCION 3.2**

1.  $F = (0, 1), y = -1, L = 4$     2.  $F = (0, -1/3), y = 1/3, L = 4/3$   
 3.  $F = (3/2, 0), x = -3/2, L = 6$     4.  $F = (-5, 0), x = 5, L = 20$   
 5.  $F = (-1/16, 0), x = 1/16, L = 1/4$     6.  $V = (2, 1), x = 2, F = (2, 3), y = -1, L = 4$   
 7.  $V = (1, -5), y = -5, F = (5/4, -5), x = 3/4, L = 1$   
 8.  $V = (-4, 2), y = 2, F = (-7/2, 2), x = -9/2, L = 2$   
 9.  $V = (-1/2, 0), x = 0, F = (-3/4, 0), y = -1/4, L = 1$   
 10.  $V = (-4/3, 1), x = 1, F = (-4/3, -1), y = 3, L = 8$   
 11.  $y^2 = -24x$     12.  $x^2 = 16y$     13.  $(x - 2)^2 = 12(y - 2)$     14.  $2(y + 2)^2 = x + 1$   
 15.  $(y - 2)^2 = -16(x + 2)$     16.  $(x + 2)^2 = 16(y - 2)$     17.  $(y - 1)^2 = 16(x - 3)$   
 18.  $2x^2 = -9y$     19.  $(y - 2)^2 = 9(x - 1)$     20.  $(x - 1)^2 = -8(x + 4)$     21.  $(y - 1)^2 = 8x$   
     ó  $(y - 1)^2 - 8(x + 4)$     22.  $(x - 4)^2 = 6(y + 1/2)$     23.  $x^2 = -8y$   
 24. a.  $x^2 = -25y$     b. 40 m.    25. 4.5 cm.    26. 25 cm.    27. a.  $x^2 = 4p(y - 8)$     b. 17.6 m.

28. a.  $x^2 = -200(y-50)$  b. 45.5 pies. 29. 15 millones de km. 30. 1,738 km.

31.  $(y-1)^2 = 4(x-3)$  32.  $(x-3/4)^2 = \frac{1}{2}(y-1/8)$ .

### SECCION 3.3

1.  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{64} = 1$  2.  $\frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{64} = 1$  3.  $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$
4.  $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$  5.  $(x-3)^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$  6.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
7.  $\frac{(x+1)^2}{13} + \frac{y^2}{4} = 1$  8.  $\frac{(x-2)^2}{1600/91} + \frac{y^2}{100} = 1$  9.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$
10.  $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{8} = 1$  11.  $\frac{x^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{27} = 1$  12.  $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{10} = 1$
13. a.  $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$  b. Vértices:  $(1, -2), (5, -2)$ . Focos:  $(3 - \sqrt{3}, -2), (3 + \sqrt{3}, -2)$
14. a.  $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$  b. Vértices:  $(1, -6), (1, 0)$ . Focos:  $(1, -3 - \sqrt{5}), (1, -3 + \sqrt{5})$
15. a.  $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$  b. Vértices:  $(-2, -2), (-2, 8)$ . Focos:  $(-2, 0), (-2, 6)$ .
16. Sí. La altura del túnel cuando  $x = 9$  es 8 y  $7.5 < 8$ .
17.  $\frac{x^2}{240^2} + \frac{y^2}{140^2} = 1$
18.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ . Elipse. 19.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ . Elipse. 20. a.  $e = \frac{8}{17}$
- b.  $\frac{x^2}{18,062,500} + \frac{y^2}{14,062,500} = 1$

### SECCION 3.4

1.  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$  2.  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$  3.  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$  4.  $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{209} = 1$
5.  $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$  6.  $\frac{(y+3)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{27} = 1$  7.  $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$
8.  $\frac{x^2}{9/5} - \frac{y^2}{36/5} = 1$  9.  $\frac{y^2}{50} - \frac{x^2}{8} = 1$  10.  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$  ?
11.  $\frac{(x-4)^2}{2} - \frac{(y-2)^2}{2} = 1$  12.  $\frac{(y-2)^2}{3} - \frac{(x-1/2)^2}{3/4} = 1$  13.  $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{36} = 1$
14.  $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$  15.  $\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{3} = 1$  16. a.  $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$
- b.  $(-1, 2), (7, 2)$  c.  $(-2, 2), (8, 2)$  d.  $3x - 4y - 1 = 0, 3x + 4y - 17 = 0$

17. a.  $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1$  b.  $(-4, 2), (-4, 4)$  c.  $(-4, 2 - \sqrt{13}), (-4, 2 + \sqrt{13})$

d.  $3y - 2x - 14 = 0, 3y + 2x + 2 = 0$ . 18. a.  $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{64} = 1$  b.  $(-1, -3), (3, -3)$  c.  $(-1 - 2\sqrt{17}, -3), (-1 + 2\sqrt{17}, -3)$  d.  $y - 4x + 7 = 0, y + 4x - 1 = 0$ .

19. a.  $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$  b.  $(-1, 3), (5, 3)$  c.  $(2 - \sqrt{13}, 3), (2 + \sqrt{13}, 3)$

d.  $2x - 3y + 5 = 0, 2x + 3y - 13 = 0$ . 20. a.  $\frac{x^2}{3,600} - \frac{y^2}{6,400} = 1$

b. A 40 km. de la estación B. c. 0.0002 seg.

21.  $\frac{x^2}{28,900} - \frac{y^2}{11,100} = 1$  22.  $\frac{x^2}{3} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1$

### SECCION 3.5

1.  $(-1, -\sqrt{3})$  2.  $(2\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$  3.  $(-1, 3\sqrt{3})$  4.  $(4, -2)$  5.  $(3, -3\sqrt{2})$

6.  $y^2 - x^2 = 1$ , hipérbola 7.  $\frac{y^2}{10} - \frac{x^2}{6} = 1$ , hipérbola

8. Elipse,  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{10} = 1$  9. Parábola,  $y' = x'^2$  10. a.  $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{3} = 1$  b. En  $X'Y'$ :

$V_1 = (-3, 0), V_2 = (3, 0)$ . En  $XY$ :  $V_1 = (-3/\sqrt{5}, -6/\sqrt{5}), V_2 = (3/\sqrt{5}, 6/\sqrt{5})$

c. En  $X'Y'$ :  $F_1 = (-\sqrt{6}, 0), F_2 = (\sqrt{6}, 0)$ . En  $XY$ :  $F_1 = (-\sqrt{6/5}, -2\sqrt{6/5})$

$F_2 = (\sqrt{6/5}, 2\sqrt{6/5})$  d.  $2x - y = 0$  e.  $x + 2y = 0$

11. a.  $\frac{(x'-1)^2}{4} - \frac{(y'-2)^2}{1} = 1$  b. En  $X'Y'$ :  $C = (1, 2), V_1 = (-1, 2), V_2 = (3, 2)$ .

En  $XY$ :  $C = (-2/5, 11/5), V_1 = (-2, 1), V_2 = (6/5, 17/5)$  c. En  $X'Y'$ :

$F_1 = (1 - \sqrt{5}, 2), F_2 = (1 + \sqrt{5}, 2)$ . En  $XY$ :  $F_1 = \left(-\frac{2+4\sqrt{5}}{5}, \frac{11-3\sqrt{5}}{5}\right)$ ,

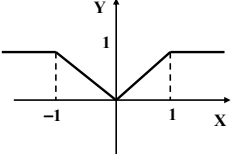
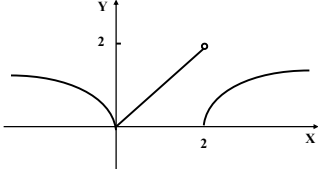
$F_2 = \left(-\frac{2-4\sqrt{5}}{5}, \frac{11+3\sqrt{5}}{5}\right)$ .

## CAPITULO 4

### SECCION 4.1

1. a.  $\frac{3}{4}$  b.  $\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$  c.  $\frac{h}{3(h+3)}$  d.  $\frac{h}{(a+1)(a+h+1)}$

2. a. 2 b.  $\frac{1}{4}a^2 + a + 2$  c.  $\frac{h^2 + 2ah}{4}$

3.  $\text{Dom}(f) = [9, +\infty)$ ,  $\text{Rang}(f) = [0, +\infty)$   
 4.  $\text{Dom}(g) = [-4, 4]$ ,  $\text{Rang}(g) = [0, 4/3]$   
 5.  $\text{Dom}(h) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ ,  $\text{Rang}(h) = [0, +\infty)$   
 6.  $\text{Dom}(u) = \text{Rang}(u) = \mathbb{R}$     7.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $\text{Rang}(f) = \mathbb{R}$   
 8.  $\text{Dom}(y) = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ ,  $\text{Rang}(y) = [0, +\infty)$     9.  $\text{Dom}(g) = (-\infty, 9] - \{5\}$   
 10.  $\text{Dom}(y) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) - \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$   
 11.  $\text{Dom}(y) = (-\infty, 0) \cup [1/4, +\infty)$     12.  $\text{Dom}(y) = (-\infty, 1] - \{-15\}$   
 13.  $\text{Dom}(y) = [-1, 2)$     14.  $\text{Dom}(y) = (-\infty, -5] \cup (3, +\infty)$   
 15.   
 $\text{Dom}(y) = \mathbb{R}$ ,  $\text{Ran}(y) = [0, 1]$   
 16.   
 $\text{Dom}(y) = \mathbb{R}$ ,  $\text{Ran}(y) = [0, \infty)$   
 18.  $f(x-1) = (x-5)^2$     19.  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$     20.  $U(x) = 226x - 5x^2$   
 21.  $G(x) = \begin{cases} 4,000x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1,000 \\ 4,000,000 + (x-1,000)(14,000-10x), & \text{si } x > 1,000 \end{cases}$   
 22.  $p(x) = 1,760x - 10x^2$     23.  $V(x) = x^2(150 - 2x)$     24.  $A(r) = \pi r^2 + \frac{1}{4}(6 - \pi r)^2$   
 25.  $A(x) = 6(18 - x)\sqrt{x-9}$     26.  $A(x) = \frac{x}{8}(28 - 4x - \pi x)$   
 27.  $V(x) = 4x(40 - x)(25 - x)$     28.  $A(x) = \frac{1}{x}(x+4)(252 + 6x)$

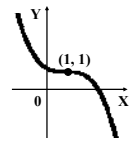
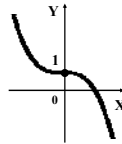
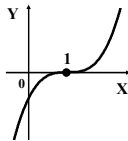
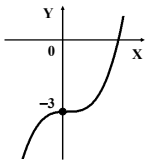
## SECCION 4.2

1. a.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$     b.  $-\frac{1}{2}$     c.  $-\sqrt{3}$     d.  $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$     e.  $-2$     2. a.  $\alpha = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$   
 b.  $\alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$     c. ninguno    d. ninguno    e.  $\alpha = \frac{4}{3}\pi + 2n\pi$  ó  $\frac{5}{3}\pi + 2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$   
 e.  $\alpha = \frac{4}{3}\pi + 2n\pi$  ó  $\frac{5}{3}\pi + 2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$     6.  $-1$     7. a.  $-\sin \alpha$     b.  $0$     8. a.  $\frac{2\pi}{\lambda}$ ,  
 b.  $\frac{\pi}{2}$     9. a.  $\frac{1}{3}$  rad.    b.  $\frac{1}{10}$  rad.    c.  $\frac{\pi}{3}$  rad.    10. a. 4.71 cm.    b. 35.34 cm.  
 c. 7.85 cm.    11. a. 111.13 km.    b. 3,333.76 km.    c. 5,000.64 km.    d. 8,973.37 km.  
 12. 1,852 km.    13.  $\frac{3}{2}\pi$  rad.    14. 61.35 grados.    15. 20.45 grados.  
 16.  $(-\sqrt{3}, -1)$     17.  $P = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$     18. 18.    19. a.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ , b.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

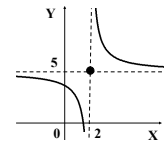
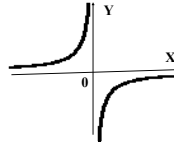
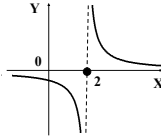
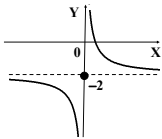
20.  $\frac{\sqrt{3}}{12}$     21.  $2r \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$     22.  $\frac{2,500}{\pi} \approx 795.78$  giros/min.    23. 49 revol./seg.  
 24.  $P(\theta) = 20 \left[ \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right]$     25.  $V(\theta) = \frac{125}{3\pi^2} \theta^2 \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$   
 26.  $y - x + 4\sqrt{2} = 0$     27.  $\frac{\pi}{4}$     28.  $x - 5y + 3 = 0, 5x + y - 11 = 0$   
 29.  $3x - 4y + 15 = 0, 4x + 3y - 30 = 0, 3x - 4y - 10 = 0, 4x + 3y - 5 = 0.$

SECCION 4.3

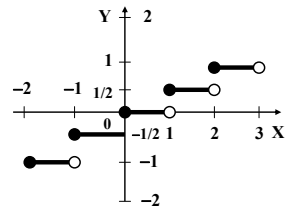
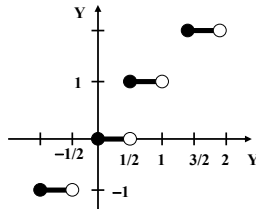
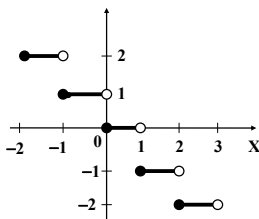
1. a.  $y = x^3 - 3$     b.  $y = (x-1)^3$     c.  $y = -x^3 + 1$     d.  $y = -(x-1)^3 + 1$



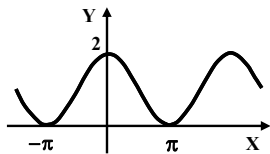
2. a.  $y = \frac{1}{x} - 2$     b.  $y = \frac{1}{x-2}$     c.  $y = -\frac{1}{x}$     d.  $y = \frac{1}{x-2} + 5$



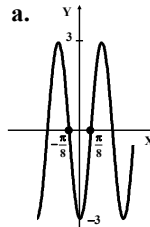
3. a.  $y = -[x]$     b.  $y = [2x]$     c.  $y = \frac{1}{2}[x]$



4.  $y = 1 - \operatorname{sen} \left( x - \frac{\pi}{2} \right)$



5. a.  $y = \operatorname{sen} \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right)$     b. periodo =  $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$



6.  $\operatorname{Dom}(f+g) = \operatorname{Dom}(f-g) = \operatorname{Dom}(fg) = (-\infty, 1) \cup (1, 2],$

$\operatorname{Dom} \left( \frac{f}{g} \right) = (-\infty, 1) \cup (1, 2)$

$$7. \text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f-g) = \text{Dom}(fg) = [-4, -2] \cup [2, 4],$$

$$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = [-4, -2] \cup (2, 4]$$

$$8. \text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f-g) = \text{Dom}(fg) = (-2, 2), \quad \text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = (-2, 2) - \{0\}.$$

$$9. \text{Dom}(f) = [1, 4] \quad 10. \text{Dom}(f) = (-2, 0] \quad 11. \text{Dom}(g) = [-2, 3)$$

$$12. (f \circ g)(x) = x - 1, \text{Dom}(f \circ g) = [0, +\infty)$$

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \text{Dom}(g \circ f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$(f \circ f)(x) = x^4 - 2x^2, \text{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R}. \quad (g \circ g)(x) = \sqrt[4]{x}, \text{Dom}(g \circ g) = [0, +\infty).$$

$$13. (f \circ g)(x) = x - 4, \text{Dom}(f \circ g) = [4, +\infty)$$

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 4}, \text{Dom}(g \circ f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$(f \circ f)(x) = x^4, \text{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R}$$

$$(g \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{x-4}-4}, \text{Dom}(g \circ g) = [20, +\infty).$$

$$14. (f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}, \text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2 - x}, \text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

$$(f \circ f)(x) = x^4 - 2x^3 + x, \text{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R}. \quad (g \circ g)(x) = x, \text{Dom}(g \circ g) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$15. (f \circ g)(x) = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{x}}, \text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}, \text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$(f \circ f)(x) = \frac{x-1}{x}, \text{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}, \quad (g \circ g)(x) = \sqrt[9]{x}, \text{Dom}(g \circ g) = \mathbb{R}.$$

$$16. (f \circ g)(x) = \sqrt{-x}, \quad \text{Dom}(f \circ g) = (-\infty, 0]$$

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x^2 - 1}}, \quad \text{Dom}(g \circ f) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$$

$$(f \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 2}, \text{Dom}(f \circ f) = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$$

$$(g \circ g)(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1-x}}, \text{Dom}(g \circ g) = [0, 1]$$

$$17. (f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2 - 1}}$$

$$18. (f \circ g \circ h)(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1}}$$

$$19. (f \circ f \circ f)(x) = x, \text{Dom}(f \circ f \circ f) = \mathbb{R} - \{0, 1\} \quad 20. f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 1 + x.$$

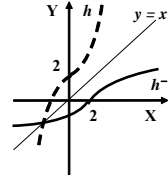
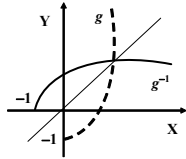
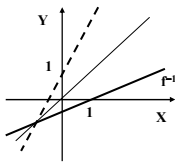
$$21. f(x) = x - 3, g(x) = \sqrt{x}$$

$$22. f(x) = \sqrt[3]{x}, g(x) = (2x - 1)^2$$

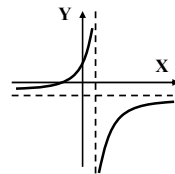
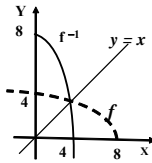
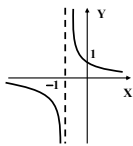
23.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$       24.  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$ ,  $h(x) = x^2$   
 25.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $g(x) = x + 1$ ,  $h(x) = x^2 + |x|$   
 26.  $f(x) = \sqrt[4]{x}$ ,  $g(x) = x - 1$ ,  $h(x) = \sqrt{x}$     27.  $g(x) = x^2 - 2x + 1$     28.  $g(x) = \frac{1}{x+1}$

**SECCION 4.4**

1.  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$       2.  $g^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$       3.  $h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$



4.  $k^{-1}(x) = \frac{1}{x+1}$       5.  $f^{-1}(x) = 8 - \frac{x^2}{2}$       6.  $g^{-1}(x) = \frac{-7x-15}{3x-5}$



**SECCION 4.5**

1.  $\frac{\pi}{3}$     2.  $\frac{5}{4}\pi$     3.  $\pi$     4.  $-\frac{\pi}{3}$     5.  $\frac{3\pi}{4}$     6.  $\frac{7\pi}{6}$     7. a.  $\frac{2}{3}\sqrt{2}$     b.  $\frac{1}{4}\sqrt{2}$   
 c.  $2\sqrt{2}$     d.  $\frac{3}{4}\sqrt{2}$     e. 3    8. a.  $\frac{1}{5}\sqrt{5}$     b.  $\frac{2}{5}\sqrt{5}$     c.  $\frac{1}{2}$     d. 2    e.  $\sqrt{5}$   
 9. a.  $-\frac{3}{10}\sqrt{10}$     b.  $\frac{1}{10}\sqrt{10}$     c.  $-\frac{1}{3}$     d.  $\sqrt{10}$     e.  $-\frac{\sqrt{10}}{3}$     10.  $\frac{1}{2}$     11.  $-\frac{1}{2}\sqrt{5}$   
 12.  $-\frac{3}{5}$     13.  $-\frac{3}{7}\sqrt{7}$     14.  $\frac{\pi}{3}$     15.  $\frac{\pi}{3}$     16.  $\frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{10}}{30}$     17.  $\frac{4}{9}\sqrt{2}$   
 18.  $\sqrt{3}$     19.  $\frac{5}{26}\sqrt{26}$     20.  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$     21.  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$     22.  $\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$   
 23.  $\sqrt{\frac{1+x}{2}}$     24.  $x = 2\text{sen}(-0.5) \approx -0.958851077$     25.  $x = \sqrt{2} - 1$   
 26.  $x \approx 0.8673$  ó  $x \approx -1.4728682$

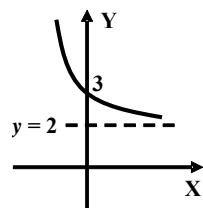
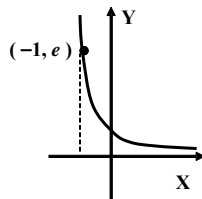
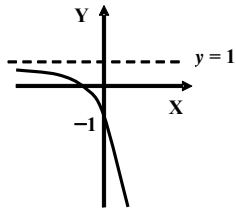
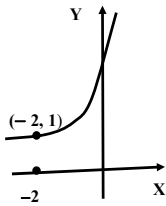
**SECCION 4.6**

1. 3    2. 16    3. 125    4.  $\frac{1}{125}$     5. 4    6.  $\frac{4}{3\sqrt{3}}$     7. 100

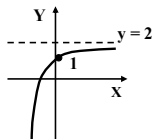
8.  $e^{-4} = \frac{1}{e^4}$     9.  $\frac{1}{81}$     10.  $\frac{1}{5}$     11.  $2^{14}$     12.  $\frac{1}{32}$     13. 2

14. 2    15. -4    16.  $\frac{5}{3}$     17.  $-\frac{7}{8}$     18.  $-\frac{1}{3}$     19. -1 ó 3

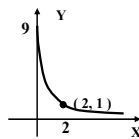
20.  $y = e^{x+2}$     21.  $y = -2e^x + 1$     22.  $y = e^{-x}$     23.  $y = e^{-x} + 2$



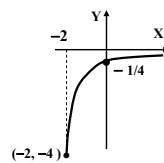
24.  $y = 2 - e^{-x}$



26.  $y = 3^{-x} + 2$



28.  $y = -4^{-x-1}$



29. 125/81    30. -1,590

## SECCION 4.7

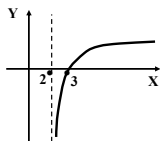
1. -6    2. 4    3. -4    4.  $-\frac{1}{2}$     5. 3    6. 9    7.  $\sqrt{3}$     8.  $\frac{8}{9}$     9. 625

10. 8, -2    11. 5    12.  $e^{-a/3}$     13.  $e^{-1+k/20}$     14.  $e^2$     15.  $e^{-4}$

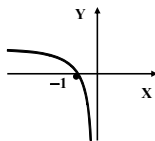
16.  $\frac{\ln(14/3)}{-1,2} \approx -1.2837$     17.  $1 + \frac{3}{\ln 3} \approx 3.73$     18.  $\frac{6}{(3 + \log_2 3)} \approx 1.3086$

19.  $\frac{8}{(4 \log_2 3 - 1)} \approx 1.498$

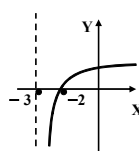
20.  $y = \ln(x - 2)$



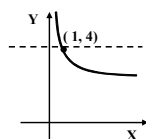
21.  $y = \ln(-x)$



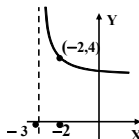
22.  $y = \ln(x + 3)$



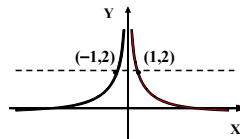
23.  $y = 4 - \ln x$



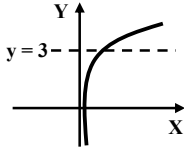
24.  $y = 4 - \ln(x+3)$



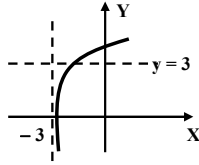
25.  $y = 2 - \ln|x|$



26.  $y = 3 + \log x$



27.  $y = 3 + \log(x+3)$



28.  $2 \log a + \log b - \log c$

29.  $\frac{1}{2} \log b - 2 \log a - 3 \log c$

30.  $-\ln a + \frac{3}{2} \ln c - \frac{1}{2} \ln b$

31.  $\frac{1}{5}(2 \ln a - \ln b - 4 \ln c)$

32.  $\ln \frac{x^3 y}{z^2}$

33.  $\log \frac{a^2 b}{(zx)^3}$

34.  $\ln \frac{\sqrt[4]{a^3} b^3}{\sqrt{c^3}}$

35. a.  $y = 5e^{(0.5 \ln 3)^t}$     b.  $y = 6e^{(\ln(1.04))^t}$

**SECCION 4.8**

1. a. 127,020    b. 5.127 %    2. a. \$. 15,809.88    b. 22.12 %  
 3. a. 18 millones    b. 24.3 millones    c. 2.02 %    4. 108,000    5. 6.75 millones  
 6. 6,351 gr    7. 280.93 gr    8. 64,000 millones    9. 1,476.28 libras/pie<sup>2</sup>  
 10. a. 81.87 %    b. 67.03 %    c. 14.84 %    11. a. 12 mil    b. 15,841    12. b. 980 mil  
     c. \$. 485,889.27    14. 3,924 años    15. 2.32 horas    16. 4 años  
 17. 29.54 meses    18. 2,554 libros    19. 81,666.666 millones  
 20. 29.5 años    21. 11,460 años    22. a. 11,700,000    b. 12,288,000  
     c. 12,886,396    d. 13,130,043    e. 13,130,043    23. a. 1,140,967.37  
     b. 1,123,322.4    24. 3,173,350,575 dólares    25. a. 4.792 años  
     b. 4.621 años    26. a. 7.595 años    b. 7.324 años

**CAPITULO 5**

**SECCION 5.1**

1. 10    2.  $\frac{1}{2}$     3. 0    4.  $\frac{2}{3}$     5. 6    6. -10    7.  $\frac{1}{4}$     8. 12    9. 9    10. 12    11.  $-\frac{7}{2}$   
 12. -1    13. 6    14. 32    15. 8    16.  $\frac{1}{3}$     17. 108    18.  $2\sqrt{2}$     19.  $\frac{1}{2\sqrt{3}}$     20.  $\frac{1}{4}$   
 21.  $\frac{1}{4}$     22. 0    23.  $-\frac{1}{56}$     24. 3    25.  $\frac{3}{2}$     26. 12    27.  $\frac{1}{3}$     28.  $\frac{2}{3}$     29.  $\frac{3}{2}$

30. 3    31.  $\frac{4}{3}$     32.  $\frac{m}{n}$     33.  $\frac{1}{2}$     34.  $\frac{3a^2}{a-1}$     35.  $\frac{(a-b)\sqrt{c+d}}{(c-d)\sqrt{a+b}}$     38. 0
39. 0    40. 1    41. 2    42. -3    43. -2    44. 0    45. 1    46. 0    47. 12
48. 13    49. 3    50. 3    51. 1    52. 0    53.  $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$     54.  $\frac{9}{2}\sqrt[6]{a^7}$
55. a. 5    b. 5    c. 5    56. a. 8    b. 8    c. 8    57. a. -4    b. no existe
58.  $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{si } x \leq 0 \\ \text{sen } \frac{\pi}{x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$
59. a.  $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ,  $g(x) = -\frac{x}{|x|}$  en  $a = 0$     b. Las mismas de (a)

## SECCION 5.3

1. -1    2.  $\frac{2}{3}$     3.  $\frac{1}{2}$     4. 0    5. 0    6. 0    7. 1    8.  $\frac{1}{2}$     9.  $\frac{1}{2}$
10.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$     11.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     12.  $\frac{\sqrt{2}}{8}$     13.  $\pi$     14.  $\frac{3}{4}$     15.  $\frac{1}{2}$     16. 0
17. 1    18.  $\frac{2\cos a}{\cos(a/2)}$     19.  $-2\text{sen } a$     20.  $\cos^3 a$     21.  $-\frac{1}{3}$     22. 3

## SECCION 5.4

2. 1/2    4. 0, esencial    5. -2, esencial    6. 2 y -2, esenciales    7. 5 esencial
8. 3 y -8, esenciales    9. 2, esencial    10. 3, esencial    11. 1 esencial    12. 3 y 5
13. 4    14. 2    15. -1, 2    16.  $a = 1$  y  $b = -1$     17.  $a = 9/\pi$  y  $b = -11/4$
18.  $a = -1$  y  $b = 1$     19.  $a = b$ ,  $b$  cualesquiera.    20.  $\left\{n + \frac{1}{2}, n \text{ un entero}\right\}$
21.  $\{4n, n \text{ un entero}\}$     22.  $[0, 1) \cup \mathbb{Z}$     23.  $\{0\}$     24.  $\mathbb{Z}$     25.  $\mathbb{R}$
26.  $[1.5, 1.6]$     27.  $[-2, -1.9]$     28.  $[0.9, 1]$

## SECCION 5.5

1. en 2:  $+\infty, -\infty$     2. en 2:  $+\infty, +\infty$     3. en -1:  $+\infty, +\infty$     4. en 4:  $+\infty, -\infty$
5. en 5:  $+\infty, -\infty$     6. en 0:  $+\infty, -\infty$ ; en -2:  $-\infty$ ;  $+\infty$
7. en 3:  $+\infty, -\infty$ ; en -1:  $+\infty, -\infty$     8. en -2:  $-\infty$ ;  $+\infty$ ; en 2:  $+\infty, -\infty$
9. en 0:  $-\infty$ ;  $+\infty$     10. 0    11.  $+\infty$     12.  $+\infty$     13.  $-\infty$     14.  $-\infty$     15.  $+\infty$
16.  $-\infty$     17.  $+\infty$     18.  $-\infty$     19.  $-\infty$     20.  $+\infty$     21. 1    22.  $-\frac{1}{2}$     23.  $-\infty$     24. 0

25. 2    26. 0    27.  $-\infty$     28.  $+\infty$     29.  $x=0$     30.  $x=\frac{1}{2}, x=-\frac{1}{2}$   
 31.  $x=1, x=-1$     32.  $x=1, x=-1$

**SECCION 5.6**

1. 0, 0    2. 0, 0    3. 1, 1    4.  $+\infty, -\infty$     5.  $1/2, 1/2$     6.  $+\infty, -\infty$   
 7.  $-\infty, -\infty$     8. 1, 1    9.  $+\infty, +\infty$     10.  $+\infty$     11.  $+\infty$     12. 1    13. 0,    14.  $+\infty$   
 15.  $-2$     16. 0    17.  $+\infty$     18.  $5/2$     19. 0    20. 2    21.  $-2$     22.  $1/2$   
 23. 0    24.  $1/2$     25. 0    26. 1    27.  $-1$     28. 1    29. 0    30. 0    31. 0  
 35.  $y=0$     36.  $y=0$     37.  $y=0$     38.  $y=2, y=-2$     39.  $y=1, y=-1$   
 40. No tiene    41.  $y=0$     42.  $x=-4, x=4, y=-2$     43.  $x=1, y=2, y=-2$   
 44.  $x=-\sqrt{2}, x=\sqrt{2}, y=1, y=-1$ .

**SECCION 5.7**

1.  $a$     2.  $\frac{1}{a}$     3.  $\frac{1}{e}$     4.  $e$     5.  $a-b$     6. 1

**SECCION 5.8**

1.  $y=x+1$     2.  $y=x$     3.  $y=\frac{x}{2}-1$     4.  $y=2x+2$     5.  $y=x, y=-x$   
 6.  $y=x, y=-x$     7.  $y=2x-2, y=-2$  (horizontal)    8.  $y=-x+2$

**CAPITULO 6**

**SECCION 6.1**

1.  $f'(1)=0$     2.  $g'(3)=1$     3.  $h'(2)=3$     4.  $f'(2)=4$     5.  $g'(-1)=-4$   
 6.  $h'(-2)=-\frac{3}{4}$     7.  $f'(-1)=-6$     8.  $g'(2)=\frac{3}{4}$     9.  $h'(-1)=3$     12.  $a=\frac{1}{3}, b=\frac{2}{3}$   
 13.  $f'(x)=0$     14.  $g'(x)=1$     15.  $h'(x)=3$     16.  $f'(x)=4$     17.  $g'(x)=4x$   
 18.  $h'(x)=-\frac{3}{x^2}$     19.  $f'(x)=6x$     20.  $g'(x)=1-\frac{1}{x^2}$     21.  $h'(x)=3x^2$   
 22. a.  $f'(1)=5$     b.  $5x-y-3=0$     c.  $x+5y-11=0$     23. a.  $g'(12)=\frac{1}{6}$   
       b.  $x-6y+6=0$     c.  $6x+y-75=0$     24. a.  $h'(x)=x-1$     b. (4, 11)  
       c.  $3x-y-1=0$     25. a.  $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$     b.  $2x-4y+5=0$

## SECCION 6.2

1.  $y' = 8x - 6$       2.  $y' = -\frac{1}{3} + x^5$       3.  $y' = 2x^3 - 0,6x + 2,5$
4.  $u' = 10v^9 - 6v^7 + 1,2v^2$       5.  $s' = -10t^{-6} + t^2 + 0,6t^{-3}$       6.  $z' = \frac{-1}{3y^2} + \frac{6}{y^3}$
7.  $f'(x) = \frac{5}{2}x^{-1/6} + \frac{8}{3}x^{-5/3}$       8.  $g'(x) = 5ax^4 + 4bx^{-5} + \frac{3}{2}cx^{1/2}$       9.  $y' = -\frac{4x^5}{a}$
10.  $z' = \frac{3x^2}{a+b} + \frac{5x^4}{a-b} - 1$       11.  $z' = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}bt$       12.  $y' = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^3}$
13.  $z' = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} + \frac{1}{3t\sqrt[3]{t}}$       14.  $u' = -\frac{\sqrt{3}}{4x\sqrt{x}} + \frac{10}{9x\sqrt[3]{x^2}}$       15.  $y' = -64x^7 - 14x^6 + 90x^5$
16.  $y' = (x^3 + 3x^2)e^x$       17.  $y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^x$       18.  $y' = ex^{e-1} + e^x$
19.  $y' = 3x^2 - 12x + 11$       20.  $72x^5 - 50x^4 - 32x^3 + 2x^2 + 10x + 4$
21.  $z' = \frac{1}{2\sqrt{t}}(21t^{10} - 13t^6 - 18t^4 + 2)$       22.  $y' = 1$       23.  $u' = 5x\sqrt{x} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}} - 2$
24.  $y' = \frac{-1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{6}{x^2}$       25.  $y' = -\frac{3}{(x-9)^2}$       26.  $y' = \frac{-8}{(x-8)^2}$
27.  $y' = \frac{-6}{(x-3)^2}$       28.  $z' = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$       29.  $u' = \frac{4t^3 - 6t^2 - 1}{(t-1)^2}$
30.  $y' = \frac{x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$       31.  $y' = \frac{ax^2 - c}{x^2}$       32.  $y' = \frac{3ax^2 + bx - c}{2x\sqrt{x}}$
33.  $y' = \frac{2ax}{\sqrt{a^2 + b^2}}$       34.  $y' = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} - 3x^2 + 2x + 1$       35.  $y' = \frac{-2(x-2)}{(x-1)^2(x-3)^2}$
36.  $y' = \frac{-3}{2\sqrt{x}(1+2\sqrt{x})^2}$       37.  $y' = \frac{-4}{3\sqrt[3]{x^2}(1+3\sqrt[3]{x})^2}$       38.  $y' = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$
39.  $x + y + 2 = 0$       40.  $8x + y - 4 = 0$       41.  $x - 2y + 2 = 0$
42.  $-4ax + y + 3a^2 = 0$       43.  $(1/3, -4/3)$       44.  $y = e$       45.  $y = e/2$
46.  $(2, -65/6), (-3, 10)$       47.  $3x + y + 4 = 0$       48.  $-x + 2y - 5 = 0$
49.  $y = 3x^2 - 12x$       50.  $y = -x^2 + 8x$       51.  $y = x^2 + 2x - 3.$

## SECCION 6.3

1.  $f'(x) = 5\cos x - 2\operatorname{sen} x$       2.  $g'(\theta) = \cot \theta - \theta \operatorname{cosec}^2 \theta$       3.  $y' = \operatorname{sen} \alpha (1 + \sec^2 \alpha)$
4.  $y' = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$       5.  $h'(t) = \frac{1}{1 + \cos t}$       6.  $f'(x) = \frac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{x^2 \cos^2 x}$

7.  $g'(x) = \frac{2\operatorname{sen} x}{(1 + \cos x)^2}$       8.  $y' = \frac{-2}{(\operatorname{sen} t - \cos t)^2}$       9.  $y' = \operatorname{sen} x + \cos x$   
 10 a.  $y - 3\sqrt{3}x + \sqrt{3}\pi - 1 = 0$       b.  $y + \frac{\sqrt{3}}{9}x - \frac{\sqrt{3}}{27}\pi - 1 = 0$

---

**SECCION 6.4**

1.  $y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^x$       2.  $y' = -2^{-x} \ln 2$       3.  $y' = ((\ln 2)x^2 + 2x)2^x$   
 4.  $y' = (-x^2 + 2x)e^{-x}$       5.  $y' = \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)e^x$       6.  $y' = \left(\frac{1}{x \ln 2} + \ln 2 \log_2 x\right)2^x$   
 7.  $y' = \frac{1 - x \ln x}{xe^x}$       8.  $y' = \frac{1 - (\ln 2)^2 x \log_2 x}{(\ln 2)x2^x}$       9.  $y' = \frac{2}{x(1 - \ln x)^2}$   
 10.  $y = e/2$       11.  $y - 2ex - e = 0$       12.  $(2 \ln 2)y + x - 4 = 0$

---

**SECCION 6.5**

1.  $\frac{dy}{dx} = 3(x^2 - 3x + 5)^2(2x - 3)$       2.  $f'(x) = -32(15 - 8x)^3$   
 3.  $g'(t) = -18t^2(2t^3 - 1)^{-4}$       4.  $\frac{dz}{dx} = -8(5x^5 - x^4)^{-9}(25x^4 - 4x^3)$   
 5.  $\frac{dy}{dx} = -32x(3x^2 - 8)^3(-4x^2 + 1)^3 + 18x(3x^2 - 8)^2(-4x^2 + 1)^4$   
 6.  $f'(u) = \frac{2u(u^3 - 3u - 1)}{(u^2 - 1)^2}$       7.  $\frac{dy}{dx} = \frac{8(x-1)}{(x+3)^3}$   
 8.  $g'(t) = \frac{-12t(3t^2 + 2)(t^3 + 2t + 1)}{(2t^3 - 1)^3}$       9.  $y' = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$       10.  $u' = \frac{1 - 4t - 24t^2}{2\sqrt{1+t-2t^2-8t^3}}$   
 11.  $h'(x) = \frac{2x^5}{\sqrt{x^4 - 1}} + 2x\sqrt{x^4 - 1}$       12.  $g'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}$   
 13.  $y' = \frac{2\sqrt{3x^2 - 1}}{3\sqrt{(2x+1)^2}} + \frac{3x\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{3x^2 - 1}}$       14.  $z' = -\frac{(1-3x^2)^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1})^3} - \frac{12x(1-3x^2)}{(\sqrt{x+1})^2}$   
 15.  $h'(t) = \frac{3-t}{2(1-t)^{3/2}}$       16.  $z' = \frac{-2t}{3(1+t^2)^{4/3}}$       17.  $z' = \frac{ax^2}{\sqrt[3]{(b+ax^3)^2}}$   
 18.  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(b^2 + x^2)^3}}$       19.  $y' = \frac{-1}{\sqrt{1+x}(1+\sqrt{1+x})^2}$   
 20.  $f'(x) = \frac{3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + ac + bc}{2\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}$       21.  $y' = \frac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}(x+\sqrt{x})^{2/3}}$

22.  $y' = \frac{1+2\sqrt{x}+2\sqrt{x+\sqrt{x}}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$
23.  $y' = 4\sec^2 4x$
24.  $y' = -\operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2}$       25.  $u' = -3x^2 \operatorname{sen}(x^3)$       26.  $v' = -3\operatorname{sen} x \cos^2 x$
27.  $y' = 4x^3 \sec^2(x^4) + 4 \tan^3 x \sec^2 x$       28.  $z' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{sen} \sqrt{x}$
29.  $u' = -\frac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}}$       30.  $y' = -\frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\cos \sqrt{x}}}$       31.  $y' = \frac{\sec^2 3x}{(\tan 3x)^{2/3}}$
32.  $y' = -\frac{2x \operatorname{cosec}^2(\sqrt[3]{1+x^2})}{3(1+x^2)^{2/3}}$       33.  $y' = -\frac{2 \tan x}{\sqrt{\sec x}}$       34.  $y' = \frac{2}{x^3} \operatorname{cosec} \frac{1}{x^2} \cot \frac{1}{x^2}$
35.  $y' = \frac{-3}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} \operatorname{sen}^2 \left[ \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right] \cos \left[ \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right]$       36.  $y' = \frac{2 \sec^2 x}{(\sec^2 x + 1)^{3/2}}$
37.  $y' = \frac{\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)^2} \sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}}$       38.  $y' = \frac{(1-x^2) \cos^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)}{2x^2 \sqrt{1 + \cot \left(x + \frac{1}{x}\right)}}$
39.  $y' = \frac{-\operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2}}{2\left(1 - \cot^2 \frac{x}{2}\right)^{3/2}}$       40.  $y' = \frac{(a-b) \operatorname{sen} 2x}{2\sqrt{a \operatorname{sen}^2 x + b \cos^2 x}}$
41.  $y' = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\cos x)$       42.  $y' = -2x \operatorname{sen} x^2 \cos(\cos x^2)$
43.  $y' = -4 \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen}(2 \cos 4x)$       44.  $y' = \cos x \cos(\operatorname{sen} x) \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$
45.  $y' = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(2 \cos x) + \cos x \operatorname{sen}(2 \operatorname{sen} x)$
46.  $y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \sec^2 \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos(\tan \sqrt{\operatorname{sen} x})$       47.  $y' = \operatorname{sen} 2x \sec^2(\operatorname{sen}^2 x)$
48.  $y' = -6xe^{-3x^2+1}$       49.  $y' = \frac{\ln 2}{2\sqrt{x}} 2^{\sqrt{x}}$       50.  $y' = x^{n-1} a^{-x^2} (n - 2x^2 \ln a)$
51.  $y' = \frac{\ln 3}{t^2} \operatorname{cosec}^2(1/t) 3^{\cot(1/t)}$       52.  $y' = (\ln 2)(\ln 3) \operatorname{sen} 2x 3^{\operatorname{sen}^2 x} 2^{3^{\operatorname{sen}^2 x}}$
53.  $y' = \frac{1}{2(\ln 5) x \sqrt{\log_5 x}}$       54.  $y' = \frac{1}{x} - 1$       55.  $y' = \frac{1-2t \ln t}{te^{2t}}$
56.  $y' = \frac{8e^{4x}}{e^{8x}-1}$       57.  $y' = e^{x \ln x} (1 + \ln x)$       58.  $y' = \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)}$
59.  $y' = -\frac{6}{5(x^2-1)}$       60.  $y' = \frac{3}{x} + \cot x$       61.  $y' = -\frac{1}{x^2} \tan \frac{x-1}{x}$

62.  $G'(2) = 20$       63.  $F'(0) = -30$       64.  $(f \circ g)'(x) = -\frac{3(3x^2 + 10x + 3)}{2(x+1)^4}$
65.  $h'(x) = [3u^2 - 4u](2) = 6(2x-1)^2 - 8(2x-1) = 24x^2 - 40x + 14$
66.  $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{v}}(6x^2) = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 - 4}}$       67.  $h'(x) = 5t^4 \left( -\frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{-5(1 - 2\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}}$
68.  $h'(x) = \frac{-2bc}{(b+cx)^2}$       69.  $h'(x) = \left( -\frac{1}{v^2} \right) \left( \frac{-ax}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) = \frac{x}{a(a^2 - x^2)^{3/2}}$
70.  $\frac{dy}{dx} = (9u^2 - 16u^3)(2x) = 18x(x^2 - 1)^2 - 32x(x^2 - 1)^3$
71.  $\frac{dy}{dx} = 5v^4(2b) = 10b(3a + 2bx)^4$       72.  $\frac{dy}{dx} = 4t^3 \left( \frac{a}{c} \right) = \frac{4a(ax+b)^3}{c^4}$
73.  $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2v^{3/2}}(6x) = \frac{-3x}{(3x^2 - 1)^{3/2}}$
74.  $12x + y + 11 = 0, x - 12y + 13 = 0$       75.  $y = \frac{3}{4}, x = 0$
76.  $7x - 18y - 13 = 0, 54x + 21y - 47 = 0$       77.  $x - 12y - 17 = 0, 12x + y + 86 = 0$
78.  $8x - y - 3 = 0, 2x + 16y - 17 = 0$       79.  $y + 4x - 1 - \pi = 0, 16y - 4x + \pi - 16 = 0$
80.  $y - 12x + 17 = 0, 12y + x - 86 = 0$
81.  $6y + 15x - 5\pi + 3\sqrt{3} = 0, 30y - 12x + 4\pi + 15\sqrt{3} = 0$
82. En (1, 0):  $y - 2x + 2 = 0$ . En (2, 0):  $y + x - 2 = 0$ . En (3, 0):  $y - 2x + 6 = 0$
83. (0, 0), (4, 0) y (2, 16)      84.  $2y - x - 4 = 0, 2y - x + 4 = 0$ . Son paralelas.
85.  $y + x = 0, 9y + x = 0$       86.  $y - 5x + 2 = 0$       87.  $2y - x - 2 \ln 2 = 0$

## CAPITULO 7

### SECCION 7.1

1.  $\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{2}$       2.  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x}$       3.  $\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}$       4.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 2xy^2 - 3y^2}{6xy - 2x^2y}$
5.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + 2x^2}{2x^2y}$       6.  $\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2 - y)y^2}{1 + xy^2}$       7.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 - 2xy^2}{y^3 - 3xy^2 + 2x^2y - 1}$
8.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 3x(x - y)^2$       9.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$       10.  $\frac{dy}{dx} = \frac{-b^2x}{a^2y}$       11.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

12.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x-ay}{ax-y}$     13.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$     14.  $\frac{dy}{dx} = \frac{6\sqrt{y}\sqrt[3]{y^2}}{2\sqrt{y}+3\sqrt[3]{y^2}}$     15.  $\frac{dy}{dx} = -1$
16.  $y' = \frac{y}{\sec^2 y - x} = \frac{y \cos^2 y}{1 - x \cos^2 y}$     17.  $y' = -\frac{y}{x}$     18.  $y' = \frac{\sin(x-y) + y \cos x}{\sin(x-y) - \sin x}$
19.  $y' = \frac{e^y}{1 - xe^y} = \frac{e^y}{2-y}$     20.  $y' = \frac{e^{x+1}}{e^y + ye^y} = \frac{1}{1+y} e^{x-y+1}$
21.  $y' = 2^{x-y} \frac{2^y - 1}{1 - 2^x}$     22.  $y' = \frac{1}{2(1 + \ln y)}$     23.  $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$
24. b.  $(f^{-1})'(3) = -\frac{1}{4}$     c.  $y + 4x = 7$     d.  $4y + x = 7$
25. b.  $(g^{-1})'(2) = \frac{1}{10}$     c.  $y - 10x = -8$     d.  $10y - x = 8$
26. b.  $(h^{-1})'(0) = 1$     c.  $y = x$     d.  $y = x$     27.  $x - y + 5 = 0$
28.  $5x - 6y + 9 = 0$     29.  $y - x = 0$     30.  $14x + 13y - 12 = 0$
31.  $9x + 20\sqrt{3}y - 75 = 0$ .  $-9x + 20\sqrt{3}y + 75 = 0$
32.  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$  en  $(a, b)$     y     $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2$  en  $(a, -b)$     33.  $9x + 13y - 40 = 0$
37.  $45^\circ$  en  $(1, 2)$  y en  $(3, -2)$     38.  $0^\circ$  en  $(0, 0)$  y  $9^\circ$  2' en  $(1, 1)$ .

## SECCION 7.2

1.  $y' = x^{x^3+2}(1+3\ln x)$     2.  $y' = \frac{1}{2}x^{\sqrt{x}-1/2}(2+\ln x)$
3.  $y' = 2 \ln x \cdot x^{\ln x - 1}$     4.  $y' = \frac{1}{x}(\ln x)^{\ln x}(1+\ln(\ln x))$
5.  $y' = (\ln 2)(\ln 3)3^x 2^{3^x}$     6.  $y' = a^x x^a \left( \frac{a}{x} + \ln a \right)$
7.  $y' = \sqrt{x} \left( \frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$     8.  $y' = (x^2 + 1)^{\sin x} \left( \frac{2x \sin x}{x^2 + 1} + \cos x \ln(x^2 + 1) \right)$
9.  $y' = (\sin x)^{\cos x} \left( \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x \right)$
10.  $y' = \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \left( \ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$     11.  $y' = \frac{x(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}} \left( \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{x}{x^2+1} \right)$
12.  $y' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x(x^2-1)}{(x+1)^2}} \left( \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right)$

**SECCION 7.3**

1.  $y' = \frac{1}{\sqrt{81-x^2}}$       2.  $y' = \frac{3}{x\sqrt{x^2-9}}$       3.  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$   
 4.  $y' = \frac{2x}{x^4+2x^2+2}$       5.  $y' = -\frac{1}{1+x^2}$       6.  $y' = 2\sqrt{4-x^2}$   
 7.  $y' = \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x}$       8.  $y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x}}$       9.  $y' = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$   
 10.  $y' = -\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$       11.  $y' = 0$       12.  $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sec^2(\cos^{-1} x)$   
 13.  $y' = \frac{4-x}{\sqrt{4x-x^2}}$       14.  $y' = (x+y)^2$       15.  $y' = \frac{y}{x} \left( \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \right)$   
 16.  $12y + 2x - 6 - 3\pi = 0$       17.  $4y + 8x - 3\pi = 0$

**SECCION 7.4**

1.  $y'' = \frac{-b^2}{(b^2-x^2)^{3/2}}$       2.  $y'' = \frac{2(1-x^2)}{3(1+x^2)^2}$       3.  $y'' = 2 \tan^{-1} x + \frac{2x}{1+x^2}$   
 4.  $y'' = -\frac{x}{1-x^2} - \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{(1-x^2)^{3/2}}$       5.  $y'' = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^{3/2}} \right) e^{\sqrt{x}}$   
 6.  $y'' = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2x \operatorname{sen}^{-1} x}{(1-x^2)^{3/2}}$       7.  $y'' = 20x^3 - 24x$ ,  $y''' = 60x^2 - 24$   
 8.  $z'' = 14x^6 - 10x^4 - 1$ ,  $z''' = 84x^5 - 40x^3$   
 9.  $f'''(x) = 12(x-1)^2$ ,  $f''''(x) = 24(x-1)$   
 10.  $g''(x) = 6(x^2+1)^2 + 24x^2(x^2+1)$ ,  $g'''(x) = 120x^3 + 72x$   
 11.  $y'' = \frac{-1}{4x^{3/2}}$ ,  $y''' = \frac{3}{8x^{5/2}}$       12.  $h''(x) = \frac{-4}{(2+x)^3}$ ,  $h'''(x) = \frac{12}{(2+x)^4}$   
 13.  $y'' = -x \operatorname{sen} x + 2 \cos x$ ,  $y''' = -x \cos x - 3 \operatorname{sen} x$   
 14.  $y'' = (4x^3 + 12x^2 + 6x)e^{2x}$ ,  $y''' = (8x^3 + 36x^2 + 36x + 6)e^{2x}$   
 15.  $y'' = \frac{2}{x^3}$       16.  $y'' = \frac{-4a^2}{y^3} = \frac{-a}{xy}$       17.  $y'' = -\frac{2x^4 + 2xy^3}{y^5} = -\frac{2x}{y^5}$   
 18.  $y'' = \frac{-2x^2}{9y^5} = \frac{-2}{9x^{4/3}}$       19.  $y'' = \frac{1}{2x^{3/2}}$       20.  $y'' = \frac{-b^4}{a^2 y^3}$   
 24.  $y^{(n)} = n!$       25.  $y^{(n)} = 0$       26.  $y^{(n)} = (n+1)!x$       27.  $y^{(n)} = n!a$

28.  $y^{(n)} = n!a_n$    29.  $y^{(n)} = n!a^n$    30.  $y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$    31.  $y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$
32.  $y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x-a)^{n+1}}$    33.  $y^{(n)} = a^n \cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)$
34.  $y^{(n)} = 2^{n-1} \text{sen}\left[2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]$    35.  $y^{(n)} = a^n e^{ax}$    36.  $y^{(n)} = (x+n)e^x$
37.  $y^{(n)} = (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}, n \geq 2$    38.  $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$    39.  $y''(1) = 40$
40.  $y''(-1) = -\frac{11}{8}$    41.  $y''(1) = \frac{1}{2}$    42.  $y''(2) = -\frac{3}{2}$
43. a. en  $t = -2$  y  $t = 4$    b. en  $t = 1$    c.  $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$    d.  $(-2, 4)$
44. a. en  $t = 3$    b. en  $t = -3\sqrt[3]{2}$    c.  $(3, +\infty)$    d.  $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$
45.  $a(-5) = -\frac{2}{3}$  m/seg<sup>2</sup>,  $a(1) = \frac{2}{3}$  m/seg<sup>2</sup>   46.  $a(1/2) = 2$  m/seg<sup>2</sup>
47.  $v(1) = -27$  m/seg   48. a. 160 pies   b. 48 pies/seg   c.  $t = 1.5$  seg.  
d.  $t = 5$  seg.   e.  $v(5) = -112$  pies/seg.   50.  $v_0 = 117.6$  m/seg.   51. 156.8 m.

## SECCION 7.5

1.  $y' = -\text{cosech } x$    2.  $y' = 2\cosh 2x e^{\text{senh } 2x}$
3.  $y' = x^{\tanh x} \left( \frac{\tanh x}{x} + \text{sech}^2 x \ln x \right)$    4.  $y' = \frac{1}{4} \text{sech}^4 \frac{x}{2}$
5.  $y' = e^{ax} [a \cosh bx + b \text{senh } bx]$
6.  $y' = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}} = \frac{1}{2\sqrt{\cosh x + \text{senh } x}}$    7.  $y' = \frac{-2 \text{cosech}^{-1} x}{|x| \sqrt{1+x^2}}$
8.  $y' = \frac{2x}{\sqrt{x^4 + a^4}}$    9.  $y' = -\text{cosec } x$    10.  $y' = \frac{2}{1-x^4}$

## SECCION 7.6

1. 2,100,000 litros/año   2. a. 200 habitantes por año   b. 2%   3.  $3\pi$  m<sup>2</sup>/seg
4. 1.5 m/min   5. -4.5 m/min   6. -2.8 Km/h   7. 16 m/min
8. 80 pies/min   9.  $(-1, -5)$    10.  $100\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>/min   11. -15 cm/seg
12.  $-\frac{10}{\pi}$  pies/min, -240 pies<sup>2</sup>/min   14.  $-\frac{7}{2}$  m/min   15.  $-\frac{80}{3}$  m/seg
16.  $\frac{1}{3\pi}$  m/min   17. 3 m./hora   18.  $\frac{8}{75}$  m./h   19. -0.9 m/h

20.  $-\frac{17}{\sqrt{10}} \approx -5.38$  pies/seg    21.  $\frac{125\pi}{9} \approx 43.63$  m/h    22.  $\frac{6.600}{\sqrt{124}} \approx 592.7$  Km/h  
 23. 2.33 m/seg    24.  $10\pi$  Km/min    25. -1,200 pies/seg  
 26. 64 pies/seg    27.  $\frac{10.7}{49} \approx 0.218$  ohms/seg    28. b. 2 horas.
- 

### SECCION 7.7

1. a.  $\Delta y = 2xdx + (dx)^2$     b.  $dy = 2xdx$     c.  $(dx)^2$   
 2. a.  $\Delta y = e^x(e^{\Delta x} - 1)$     b.  $dy = e^x dx$     c.  $e^x(e^{\Delta x} - 1 - dx)$   
 3. a.  $\Delta y = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$     b.  $dy = \frac{dx}{x}$     c.  $\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) - \frac{dx}{x}$   
 4. a. -0.1791    b. -0.18    c. 0.0009  
 5. a. -0.2276278    b. -0.2302585    c. 0.0026307  
 10.  $dy = -6xe^{-3x^2} dx$     11.  $dy = -\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$     12.  $dy = \frac{2 dx}{3(x+1)^{4/3}(x-1)^{2/3}}$   
 13.  $dy = -\frac{x}{y} dx$     14.  $dy = \frac{2x + \sqrt{y/x}}{2y - \sqrt{x/y}} dx$     15.  $dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{x}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{x}\right) dx$   
 17. 8.9444    18. 3.0092592    19. 6.0185    20. 2.005    21.  $\frac{\pi}{4} + 0.04 \approx 0.8254$   
 22. 0.07    23. 0.24    24. 0.86618    25. a. 86.4 cm    b.  $87.848 \text{ cm}^3$   
 c.  $28.8 \text{ cm}^2$     d.  $29.04 \text{ cm}^2$     26.  $3,840 \pi \approx 12,063.71 \text{ cm}^3$     27. 2.5 %  
 28. a.  $0.64\pi m^3$     b. 0.75 %    29. a.  $72/\pi \approx 22.92 \text{ cm}^2$     b.  $1/72 \approx 0.01389$   
 c.  $1296/\pi^2 \approx 131.312$     d.  $1/48 \approx 0.0208$     30. a.  $\pi/18 \approx 0.174533$     b. 0.504 %  
 31. a. \$ 27,200    b. \$ 432    c. 0.0159    d. 1.59 %
- 

## CAPITULO 8

### SECCION 8.1

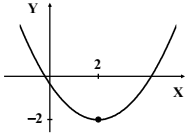
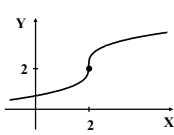
1. máx. =  $f(0) = 4$ , mín. no tiene    2. máx. no tiene, mín. =  $g(2) = -1$   
 3. máx. no tiene, mín. =  $h(2) = h(-2) = 0$     4. máx. no tiene, mín. no tiene  
 5. máx. no tiene, mín. no tiene    6. máx. =  $g(4/3) = 3$ , mín. =  $g(3) = 1/2$   
 7. máx. =  $h(-4) = 6$ , mín. =  $\ln 1 = 0$     8. máx. =  $f(1) = 3$ , mín. =  $f(2) = 0$   
 9. 0, 2,  $\frac{8}{3}$     10.  $\pi + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$     11. 0, 2    12. Todos los reales.

13. 1      14.  $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$       15. máx.  $= f(3) = \frac{3}{4}$ , mín.  $= f(1) = \frac{1}{2}$
16. máx.  $= f(1) = \frac{1}{2}$ , mín.  $= f(-1) = -\frac{1}{2}$       17. máx.  $= f(\pi/4) = 1 - \frac{\pi}{4}$ ,  
 mín.  $= f(-\pi/4) = \frac{\pi}{4} - 1$       18. máx.  $= f(3) = 1$ , mín.  $= f(-5) = -3$
19. máx.  $= f(\pi/4) = \sqrt{2}$ , mín.  $= f(-\pi/2) = -1$       20. máx.  $= f(\pi/6) = f(5\pi/6) = 5/4$   
 mín.  $= f(0) = f(\pi/6) = 1$       21. máx.  $= f(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{e^{\pi/4}} \approx 0.6447865$   
 mín.  $= f(5\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{e^{5\pi/4}} \approx -0.22489$       22. máx.  $= f(e^{1/2}) = \frac{1}{2e} \approx 0.184$   
 mín.  $= f(1) = 0$

## SECCION 8.2

1.  $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$     2.  $c_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $c_2 = \frac{5\pi}{4}$     3.  $c = 3.2$     4.  $c = 1$     5.  $c = -\frac{\sqrt{2}}{2}$     6.  $c = \sqrt{2}$
7.  $c = 1 + \frac{8}{9}\sqrt{3}$     8.  $c = \frac{1 - \sqrt{1 - \ln^2 2}}{\ln 2} \approx 0.4028$     9.  $c = \tan^{-1}((3 \ln 2)/\pi) \approx 0.6619$
10.  $c_1 = -\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} \approx -0.5227$ ,  $c_2 = \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} \approx 0.5227$       20.  $g(5) = 20$
30.  $c = \pi/4$       31.  $c = \frac{e}{e-1} \approx 1.58198$       32.  $c = 1/2$

## SECCION 8.3

1. 
2. 
3. a.  $-1, 0, 2, 4$     b. Decreciente:  $(-\infty, -1]$ ,  $[0, 2]$  y  $[2, 4]$ . Creciente:  $[-1, 0]$  y  $(4, +\infty)$     c. Mínimos locales en  $-1$  y  $4$ . Máximo local en  $0$
4. a.  $1, 2$  y  $3$     b. Cóncava hacia arriba en  $(-\infty, 1)$  y  $(3, +\infty)$ . Cóncava hacia abajo en  $(1, 2)$  y  $(2, 3)$     c.  $1$  y  $3$ .
5. a.  $-2$     b. Creciente en  $(-\infty, -2]$ , decreciente en  $[-2, +\infty)$     c.  $f(-2) = 11$  es máximo local. d. No tiene    e. Cóncava hacia abajo en  $(-\infty, +\infty)$     f. No tiene.
6. a.  $-1, 1$     b. Creciente en  $(-\infty, -1]$  y en  $[1, +\infty)$ , decreciente en  $[-1, 1]$   
 c.  $f(-1) = 3$  es máximo local y  $f(1) = -1$  es mínimo local    d.  $0$     e. Cóncava hacia abajo en  $(-\infty, 0)$  y cóncava hacia arriba en  $(0, +\infty)$     f.  $(0, f(0)) = (0, 1)$

7. **a.**  $-3, 1$  **b.** Creciente en  $(-\infty, -3]$  y en  $[1, +\infty)$ , decreciente en  $[-3, 1]$  **c.**  $f(-3) = 39$  es máximo local y  $f(1) = 7$  es mínimo local. **d.**  $-1$  **e.** Cóncava hacia arriba en  $(-\infty, -1)$ , cóncava hacia abajo en  $(-1, +\infty)$  **f.**  $(-1, f(-1)) = (-1, 23)$

8. **a.**  $-1, 0, 1$  **b.** Creciente en  $[-1, 0]$  y en  $[1, +\infty)$ , decreciendo en  $(-\infty, -1]$  y en  $[0, 1]$  **c.**  $f(-1) = 3$  y  $f(1) = 3$  son mínimos locales,  $f(0) = 4$  máximo local **d.**  $-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3$  **e.** Cóncava hacia arriba en  $(-\infty, -\sqrt{3}/3)$  y en  $(\sqrt{3}/3, +\infty)$ , Cóncava hacia abajo en  $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$  **f.**  $(-\sqrt{3}/3, 31/9)$  y  $(\sqrt{3}/3, 31/9)$

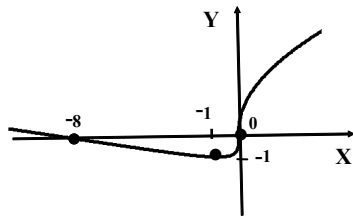
9. **a.**  $-2, -1/2, 1$  **b.** Creciente en  $[-2, -1/2]$  y en  $[1, +\infty)$ , decreciente en  $(-\infty, -2)$  y en  $[-1/2, 1]$  **c.**  $h(-2) = -3$  y  $h(1) = -3$  son mínimos locales,  $h(-1/2) = 33/16$  máximo local **d.**  $-1/2 - \sqrt{3}/2, -1/2 + \sqrt{3}/2$  **e.** Cóncava hacia arriba en  $(-\infty, -1/2 - \sqrt{3}/2)$  y en  $(-1/2 + \sqrt{3}/2, +\infty)$ , cóncava hacia abajo en  $(-1/2 - \sqrt{3}/2, -1/2 + \sqrt{3}/2)$

**f.**  $(-1/2 - \sqrt{3}/2, h(-1/2 - \sqrt{3}/2)) \approx (-1/2 - \sqrt{3}/2, -0.73)$  y  $(-1/2 + \sqrt{3}/2, h(-1/2 + \sqrt{3}/2)) \approx (-1/2 + \sqrt{3}/2, -0.73)$

10. **a.** No tiene **b.** Decreciente en  $(-\infty, 2)$  y en  $(2, +\infty)$  **c.** No tiene **d.** No tiene **e.** Cóncava hacia abajo en  $(-\infty, 2)$ , cóncava hacia arriba en  $(2, +\infty)$  **f.** No tiene

11. **a.** 2 **b.** Creciente en  $[2, +\infty)$ , decreciente en  $[0, 2]$  **c.**  $f(2) = -4\sqrt{2}$  mínimo local **d.** No tiene **e.** Cóncava hacia arriba en  $(0, +\infty)$  **f.** No tiene

12. **a.**  $-1, 0$  **b.** Creciente  $[-1, +\infty)$  **c.**  $f(-1) = -1$  es mínimo local **d.**  $0, -8$  **e.** Cóncava hacia abajo en  $(-\infty, -8)$  y en  $(0, +\infty)$ , cóncava hacia arriba en  $(-8, 0)$



**f.**  $(-8, f(-8)) = (-8, 0)$  y  $(0, f(0)) = (0, 0)$

13. **a.** 0 **b.** Creciente en  $(-\infty, +\infty)$  **c.** No tiene **d.** 0 **e.** Cóncava hacia abajo en  $(-\infty, 0)$ , cóncava hacia arriba en  $(0, +\infty)$  **f.**  $(0, 0)$

14. **a.** 1 **b.** Decreciente en  $(0, 1]$  y creciente en  $[1, +\infty)$  **c.**  $h(1) = 1$  es mínimo local **d.** No tiene **e.** Cóncava hacia arriba en  $(0, +\infty)$  **f.** No tiene

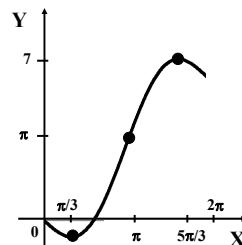
15. **a.** No tiene **b.** Creciente en  $(-\infty, +\infty)$  **c.** No tiene **d.** 0 **e.** Cóncava hacia abajo en  $(-\infty, 0)$  y cóncava hacia arriba en  $(0, +\infty)$  **f.**  $(0, 0)$ .

16. **a.**  $\pi/3, 5\pi/3$  **b.** Decreciente en  $[0, \pi/3]$  y en  $[5\pi/3, 2\pi]$ , decreciente en  $[\pi/3, 5\pi/3]$

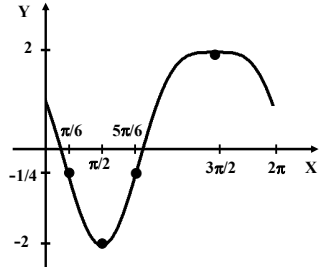
**c.**  $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3} \approx -0.7$  es mínimo local,  $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3} \approx 7$  es máximo local

**d.**  $\pi$  **e.** Cóncava hacia arriba en  $(0, \pi)$ . Cóncava hacia abajo en  $(\pi, 2\pi)$

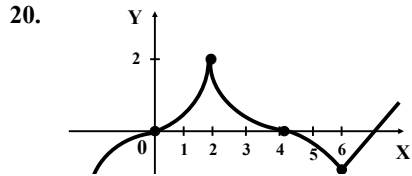
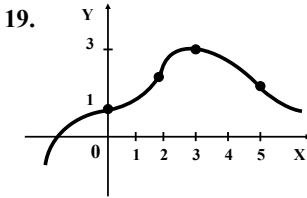
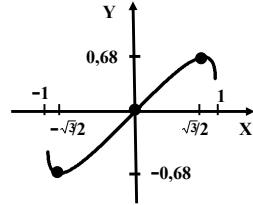
**f.**  $(\pi, f(\pi)) = (\pi, \pi)$ .



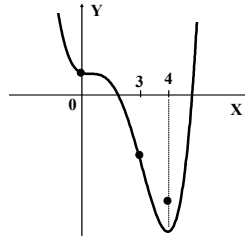
17. **a.**  $\pi/2, 3\pi/2$  **b.** Decreciente en  $[0, \pi/2]$  y en  $[3\pi/2, 2\pi]$  **c.**  $g(\pi/2) = -2$  es mínimo local,  $g(3\pi/2) = 2$  es máximo local **d.**  $\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2$  **e.** Cóncava hacia abajo en  $(0, \pi/6)$ ,  $(5\pi/6, 3\pi/2)$  y en  $(3\pi/2, 2\pi)$ , cóncava hacia arriba en  $(\pi/6, 5\pi/6)$  **f.**  $(\pi/6, g(\pi/6)) = (\pi/6, -1/4)$ ,  $(5\pi/6, g(5\pi/6)) = (\pi/6, -1/4)$



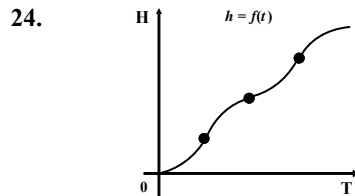
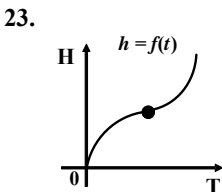
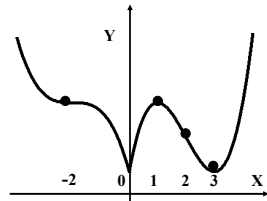
18. **a.**  $-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2$  **b.** Decreciente en  $[-1, -\sqrt{3}/2]$  y en  $[\sqrt{3}/2, 1]$ , creciente en  $[-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2]$  **c.**  $h(-\sqrt{3}/2) = -0.68$  es mínimo local,  $h(\sqrt{3}/2) = 0.68$  es máximo local, **d.** 0 **e.** Cóncavo hacia arriba en  $(-1, 0)$  y cóncavo hacia abajo en  $(0, 1)$  **f.**  $(0, 0)$



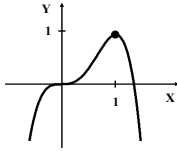
21. **a.** 0 y 4 **b.** Decreciente en  $(-\infty, 0]$  y en  $[0, 4]$  Creciente en  $[4, +\infty)$  **c.** Mínimo local en 4. **d.** 0 y 3 **e.** Cóncava hacia arriba en  $(-\infty, 0)$  y  $(3, +\infty)$  Cóncava hacia abajo en  $(0, 3)$  **f.** 0 y 3



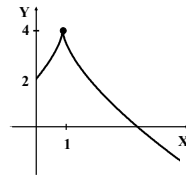
22. **a.** -2, 0, 1 y 3 **b.** Decreciente en  $(-\infty, -2]$ ,  $[-2, 0]$  y  $[1, 3]$  Creciente en  $[0, 1]$  y  $[3, +\infty)$  **c.** Mínimo local en 0 y 3. Máximo local en 1 **d.** -2, 0 y 2 **e.** Cóncava hacia arriba en  $(-\infty, -2)$  y  $(2, +\infty)$  Cóncava hacia abajo en  $(-2, 0)$  y  $(0, 2)$  **f.** -2 y 2



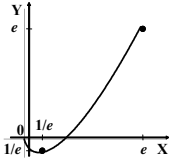
25. Max:  $f(1) = 1$ . Min: No tiene



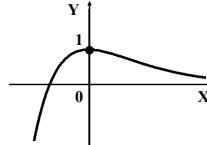
26. Max:  $f(1) = 4$ . Min: No tiene



27. Max:  $f(e) = e$ . Min:  $f(1/e) = 1/e$



28. Max:  $f(1) = 4$ . Min: No

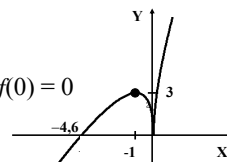
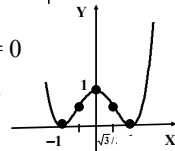
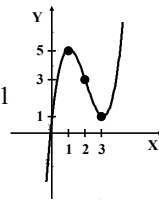


SECCION 8.4

1. 0   2.  $-1/2$    3.  $-1$    4.  $1/2$    5.  $1/2$    6. 2   7.  $\pi^2/2$    8. 2   9. 0  
 10. 1   11.  $\frac{\ln^2 10 - \ln^2 5}{2}$    12. 0   13. 1   14.  $\frac{1}{2}$    15.  $-\frac{1}{4}$    16.  $\frac{1}{12}$   
 17.  $\frac{1}{2}$    18.  $-1$    19.  $\frac{1}{2}$    20.  $\frac{1}{3}$    21.  $\frac{1}{6}$    22. 0   23. 1   24.  $\frac{2}{\pi}$   
 25.  $-\frac{4a^2}{\pi}$    26. 1   27. 1   28.  $\frac{1}{e}$    29.  $e^{-2}$    30. 1   31. 1   32. 1  
 33. 1   34.  $1/e$    35. 1   36.  $2/3$    37.  $+\infty$    38.  $e^2$    39.  $1/2$    40.  $e^2$   
 41. 0   42.  $-8$    43. 0

SECCION 8.5

1. A.  $\mathbb{R}$    B. Ninguna  
 C. Eje Y: (0,1). Eje X: aproximadamente  $(-0.104, 0)$   
 D. No asíntotas   E. max local =  $f(1) = 5$ , min local =  $f(3) = 1$   
 F. Conc. abajo en  $(-\infty, 2]$ , Conc. arriba en  $[2, +\infty)$ ,  
 Punto de inflexión: (2, 3)
2. A.  $\mathbb{R}$    B. Ninguna   C. (0,1), (-1, 0), (1, 0)  
 D. No asíntotas   E. max local =  $f(0) = 1$ , min local =  $f(-1) = 0$   
 min local =  $f(1) = 0$    E. Conc. arriba en  $(-\infty, -\sqrt{3}/3]$  y en  
 $[\sqrt{3}/3, +\infty)$ . Conc. abajo en  $[-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$ .  
 Punto de inflexión:  $(-\sqrt{3}/3, 4/9)$  y  $(\sqrt{3}/3, 4/9)$
3. A.  $\mathbb{R}$    B. Ninguna   C. (0,0), (-4.6, 0), (0, 0)  
 D. No asíntotas   E. max local =  $f(-1) = 3$ , min local =  $f(0) = 0$   
 F. Conc. abajo en  $(-\infty, 0]$  y en  $[0, +\infty)$ .



Punto de inflexión: No hay.

4. A.  $\mathbb{R}$  B. Simetría resp. al origen C. (0,0)

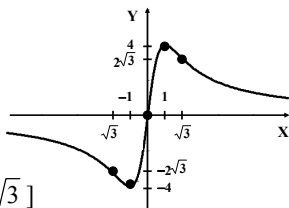
D. Asíntotas:  $y = 0$  E.  $f'(x) = -\frac{8(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

Min local =  $f(-1) = -4$ , Max local =  $f(1) = 4$

E.  $f''(x) = \frac{16(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$ . Conc. abajo en  $(-\infty, -\sqrt{3}]$

y en  $[0, \sqrt{3}]$ . Conc. arriba en  $[-\sqrt{3}, 0]$  y en  $[\sqrt{3}, +\infty)$ .

Punto de inflexión:  $(-\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ , (0, 0),  $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$



5. A.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

- B. Ninguna simetría C. Intersección con los ejes (0, 0)

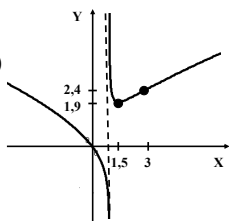
- D. Continua en  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Asíntota vertical:  $x = 1$

E.  $f'(x) = \frac{2x-3}{3(x-1)^{4/3}}$  Min. local:  $f(3/2) = 3\sqrt[3]{4} \approx 1.9$

F.  $f''(x) = \frac{2(3-x)}{9(x-1)^{7/3}}$ . Conc. abajo en  $(-\infty, 1)$  y en  $[3, +\infty)$ .

Conc. arriba en  $(1, 3]$ . Punto de inflexión:  $(3, 3\sqrt[3]{2}) \approx (3, 2.4)$



6. A.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  B. Simetría respecto al eje Y.

- C. Intersección con los ejes: (0, 0)

- D. Continua en todo  $\mathbb{R}$ .

No hay asíntotas verticales.

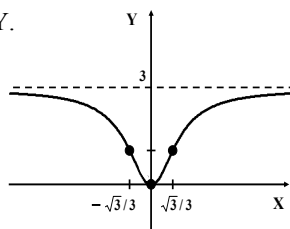
Asíntota horizontal:  $y = 3$

E.  $f'(x) = \frac{6x}{(x^2+1)^2}$ . Min local =  $f(0) = 0$ .

F.  $f''(x) = \frac{6(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$ . Conc. abajo en  $(-\infty, -\sqrt{3}/3)$  y en  $(\sqrt{3}/3, +\infty)$

Conc. arriba en  $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$

P. de inflexión:  $(-\sqrt{3}/3, 3/4)$  y  $(\sqrt{3}/3, 3/4)$



7. A.  $\text{Dom}(f) = [-\pi, \pi]$  B. Ninguna simetría.

- C. Intersecciones: Eje Y: (0,  $\pi$ ).

Eje X:  $(-\pi/3, 0)$ ,  $(2\pi/3, 0)$

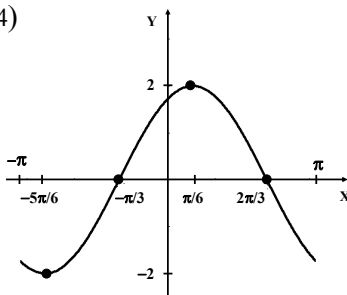
- D. Continua en  $[-\pi, \pi]$ . Sin asíntotas.

E. Min local =  $f(-5\pi/6) = -2$ .

Max local =  $f(\pi/6) = 2$

- F. Conc. arriba en  $[-\pi, -\pi/3]$  y  $[2\pi/3, \pi]$

Conc. abajo en  $[-\pi/3, 2\pi/3]$



P. de inflexión:  $(-\pi/3, 0)$  y  $(2\pi/3, 0)$

8. **A.**  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ . **B.** Ninguna simetría

**C.** Intersecciones: Eje Y:  $(0, -3)$ .

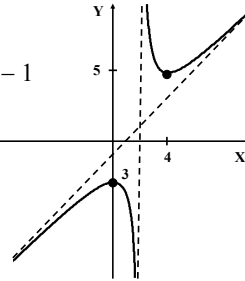
**D.** Continua en  $\mathbb{R} - \{2\}$ .

Asíntota vertical:  $x = 2$ . Asíntota oblicua:  $y = x - 1$

**E.** Max. local:  $f(0) = -3$ . Min. local:  $f(4) = 5$

**F.** Conc. abajo en  $(-\infty, 2)$ . Conc. arriba:  $(2, +\infty)$

No hay P. de inflexión.



9. **A.**  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ . **B.** Ninguna simetría.

**C.** Intersecciones: No corta al Eje Y.

Eje X:  $(1, 0)$

**D.** Cont. en  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

Asíntota vertical:  $x = 0$ .

Asíntota oblicua:  $y = x - 3$

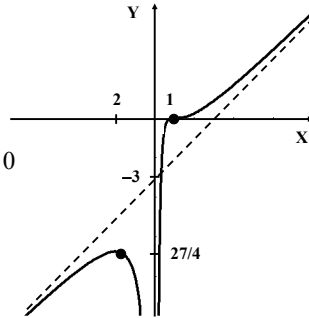
**E.**  $f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$

Max. local:  $f(-2) = -27/4$ . Min. local:  $f(1) = 0$

**F.** Conc. abajo en  $(-\infty, 0)$  y en  $(0, 1]$

Conc. arriba en  $[1, +\infty)$

P. de inflexión:  $(1, 0)$



10. **A.**  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ . **B.** Ninguna simetría

**C.** Intersecciones. Eje Y:  $(0, 0)$ . Eje X:  $(0, 0)$ ,  $(6, 0)$

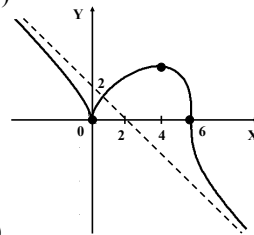
**D.** Continua en  $\mathbb{R}$ . Asíntota oblicua:  $y = -x + 2$

**F.**  $f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}$ . Min local:  $f(0) = 0$

Max. local:  $f(4) = 2\sqrt[3]{4} \approx 3.17$

**E.** Conc. abajo en  $(-\infty, 0]$  y en  $[2, 6]$ .

Conc. arriba en  $[6, +\infty)$ . P. de inflexión:  $(6, 0)$



11. **A.**  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ . **B.** Simetría respecto al origen

**C.** No intersecciona a los ejes. **D.** Cont. en  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

**D.** Asíntota vertical:  $x = 0$ . Asíntota oblicua:  $y = x$

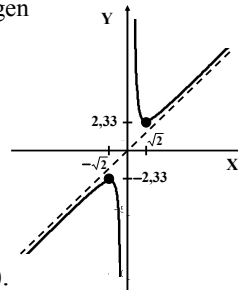
**E.**  $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{1/x^2} (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

Min. local:  $f(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} e^{1/2} \approx -2.33$

Max. local:  $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} e^{1/2} \approx 2.33$

**F.** Conc. abajo en  $(-\infty, 0)$ . Conc. arriba en  $(0, +\infty)$ .

No hay p. de inflexión.



## SECCION 8.6

1. largo = ancho = 18 cm.  
 3. 100 m., 200 m.    4. 16 cm.    5. 3 cm.    6. 1 dm.    7. 1 dm.  
 8. largo = ancho = altura = 40 cm.    9. 140 m.,  $\frac{280}{\pi}$  m.    10.  $\frac{40,000}{\pi}$  m<sup>2</sup>.  
 11. base =  $\frac{14}{4+\pi}$ , altura rectángulo =  $\frac{7}{4+\pi}$     12. base =  $\frac{36}{12-\sqrt{3}} \approx 3.51$ ,  
 altura rectángulo =  $\frac{54-9\sqrt{3}}{12-\sqrt{3}} \approx 3.74$     13. Entre *B* y *C* a 1.6 Km. de *B*.  
 14. *P* coincide con *C*    15. Remar hasta *P* entre *F* y *B* a 3.6 Km. de *F*  
 16. Remar hasta la bodega    17. 70 habitaciones, \$ 75    18. 88 plantas  
 19. base =  $\sqrt{2}r$ , altura =  $\frac{\sqrt{2}}{2}r$     20.  $\frac{\pi}{3}$     21. 4, 4    22.  $a = 2\sqrt{3}$ ,  $h = 2\sqrt{6}$   
 23. a)  $\frac{12\pi}{4+\pi} \approx 5.28$  para la circunferencia    b) 12 para la circunferencia (no hay cuadrado)    24. base = 6 cm., altura =  $3\sqrt{3}$  cm.    27.  $3\sqrt{3}$   
 28. radio del cilin. =  $\frac{\sqrt{2}}{2}r$ , altura =  $\sqrt{2}r$     29. radio cono =  $\frac{2\sqrt{2}}{3}r$ , altura =  $\frac{4}{3}r$   
 30. radio del cono =  $\frac{2\sqrt{2}}{3}r$ , altura =  $\frac{4}{3}r$     32. a.  $\theta \approx 2.5$     b.  $A \approx 171.4$  m<sup>2</sup>  
 33. 60 m., 120 m.    34. 24 m, 36 m.    35. a. 3 dm, 6 dm, 4 dm.  
 b.  $3\sqrt[3]{2}$ ,  $6\sqrt[3]{2}$ ,  $2\sqrt[3]{2}$     36. 18 cm., 27 cm.    37.  $8\sqrt{6}$  m.,  $10\sqrt{6}$  m.  
 38. radio = 1 dm, altura = 2 dm.    39. radio = altura =  $\sqrt[3]{2}$  dm.  
 40. radio = altura = 6 cm.    41. 80 Km/h.    43. a.  $x = 16$  cm.    b.  $x = 16$  cm.  
 44. radio =  $4\sqrt{6}$  cm., altura =  $8\sqrt{3}$  cm.    45.  $\sqrt[3]{13^2} \approx 46.87$     46. 8 m.

## SECCION 8.7

1. 1.179509    2. 0.103803    3. 0.739085    4. 0.835123    5. 0.567143  
 6. 1.763223    7. 1.377337    8. 3.096639    9. 2,028758    10. -2,331122  
 11. 0.377677    12. 2.668402    13. 1.1224620    14. 3.645174    15. 1.146470  
 16. a.  $P_0 = (1.165, 1.357)$     b. 1.594    17.  $g(2.058) = 5.586$

# INDICE ALFABETICO

## A

Aceleración, 415  
 Agnesi, María Gaetana, 102  
 Álgebra de funciones, 208  
 Algoritmo de la división 56  
 Ángulo de inclinación, 198  
 Ángulo entre curvas, 395  
 Ángulo entre rectas, 198  
 Ángulos orientados, 194  
 Apolonio de Perga 126  
 Aproximación lineal, 450  
 Arco Gateway, 425  
 Ars Magna, 64  
 Arquímedes 176  
 Asíntotas de una hipérbola 156  
 Asíntotas horizontales, 323  
 Asíntotas oblicuas, 336  
 Asíntotas verticales, 309  
 Axioma 6  
 Axiomas de cuerpo 13  
 Axiomas de orden 68

## B

Bicondicional, 3  
 Boubaki Nicolás 461  
 Bruja de Agnesi 102

## C

Cambio de base exponencial, 236  
 Cambio de base logarítmica, 236  
 Cardano, Girolamo, 64  
 Catálogo de funciones cont, 299  
 Catenaria, 425  
 Cauchy, Agustín, 251  
 Ceros racionales de un polinomio, 59  
 Circunferencia, 104  
 Cisoide de Diocles, 405  
 Concavidad, 488  
 Condicional, 3  
 Composición de funciones, 209  
 Conjunción 3  
 Conjuntos, 7  
 Continuidad, 295

Continuidad en intervalos, 297  
 Continuidad lateral, 298  
 Continuidad lateral 296  
 Contradicción, 5  
 Crecimiento exponencial, 239  
 Criterio de concavidad, 489  
 Criterio de la primera derivada, 487  
 Criterio de la segunda derivada, 493  
 Criterio de la recta horizontal, 217  
 Criterio de recta vertical, 180  
 Criterio de inversión, 103  
 Criterio de monotonía, 485  
 Criterios de simetría, 102  
 Criterios de traslación, 105  
 Curvas logísticas 324  
 Cuantificadores, 6  
 Curvas ortogonales, 396

## D

Decaimiento exponencial, 239  
 Decaimiento radioactivo, 240  
 Derivación implícita, 391  
 Derivación logarítmica, 405  
 Derivada, 349  
 Derivada de un cociente, 363  
 Derivada de la func. Exponen., 361, 374  
 Derivada de un producto, 362  
 Derivada de una suma, 361  
 Derivada por la derecha, 351  
 Derivada por la izquierda, 351  
 Derivadas de las func. hiperbólicas, 427  
 Derivadas de las func. hiperb inver, 429  
 Derivadas de las func. trigonométri, 371  
 Derivadas de las func. trigo. invers, 409  
 Derivadas de orden superior, 412  
 Descartes, Rene, 92  
 Diagrama de Ven, 7  
 Diferenciabilidad y continuidad, 354  
 Diferencia indeterminada, 506  
 Diferenciales, 452  
 Diofante de Alejandría, 51  
 Discontinuidad esencial, 294  
 Discontinuidad removible 294

Distancia, 94  
 Distancia de un punto a una recta, 115  
 Disyunción, 3  
 Dominio, 177

**E**

Ecuación cuadrática, 52  
 Ecuación lineal, 111  
 Ecuación punto-pendiente, 110  
 Ecuaciones polinómicas, 50  
 Elipse, 140  
 Elipse trasladada, 145  
 Equivalencia lógica, 5  
 Error porcentual, 455  
 Error relativo, 455  
 Estimación de errores, 455  
 Estiramiento y compresión, 207  
 Euler, Leonardo, 250  
 Exponentes enteros, 19  
 Exponentes racionales, 28, 31  
 Extremo absoluto, 465  
 Extremo relativo, 467

**F**

Factorización, 36, 41  
 Familia Bernoulli, 248  
 Fechado con carbono, 241  
 Formas indeterminadas, 501  
 Fórmulas de factorización, 39  
 Fracciones compuestas, 45  
 Función, 177  
 Función coseno, 192  
 Funciones como modelos, 185  
 Función compuesta, 209  
 Función cosecante, 182  
 Función cotangente inversa, 221  
 Función constante, 182  
 Función creciente, 182  
 Función decreciente, 182  
 Función de densidad normal, 524  
 Función derivada, 351  
 Función diferenciable, 349  
 Función exponencial natural, 230  
 Función identidad, 178  
 Función impar, 181  
 Función inversa, 218

Función inyectiva, 217  
 Función logaritmo natural, 235  
 Función monótona, 182  
 Función par, 181  
 Función parte entera, 181  
 Función periódica, 192  
 Función polinómica, 184  
 Función potencia, 183  
 Función racional, 184  
 Función raíz enésima, 183  
 Función reales, 178  
 Función secante, 193  
 Función secante inversa,  
 Función seno, 192  
 Función seno inversa, 220  
 Función sierra, 188  
 Función tangente, 193  
 Función tangente inversa, 221  
 Funciones algebraicas, 184  
 Funciones exponenciales, 228  
 Funciones hiperbólicas, 424  
 Funciones logarítmicas, 232  
 Funciones trascendentes, 185  
 Funciones trigo. inversas, 220  
 Funciones hiperb.. inversas, 429

**G**

Googol, googolplex, 23  
 Gráfico de una función, 179  
 Gráfico de la función inversa, 219

**H**

Hipaso de Metaponto, 11  
 Hipérbola, 153  
 Hipérbola trasladada, 158  
 Historia de  $\pi$ , 344

**I**

Identidades hiperbólicas, 426  
 Implicación lógica, 6  
 Inecuaciones, 71  
 Inecuaciones racionales, 75  
 Intervalos, 70  
 Intersección,, unión y diferencia de conjuntos, 8

Intervalo de crecimiento, 486  
 Intervalo de decrecimiento, 486  
 Interés compuesto, 243  
 Interés compuesto continuo, 243  
 Interés simple, 243  
 Inverso aditivo, 14  
 Inverso multiplicativo, 14

**L**

Lado recto de la elipse, 144  
 Lado recto de la hipérbola, 156  
 Lógica, 3  
 Lagrange, Joseph Louis, 474  
 Leibniz, G. W. 206  
 Lemniscata de Bernoulli, 404  
 Ley de los cosenos, 197  
 Ley de los senos, 197  
 Ley del emparedado, 275  
 Leyes de la lógica, 5  
 Leyes de los exponentes, 20, 227  
 Leyes de los logaritmos, 234  
 Leyes de los límites, 256  
 Leyes de los radicales, 29  
 Límite (no riguroso), 252  
 Límite (riguroso), 268  
 Límite en el infinito, 318  
 Límites infinitos, 306, 309, 310  
 Límite por la derecha, 254  
 Límite por la izquierda, 254  
 Límites trigonométricos, 287  
 Límite unilaterales, 254  
 L'Hôspital, Marqués de, 464

**M**

Máximo de una función, 465  
 Máximo relativo, 467  
 Media aritmética, 81  
 Media geométrica, 81  
 Método axiomático, 13  
 Método de Newton-Raphson, 559  
 Método de Sturm, 72  
 Mínimo de una función, 465  
 Mínimo relativo, 467

**N**

Newton, Isaac, 346

Notación científica, 22  
 Notación de Leibniz, 353  
 Número crítico, 467  
 Número crítico de segundo orden, 490  
 Número  $e$ , 229  
 Número irracional, 11  
 Número racional, 11

**P**

Parábola, 127  
 Parábola cúbica, 102  
 Parábola semicúbica, 102  
 Pendiente, 109  
 Pitágoras de Samos, 2  
 Plano cartesiano, 93  
 Producto cartesiano, 9  
 Productos notables, 35  
 Producto indeterminado, 506  
 Propiedad reflexiva de la elipse, 146  
 Propiedad reflexiva de la parábola, 131  
 Propiedad reflexiva de la hipérbola, 160  
 Potencia indeterminada, 507  
 Punto crítico, 467  
 Punto de inflexión, 490  
 Punto medio, 95

**R**

Racionalización, 30  
 Radicales, 28  
 Rango de una función, 177  
 Rapson, Joseph, 559  
 Razón de cambio, 435  
 Razon de cambio relacionadas, 437  
 Recta tangente, 347, 355  
 Rectas paralelas, 113  
 Rectas perpendiculares, 114  
 Rectas verticales y horizontales, 111  
 Refracción de la luz, 548  
 Reflexiones, 101, 206  
 Regla de la constante, 360  
 Regla de L'Hôspital, 501  
 Regla de la cadena, 377  
 Rolle, Michael, 472  
 Rotación de ejes, 166

**S**

Secciones cónicas, 127  
Simetrías y reflexiones, 101  
Sistema de los números reales, 10  
Sturm, J. Ch. F. 78

**T**

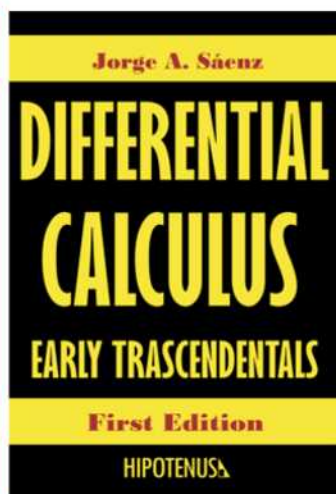
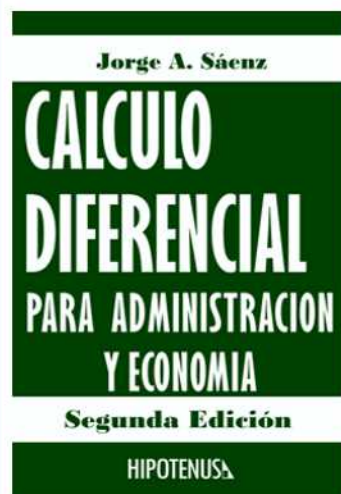
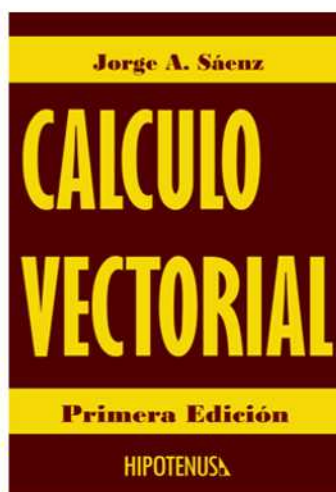
Tartaglia, 64  
Teorema de factorización completa, 58  
Teorema, 6  
Teorema de Fermat, 467  
Teorema del cambio de variable, 275  
Teorema del factor, 57  
Teorema de la arepa rellena, 275  
Teorema de la constante, 476  
Teorema de la diferencia constante, 476  
Teorema de la función inversa, 394

Teorema de Rolle, 472  
Teorema de sustitución, 299  
Teorema del punto fijo, 304  
Teorema del residuo, 56  
Teorema del valor extremo, 466  
Teorema del valor intermedio, 301  
Teorema del valor medio, 473  
Teorema del val. medio de Cauchy, 477  
Teorema fundamental del álgebra, 58  
Traslaciones verticales y horizont., 206

**V**

Valor absoluto, 82  
Valor lógico, 3  
Velocidad, 414  
Velocidad instantánea, 348  
Vida media, 240

# OTRAS PUBLICACIONES



# HIPO TENUS A